

Faces em zona e Teorema de Cauchy¹

EDUARDO A. SALGADO²

1 — Entregou para publicação em 30-3-66; 2 — Cadeira de Geologia da ESALQ.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo estudar a aplicação do teorema de Cauchy, sobre produto de dois determinantes, às matrizes quadradas de ordem 3, representando zonas cristalográficas.

INTRODUÇÃO

É conhecido, em algebra, o seguinte teorema de Cauchy: o determinante-produto de dois outros é igual ao produto desses determinantes.

Este determinante-produto pode ser obtido de quatro maneiras diferentes, a saber: fazendo a multiplicação linha por coluna, coluna por coluna, linha por linha e coluna por linha.

Por outro lado sabe-se, em cristalografia, que o determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 é igual a zero, uma vez que os números de cada linha formem, em conjunto, o símbolo de Miller de cada uma de três faces pertencentes a determinada zona cristalográfica.

Este trabalho tem por finalidade evidenciar certas relações interessantes que se obtêm, quando se aplica o teorema de Cauchy a matrizes quadradas que representam zonas cristalográficas.

DEDUÇÃO

Designaremos por (I) e (II) as zonas primeira e segunda que tomam parte na multiplicação e a zona-produto será designada por (III).

Linha por coluna

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} h_1 & k_1 & 1 & A & B & 1 \\ h_2 & k_2 & 1 & C & D & 1 \\ h_3 & k_3 & 1 & E & F & 1 \end{array} \right| X = \left| \begin{array}{ccc} (Ah_1 + Ck_1 + E) & (Bh_1 + Dk_1 + F) & (h_1 + k_1 + 1) \\ (Ah_2 + Ck_2 + E) & (Bh_2 + Dk_2 + F) & (h_2 + k_2 + 1) \\ (Ah_3 + Ck_3 + E) & (Bh_3 + Dk_3 + F) & (h_3 + k_3 + 1) \end{array} \right|$$

Determine-se o símbolo da zona (II), por meio das faces (AB1) e (CD1). Obtem-se:

$[r_1 : r_2 : r_3] = [(B-D):(C-A):(AD-BC)]$. Vamos provar que as zonas (III) e (II) coincidem. Deve-se ter então:

$$(B-D)(Ah_1 + Ck_1 + E) + (C-A)(Bh_1 + Dk_1 + F) + (AD-BC)(h_1 + k_1 + 1) = 0$$

$$(B-D)(Ah_2 + Ck_2 + E) + (C-A)(Bh_2 + Dk_2 + F) + (AD-BC)(h_2 + k_2 + 1) = 0$$

Estas duas expressões, desenvolvidas e simplificadas dão:

$$E(B-D) + F(C-A) + AD-BC = 0, \text{ o que é exato.}$$

Coluna por coluna

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} h_1 & k_1 & 1 & A & B & 1 \\ h_2 & k_2 & 1 & C & D & 1 \\ h_3 & k_3 & 1 & E & F & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{ccc} (Ah_1 + Ch_2 + Eh_3) & : & (Bh_1 + Dh_2 + Fh_3) & : & (h_1 + h_2 + h_3) \\ (Ak_1 + Ck_2 + Ek_3) & : & (Bk_1 + Dk_2 + Fk_3) & : & (k_1 + k_2 + k_3) \\ (A + C + E) & : & (B + D + F) & : & (1 + 1 + 1) \end{array} \right|$$

Vamos verificar que, desta vez ainda, a zona (III) coincide com a zona (II). Devemos ter, assim:

$$(B-D)(Ah_1 + Ch_2 + Eh_3) + (C-A)(Bh_1 + Dh_2 + Fh_3) + (AD-BC)(h_1 + h_2 + h_3) = 0$$

$$(B-D)(A + C + E) + (C-A)(B + D + F) + 3(AD-BC) = 0$$

Desdobrando e simplificando obtém-se, respetivamente:

$$h_3(AD + BE + CF - DE - AF - BC) = 0, \quad AD + BE + CF - DE - AF - BC = 0$$

A expressão anterior, entre parênteses, é igual a zero, pois representa o determinante da matriz (II).

Linha por linha

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} h_1 k_1 & 1 & & A & B & 1 \\ h_2 k_2 & 1 & X & C & D & 1 \\ h_3 k_3 & 1 & & E & F & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{ccc} (Ah_1 + Bk_1 + 1) & : & (Ch_1 + Dk_1 + 1) & : & (Eh_1 + Fk_1 + 1) \quad \dots (1) \\ (Ah_2 + Bk_2 + 1) & : & (Ch_2 + Dk_2 + 1) & : & (Eh_2 + Fk_2 + 1) \quad \dots (2) \\ (Ah_3 + Bk_3 + 1) & : & (Ch_3 + Dk_3 + 1) & : & (Eh_3 + Fk_3 + 1) \quad \dots (3) \end{array} \right|$$

Coluna por linha

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} h_1 k_1 & 1 & & A & B & 1 \\ h_2 k_2 & 1 & X & C & D & 1 \\ h_3 k_3 & 1 & & E & F & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{ccc} (Ah_1 + Bh_2 + h_3) & : & (Ch_1 + Dh_2 + h_3) & : & (Eh_1 + Fh_2 + h_3) \quad \dots (1) \\ (Ak_1 + Bk_2 + k_3) & : & (Ck_1 + Dk_2 + k_3) & : & (Ek_1 + Fk_2 + k_3) \quad \dots (2) \\ (A + B + 1) & : & (C + D + 1) & : & (E + F + 1) \quad \dots (3) \end{array} \right|$$

Vamos mostrar que a zona (III), obtida em "coluna por linha", é a mesma que se obtém em "linha por linha".

O símbolo da zona (III), $[R_1 R_2 R_3]$, tirado das faces (1) e (3), em "coluna por linha", é constituído dos índices:

$$R_1 = \left\{ (E+F+1)(Ch_1 + Dh_2 + h_3) - (C+D+1)(Eh_1 + Fh_2 + h_3) \right\}$$

$$R_2 = \left\{ (A+B+1)(Eh_1 + Fh_2 + h_3) - (E+F+1)(Ah_1 + Bh_2 + h_3) \right\}$$

$$R_3 = \left\{ (C+D+1)(Ah_1 + Bh_2 + h_3) - (A+B+1)(Ch_1 + Dh_2 + h_3) \right\}$$

Procuremos verificar se a primeira face da zona-produto de "linha por linha" pode pertencer à zona (III) de "coluna por linha".

Devemos ter, nesse caso:

$$R_1 (Ah_1 + Bk_1 + 1) + R_2 (Ch_1 + Dk_1 + 1) + R_3 (Eh_1 + Fk_1 + 1) = 0.$$

Substituindo, nesta expressão, os valores anteriormente achados de R_1 , R_2 , R_3 , obtem-se, no primeiro membro, 108 termos que, após simplificação, ficam reduzidos a 36, dando como resultado final:

$$(AD + BE + CF - DE - AF - BC)(h_1 h_2 + h_3 k_1 + h_1 - h_1 h_3 - h_1 k_1 - h_2) = 0,$$

o que é exato, uma vez que a primeira expressão do primeiro membro, entre parênteses, vale zero, como determinante da matriz (II).

Resultado semelhante é obtido quando se utiliza a terceira face da zona-produto de "linha por linha".

Os valores de R_1 , R_2 , R_3 , podem ser assim escritos:

$$R_1 = (h_2 - h_1)(DE - CF) + (h_3 - h_1)(E - C) + (h_3 - h_2)(F - D)$$

$$R_2 = (h_2 - h_1)(AF - BE) + (h_3 - h_1)(A - E) + (h_3 - h_2)(B - F)$$

$$R_3 = (h_2 - h_1)(BC - AD) + (h_3 - h_1)(C - A) + (h_3 - h_2)(D - B)$$

Somando, membro a membro, estas três expressões, obtem-se:

$$R_1 + R_2 + R_3 = 0.$$

Relativamente às zonas (I) e (II) podem ocorrer os seguintes casos:

a) em ambas, os índices do eixo de zona não somam zero (caso geral). Seja $\frac{R_2}{R_1} = \delta$ e procuremos obter δ , em função dos índices das zonas (I) e (II).

No símbolo da zona (III) tem-se, então:
 $R_1 = R_1, R_2 = \delta R_1, R_3 = -R_1(1 + \delta)$. Basta tomar, pois, o símbolo de qualquer face da zona (III) e levar em conta os valores anteriores de R_1, R_2, R_3 , para que se obtenha δ .

Tome-se, por exemplo, a face-produto (1) de "coluna por linha".

Tem-se:

$$R_1(Ah_1 + Bh_2 + h_3) + \delta R_1(Ch_1 + Dh_2 + h_3) - \\ - R_1(Eh_1 + Fh_2 + h_3) - \delta R_1(Eh_1 + Fh_2 + h_3) = 0 \dots$$

$$\dots \delta = \frac{h_1(E-A) + h_2(F-B)}{h_1(C-E) + h_2(D-F)}$$

b) na zona (I), de símbolo $[r_1:r_2:r_3]$, os índices somam

zero, tendo-se $\frac{r_2}{r_1} = q$. Procuremos relacionar q e δ .

A face-produto (1) de "linha por linha" dá:

$$R_1(Ah_1 + Bk_1 + 1) + R_2(Ch_1 + Dk_1 + 1) + R_3(Eh_1 + Fk_1 + 1) = 0 \dots (1)$$

A face-produto (3) de "coluna por linha" dá:

$$R_1(A + B + 1) + R_2(C + D + 1) + R_3(E + F + 1) = 0 \dots (2)$$

Subtraindo, membro a membro, (2) de (1), vem:

$$R_1[A(h_1-1) + B(k_1-1)] + R_2[C(h_1-1) + D(k_1-1)] + R_3[E(h_1-1) \\ + F(k_1-1)] = 0 \dots (3)$$

De $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ tira-se $r_3 = -r_1 - r_2$ e, para a face $(h_1 k_1 1)$ podemos escrever $h_1 r_1 + k_1 r_2 - r_1 - r_2 = 0 \dots r_1:r_2 = \\ = (1 - k_1):(h_1 - 1) \dots (4)$

Confrontando (4) e (3) obtém-se:

$$R_1 (Ar_2 - Br_1) + R_2 (Cr_2 - Dr_1) + R_3 (Er_2 - Fr_1) = 0 \dots\dots\dots(5)$$

Substituindo, em (5), R_3 por $(-R_1 - R_2)$, r_2 por αr_1 , R_2 por δR_1 dividindo por $R_1 r_1$, tem-se:

$$A\alpha - B - E\alpha + F + \delta(C\alpha - D - E\alpha + F) = 0 \dots\dots\dots(6),$$

expressão esta que liga α e δ , através dos índices da segunda zona.

Vamos verificar em que condições a zona (I) pode coincidir com a zona (III). Neste caso, $\alpha = \delta$ e a expressão (6) transforma-se em:

$$\alpha^2(C - E) + \alpha(A - E - D + F) + F - B = 0 \dots\dots\dots(7).$$

Tomada uma zona (II) qualquer, tira-se de (7) o valor de α para a zona (I) e, após multiplicação de "linha por linha" e "coluna por linha", obtém-se uma zona-produto que coincide então com a zona (I).

O valor $\alpha = \delta$ pode ainda ser obtido em função apenas dos índices da primeira coluna da matriz (II).

Com efeito, valendo-nos da face (3) de "coluna por linha" e levando em conta que o eixo da zona (III) tem por símbolo $[1:\alpha:1+\alpha]$, podemos escrever:

$$A + B + 1 + \alpha(C + D + 1) - E - F - 1 - \alpha(E + F + 1) = 0 \dots\dots\dots(8).$$

Somando (7) e (8), membro a membro, obtém-se:

$$\alpha^2(C - E) + \alpha(A + C - 2E) + A - E = 0 \dots\dots\dots(9), \text{ da qual}$$

$$\text{se tira } \alpha = \frac{E - A}{C - E}$$

c) seja a zona (I) qualquer e $[r'_1:r'_2:r'_3]$ o símbolo da

zona (II), no qual $r'_1 + r'_2 + r'_3 = 0$, sendo $\frac{r'_2}{r'_1} = \beta$ e procuramos relacionar β e δ , através de índices da zona (II).

Temos, para a face (AB1):

$$Ar'_1 + Br'_2 + r'_3 = 0 \therefore Ar'_1 + Br'_2 - r'_1 - r'_2 = 0 \therefore$$

$$\therefore \frac{r'_2}{r'_1} = \frac{A-1}{1-B} = \frac{C-1}{1-D} = \frac{E-1}{1-F} = \beta \dots\dots(10), \text{ tirando-se daqui:}$$

$$A = \beta(1-B) + 1, C = \beta(1-D) + 1, E = \beta(1-F) + 1 \dots\dots(11)$$

Na expressão (2), substituindo A, C, F, pelos valores de (11), R_2 por δR_1 e R_3 por $(-R_1 - R_2)$, obtem-se:

$$B - \beta B - F + \beta F + \delta(D - \beta D - F + \beta F) = 0 \dots\dots\dots(12)$$

Querendo-se $\beta = \delta$, (12) transforma-se em:

$$\delta^2(F - D) + \delta(D - B) + B - F = 0 \dots\dots\dots(13)$$

Tomando-se, em (13), um valor desejado para $\delta = \beta$ e valores arbitrários para B e D, obtem-se F e completa-se a zona (II) com A, C, E.

A multiplicação de "linha por linha" e "coluna por coluna", sendo qualquer a zona (I), produz então a zona (III), coincidindo com a zona (II).

d) nas zonas (I) e (II), os índices do eixo de zona somam zero, tendo-se $\alpha = / = \beta = / = \delta$.

As expressões (6) e (12) permitem relacionar α , β , δ .

e) querendo-se, agora, que as zonas (I), (II) e (III)

coincidam, temos:
$$\frac{A-1}{1-B} = \frac{C-1}{1-D} = \frac{E-1}{1-F} = \alpha \dots\dots\dots(14,$$

 ver expressão 10)

Tirando-se de (14) A, C, E e levando-os em (7) obtem-se:

$$\alpha = \frac{B - F}{F - D} \dots\dots\dots(15)$$

Fixando um valor para α e tomando-se valores arbitrários, na zona (II), para D e F, obtem-se A, B, C, E, completando assim a referida zona (II).

Escrevendo-se, agora, uma zona (I), cujo eixo seja o mesmo da zona (II), o produto de "linha por linha" e "coluna por linha" leva a uma zona (III), coincidente com (I) e (II).

SUMMARY

The present work has the objective of studying the application of the theorem of Cauchy about the product of two determinants to the square matrices of order 3 representing crystallographical zones.

BIBLIOGRAFIA CITADA

F. A. LACAZ NETO — 1943 — Teoria elementar dos determinantes.