

Simbolos Projetivos de Fedorow (*)

EDUARDO A. SALGADO

Escola Superior de Agricultura «Luiz de Queiroz»

(*) Recebido para publicação em 14/6/60.

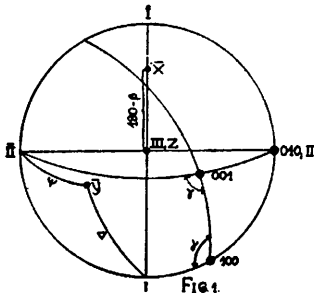
1 — INTRODUÇÃO

Na Cristalografia de BOLDYREV, (1934), expõe-se o método dos "símbolos projetivos de Fedorow", deduzindo-se, através do teorema dos cosenos de Wulff, uma equação geral de projetividade [13] que é, depois, aplicada aos diversos sistemas cristalográficos.

Faremos aqui a dedução da equação de projetividade, para cada sistema, seguindo caminho diferente e utilizando a projeção estereográfica, designando os índices milerianos normais pelas letras h, k, l .

2 — DEDUÇÃO

SISTEMA TRICLÍNICO



Os eixos X, Y, Z do triclínico e os eixos I, II, III do sistema auxiliar retangular estão representados na fig. 1. Uma face qualquer de símbolo (hkl) , intercepta, no sistema XYZ , os segmentos

$$OA = \frac{a}{h}, \quad OB = \frac{b}{k}, \quad OC = \frac{c}{l} \text{ e}$$

no sistema auxiliar, os segmentos OA_1, OB_1, OC_1 , sendo O o centro comum de ambos os sistemas. No sistema auxiliar temos, como ângulos diretores de OA, OB, OC , respectivamente: $(\beta - 90), 90, \beta; (180 - \Delta), \psi, \alpha; 90, 90, 0$.

As coordenadas de A, B, C são, pois, respectivamente:

$$\frac{a}{h} \operatorname{sen} \beta, \quad O, \quad \frac{a}{h} \cos \beta; \quad -\frac{b}{k} \cos \Delta, \quad \frac{b}{k} \cos \psi, \quad \frac{b}{k} \cos \alpha; \quad O, O, \quad \frac{c}{l}$$

Obtem-se, assim, para equação da face (hkl) , no sistema retangular :

$$x \begin{vmatrix} 0 & \frac{a}{h} \cos \beta & 1 \\ \frac{b}{k} \cos \psi & \frac{b}{k} \cos \alpha & 1 \\ 0 & \frac{c}{l} & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} \frac{a}{h} \cos \beta & \frac{a}{h} \operatorname{sen} \beta & 1 \\ \frac{b}{k} \cos \beta & -\frac{b}{k} \cos \Delta & 1 \\ \frac{c}{l} & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+z \begin{vmatrix} \frac{a}{h} \operatorname{sen}\beta & 0 & 1 \\ -\frac{b}{k} \cos\Delta & \frac{b}{k} \cos\psi & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{a}{h} \operatorname{sen}\beta & 0 & \frac{a}{h} \cos\beta \\ -\frac{b}{k} \cos\Delta & \frac{b}{k} \cos\psi & \frac{b}{k} \cos\alpha \\ 0 & 0 & \frac{c}{1} \end{vmatrix} \dots$$

$$\begin{aligned} & \cdot x \left\{ \frac{bc \cdot \cos\psi}{kl} - \frac{ab \cdot \cos\beta \cdot \cos\psi}{hk} \right\} + \\ & + y \left\{ \frac{ac \cdot \operatorname{sen}\beta}{hl} + \frac{bc \cdot \cos\Delta}{kl} - \frac{ab(\cos\beta \cos\Delta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha)}{hk} \right\} + \\ & + z \left\{ \frac{ab \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\psi}{hk} \right\} = \frac{abc \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\psi}{hkl} \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros por hkl, vem:

$$\begin{aligned} & x \left\{ bch \cdot \cos\psi - abl \cdot \cos\beta \cdot \cos\psi \right\} + y \left\{ ack \cdot \operatorname{sen}\beta + bch \cdot \cos\Delta - \right. \\ & \left. - abl (\cos\beta \cdot \cos\Delta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha) \right\} + \\ & + z \left\{ abl \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\psi \right\} = abc \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\psi = T \end{aligned}$$

Ter-se-á, então:

$$\begin{aligned} OA_1 &= \frac{T}{b \cdot \cos\psi (ch - al \cdot \cos\beta)} \\ OB_1 &= \frac{T}{ack \cdot \operatorname{sen}\beta + bch \cdot \cos\Delta - abl (\cos\beta \cdot \cos\Delta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha)} \\ OC_1 &= OC = \frac{T}{abl \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\psi} \end{aligned}$$

Os índices projetivos serão, após multiplicá-los por T:

$$\begin{aligned} p'_1 &= h (bc \cdot \cos\psi) - 1 (ab \cdot \cos\beta \cdot \cos\psi) \\ p'_2 &= h (bc \cdot \cos\Delta) + k (ac \cdot \operatorname{sen}\beta) - ab (\cos\beta \cdot \cos\Delta + \\ & \quad + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha)l \\ p'_3 &= abl \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\psi. \end{aligned}$$

Dividindo por $ab \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\psi$, vem:

$$p_1 = h \cdot \frac{c}{a \cdot \operatorname{sen}\beta} - 1 \cdot \operatorname{cotg}\beta = a_1 h + a_3 l$$

$$p'_2 = h \cdot \frac{c \cdot \cos\Delta}{a \cdot \sin\beta \cdot \cos\psi} + k \cdot \frac{c}{b \cdot \cos\psi} -$$

$$- \left\{ \frac{\cotg\beta \cdot \cos\Delta}{\cos\psi} + \frac{\cos\alpha}{\cos\psi} \right\} 1 =$$

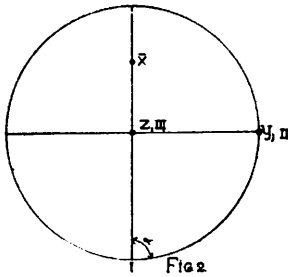
$$= a_4 h + a_5 k + a_6 1 \dots\dots\dots [17]$$

$$p^l_3 = 1$$

SISTEMA MONOCLÍNICO

Neste sistema (fig. 2), $\alpha = \Delta = 90$ e $\psi = 0$. A fórmula [17] transforma-se, então, em: $p^l_1 = h \cdot \frac{c}{a \cdot \sin\beta} - 1 \cdot \cotg\beta = a_1 h + a_3 1$

$$p^l_2 = k \cdot \frac{c}{b} = a_2 k \dots\dots\dots [18]$$

$$p^l_3 = 1$$


SISTEMA RÔMBICO

Neste sistema (fig. 3), $\alpha = \beta = \Delta = 90$ e $\psi = 0$ e a fórmula [18] dá :

$$p^l_1 = h \cdot \frac{c}{a} = a_1 h$$

$$p^l_2 = k \cdot \frac{c}{b} = a_2 k \dots\dots\dots [19]$$

$$p^l_3 = 1$$

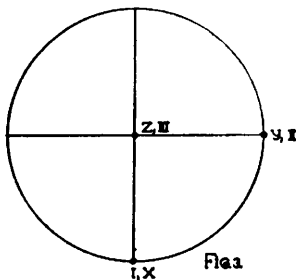
SISTEMA TETRAGONAL

Como $a = b$, tira-se de [19]:

$$p^l_1 = h \cdot \frac{c}{a} = a_1 h$$

$$p^l_2 = k \cdot \frac{c}{a} = a_1 k \dots\dots\dots [20]$$

$$p^l_3 = 1$$

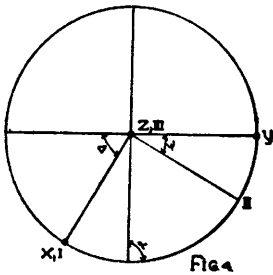


SISTEMA CÚBICO

Se $a = b = c$, obtém-se de [20]: $p_1^I = h$
 $p_2^I = k$
 $p_3^I = l$

SISTEMA HEXAGONAL

Para a orientação adotada na figura 4, onde o eixo X coincide com o eixo I, tem-se $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\Delta = 60^\circ$ e $\psi = 30^\circ$ e a fórmula [17] dá:



$$p_1^I = h \cdot \frac{c}{a}$$

$$p_2^I = h \cdot \frac{c}{a\sqrt{3}} + 2k \cdot \frac{c}{a\sqrt{3}}$$

$$p_3^I = l$$

Dividindo por $\frac{c}{a\sqrt{3}}$, obtém-se:

$$p_1^I = h \sqrt{3}$$

$$p_2^I = h + 2k$$

$$p_3^I = l \cdot \frac{a\sqrt{3}}{c}$$

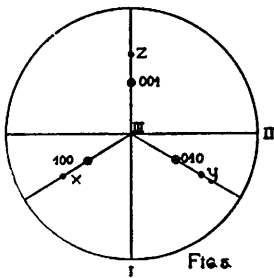
SISTEMA TRIGONAL

Na figura 5 tem-se $\rho X = \rho Y = \rho Z = \Delta$. Uma face (hkl), interceptando no sistema XYZ os segmentos

$$OA = \frac{1}{h}, OB = \frac{1}{k}, OC = \frac{1}{l},$$

termina, no sistema auxiliar retangular, os segmentos OA_1, OB_1, OC_1 . No sistema auxiliar tem-se, como coordenadas de A B C, respectivamente: $\frac{\text{sen}\Delta}{2h}, \frac{-\sqrt{3} \cdot \text{sen}\Delta}{2h}$

$\frac{\text{cos}\Delta}{h}; \frac{\text{sen}\Delta}{2k}, \frac{\sqrt{3} \cdot \text{sen}\Delta}{2k}, \frac{\text{cos}\Delta}{k}; \frac{-\text{sen}\Delta}{l}, 0, \frac{\text{cos}\Delta}{l}$. A equação da fa-



ce (hkl), no sistema auxiliar, vem a ser então:

$$\begin{aligned}
 & x \begin{vmatrix} \frac{-\sqrt{3} \cdot \text{sen}\Delta}{2h} & \frac{\text{cos}\Delta}{h} & 1 \\ \frac{\sqrt{3} \cdot \text{sen}\Delta}{2k} & \frac{\text{cos}\Delta}{k} & 1 \\ 0 & \frac{\text{cos}\Delta}{l} & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} \frac{\text{cos}\Delta}{h} & \frac{\text{sen}\Delta}{2h} & 1 \\ \frac{\text{cos}\Delta}{k} & \frac{\text{sen}\Delta}{2k} & 1 \\ \frac{\text{cos}\Delta}{l} & \frac{-\text{sen}\Delta}{l} & 1 \end{vmatrix} + z \\
 & + z \begin{vmatrix} \frac{\text{sen}\Delta}{2h} & \frac{-\sqrt{3} \cdot \text{sen}\Delta}{2h} & 1 \\ \frac{\text{sen}\Delta}{2k} & \frac{\sqrt{3} \cdot \text{sen}\Delta}{2k} & 1 \\ \frac{-\text{sen}\Delta}{l} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\text{sen}\Delta}{2h} & \frac{-\sqrt{3} \cdot \text{sen}\Delta}{2h} & \frac{\text{cos}\Delta}{h} \\ \frac{\text{sen}\Delta}{2k} & \frac{\sqrt{3} \cdot \text{sen}\Delta}{2k} & \frac{\text{cos}\Delta}{k} \\ \frac{-\text{sen}\Delta}{l} & 0 & \frac{\text{cos}\Delta}{l} \end{vmatrix} \cdot \dots \\
 & \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{sen}\Delta \cdot \text{cos}\Delta \left\{ \frac{1}{kl} + \frac{1}{hl} - \frac{2}{hk} \right\} x + \\
 & + \frac{3}{2} \cdot \text{sen}\Delta \cdot \text{cos}\Delta \left\{ \frac{1}{hl} - \frac{1}{kl} \right\} y + \frac{\sqrt{3} \cdot \text{sen}^2\Delta}{2} \left\{ \frac{1}{kl} + \frac{1}{hl} + \frac{1}{hk} \right\} z = \\
 & = \frac{3\sqrt{3} \cdot \text{sen}^2\Delta \cdot \text{cos}\Delta}{2hkl}. \text{ Multiplicando por } hkl, \text{ vem:} \\
 & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{sen}\Delta \cdot \text{cos}\Delta (h + k - 2l) x + \frac{3}{2} \cdot \text{sen}\Delta \cdot \text{cos}\Delta (k - h) y + \\
 & + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{sen}^2\Delta (h + k + l) z = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \text{sen}^2\Delta \cdot \text{cos}\Delta.
 \end{aligned}$$

Teremos, então:

$$OA_1 = \frac{3\text{sen}\Delta}{h + k - 2l}; \quad OB_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot \text{sen}\Delta}{k - h}; \quad OC_1 = \frac{3 \cdot \text{cos}\Delta}{h + k + l}$$

e, para índices projetivos:

$$p_1^1 = \frac{h + k - 2l}{3 \cdot \text{sen}\Delta}; \quad p_2^1 = \frac{k - h}{\sqrt{3} \cdot \text{sen}\Delta}; \quad p_3^1 = \frac{h + k + l}{3 \cdot \text{cos}\Delta}$$

Multiplicando por $3.\text{sen}\Delta$, vem:

$$p^l_1 = h + k - 2l$$

$$p^l_2 = \sqrt{3}(k - h) \dots\dots\dots [34]$$

$$p^l_3 = \text{tg}\Delta (h + k + l)$$

3 — RESUMO

Na Cristalografia de BOLDYREV, (1934), é deduzida uma equação geral de projetividade [13], que se aplica aos diferentes sistemas cristalográficos.

O presente trabalho cuida dos símbolos projetivos de Fedorow, em cada sistema, através da projeção estereográfica.

4 — SUMMARY

In the Crystallography by BOLDYREV, (1934), a general equation of projectivity [13] is deduced, which is used in the different crystallographic systems.

The present work deals with Fedorow's projective symbols in each system, by means of the stereographic projection.

LITERATURA CITADA

- BOLDYREV, A. K. - 1934 — Cristalografia — tradução do russo para o hespanhol por Rafael Candel Vila — Editorial Labor.
 BOEKE, H. E. - 1911 — Die Anwendung der stereographischen Projektion bei kristallographischen Untersuchungen — Berlin, — Verlag von Gebrüder Borntraeger.

