O desenvolvimento em série e a derigração das funções tan. x e cot. x.

FREDERICO PIMENTEL GOMES

Assistente e livre-docente da cadeira de Matemática

ÍNDICE

1 — INTRODUÇAO

O fim dêste nosso trabalho é discutir a derigração das funções tan. x, e cot. x, que não foram consideradas na nossa tese denominada "Introdução ao Estudo dos Derigrais". O modo mais conveniente de realizar a derigração dessas funções é, segundo nos parece, a partir do seu desenvolvimento em série. Não é muito difícil obter o desenvolvimento formal de tan. x e cot. x em série, mas a discussão da convergência dessas séries, que é indispensável, exige conhecimentos mais aprofundados e pouco acessíveis. Por isso é que resolvemos publicar um trabalho mais completo em que, além da parte relativa à derigração, o desenvolvimento em série das funções acima referidas é discutido com detalhes. Daí o fato de só serem originais nêste artigo os capítulos 6 e 7.

Procuramos escrever um trabalho tão simples quanto possível, evitando, porém, conseguir simplicidade à custa de perda de rigor.

O capítulo 5 será interessante e de leitura fácil para os que conhecem a teoria das funções analíticas. Os que ainda não se aprofundaram nesse assunto poderão deixá-lo de lado, sem que isso prejudique a compreensão do resto do trabalho.

Os números entre colchêtes se referem à bibliográfia.

2 — O DESENVOLVIMENTO FORMAL DE TAN. x E COT. x EM SÉRIE DE POTÊNCIAS DE x

Para $x \neq (n+\frac{1}{2})\pi$, com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ temos por definição

$$\tan. x = \frac{\text{sen}. x}{\cos. x}$$

A função tan. x é uma função impar, pois tan. $(-x) =$ $= -$ tan. x. Logo no seu desenvolvimento em série de potências

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

devem ser nulos todos os coeficientes de potências pares de x. Logo devemos ter

$$(2,1)\quad \tan. x = \frac{\text{sen. } x}{\cos. x} = a_1 x + a_3 x^3 + \ldots + a_{2n+1}\, x^{2n+1} + \ldots$$

Para calcular os coeficientes a1, a2, etc., substituimos sen. x e cos. x pelo seu desenvolvimento em série, que é, como se sabe

$$\text{sen. } x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \ldots$$

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \ldots$$

Segue-se que devemos ter

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - .. = (a_1 x + a_3 x^3 + \ldots)\ \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right)$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots = a_1 x + x^3 \left(a_3 - \frac{a_1}{2!}\right) + x^5\left(a_5 - \frac{a_3}{2!} + \frac{a_1}{4!}\right) +$$

$$+ x^7 \left(a_7 - \frac{a_5}{2\,!} + \frac{a_3}{4\,!} - \frac{a_1}{6\,!}\right) + \ldots$$

Igualando-se os coeficientes de potências iguais de x, obtêm-se fàcilmente os coeficientes da nova série. Temos então

$$a_1 = 1 \qquad a_3 - \frac{a_1}{2!} = -\frac{1}{3!} \qquad \therefore\ a_3 = \frac{a_1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$a_5 - \frac{a_3}{2!} + \frac{a_1}{4!} = \frac{1}{5!} \qquad \therefore\ a_5 = \frac{a_3}{2!} - \frac{a_1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{2}{15}$$

E em geral

$$a_{2n} + 1 = \frac{a_{2n-1}}{2!} - \frac{a_{2n-3}}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\, \frac{a_1}{(2n)!} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

Assim obtemos a série

$$(2,2)\quad \tan. x = x + \frac{1}{3}\, x^3 + \frac{2}{15}\, x^5 + \frac{17}{315}\, x^7 + \ldots$$

Para cot. x, de sua definição

$$\cot. x = \frac{\cos. x}{\text{sen}. x},$$

válida para $x \neq n\pi$ com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, resulta que não é possível seu desenvolvimento em série de potências de x. Pode-se superar essa dificuldade pela consideração da função $H(x) = x \cot. x$, para $x \neq 0$, $H(0) = 1$. Como

$$\lim_{x \to 0} x \cot. x = 1,$$

a função H (x) é contínua em todo o intervalo $-\pi \text{———} \pi$ e pode ser desenvolvida em série de potências de x. Como essa função é par, isto é, como $H(-x) = H(x)$, a série correspondente terá nulos todos os coeficientes de potências ímpares de x. E vem

$$(2{,}3)\quad H(x) = b_0 + b_2x^2 + b_4x^4 + \ldots$$

Para $x \neq 0$ temos então

$$(2{,}4)\quad x \cos. x = \text{sen}. x\,(b_0 + b_2x^2 + b^4x^4 + \ldots).$$

E como essa igualdade vale também para $x = 0$, ela é válida em todo o intervalo $\pi \text{—} \pi$, e permite calcular fàcilmente, à semelhança do que fizemos no caso anterior, os coeficientes b_0, b_2, etc., para os quais se obtém

$$b_0 = 1,\ b_2 = -\frac{1}{3},\ b_4 = -\frac{1}{45},\ b_6 = -\frac{2}{945},$$

e em geral

$$b_{2n} = \frac{b_{2n-2}}{3!} - \frac{b_{2n-4}}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{b_0}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

Portanto temos

$$(2{,}4)\quad H(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 - \ldots$$

Qual será, porém, o raio de convergência dessas séries? Para resolver essa questão buscaremos, nos capítulos 4 e 5, um outro desenvolvimento em série para as funções em questão. Para a compreensão do quarto capítulo precisamos antes, porém, demonstrar uma desigualdade de grande importância, o que será feito a seguir.

3 — A DESIGUALDADE DE JORDAN

E' conhecida por êsse nome a desigualdade

$$\text{(3,1)} \qquad \text{sen.}\, x \geqq \frac{2}{\pi} x ,$$

válida para $\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq 0$. Para ela há numerosas demonstrações (1), mas entre tôdas preferimos a seguinte, que nos foi indicada pelo Prof. Hélio Penteado de Castro.

Se tomarmos $t = \text{sen.}\, x$, (3,1) se transforma em

$$t \geqq \frac{2}{\pi} \text{ arc sen. } t,$$

ou ainda

$$\text{(3,2)} \qquad \text{arc sen. } t \leqq \frac{\pi}{2} t$$

Mas é bem conhecido o desenvolvimento em série

$$\text{(3,3)} \quad \text{arc sen. } t = t + \frac{1}{2}\,\frac{t^3}{3} + \frac{1.\,3}{2.\,4}\,\frac{t^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{t^7}{7} + \ldots +$$

$$+ \frac{1\;\; 3.\; 5\ldots\; (2n-1)}{2.\; 4.\; 6\ldots\; 2n}\,\frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Essa série converge, como se prova fàcilmente, para $-1 \leqq t \leqq 1$. Dela concluímos para $t = 1$ que

---

1 — Ver, por exemplo, **Whittaker** e **Watson** [6, p. 115] ou **Copson** [1, p. 136].

$$(3,4) \quad \text{arc sen. } 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{7} + \ldots +$$

$$+ \frac{1.\ 3.\ 5 \ldots (2n-1)}{2.\ 4.\ 6 \ldots 2n}\,\frac{1}{2n+1} + \ldots$$

Ora, de (3,3) resulta que

$$(3,5) \quad \text{arc sen. } t = t \left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{t^2}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{t^4}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{t^6}{7} + \ldots + \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n}\,\frac{t^{2n}}{2n+1} + \ldots \right]$$

Então para $0 < t < 1$ temos, evidentemente, como se vê pela comparação de (3,4) com (3,5),

$$\text{arc sent. } t < \frac{\pi}{2}\, t\,.$$

Daí resulta que

$$x < \frac{\pi}{2}\ \text{sen.} x\,,$$

ou

$$\text{sen.} x > \frac{2}{\pi}\, x$$

para $0 < x < \frac{\pi}{2}$. E como para $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$ temos

$$\text{sen}\, x = \frac{2}{\pi}\, x\,,$$

fica (3,1) demonstrada. Entretanto, como para $\frac{\pi}{2} \geq x \geq 0$ temos ainda $x \geq$ sen. x, podemos escrever com x tomado nesse intervalo

$$x \geq \text{sen.} x \geq \frac{2}{\pi}\, x\,.$$

4 — O DESENVOLVIMENTO DE COT. x E TAN. x EM SÉRIE DE FRAÇÕES PARCIAIS

Sabemos da fórmula de Moivre(2) que

$$(\cos. t + i \operatorname{sen}. t)^m = \cos. mt + i \operatorname{sen}. mt.$$

Suporemos **m** um número inteiro e positivo. Igualando os coeficientes de **i** em ambos os membros depois de divididos por sen. t (o que exige $t \neq k\pi$, com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) vem

$$(4{,}1) \qquad \frac{\operatorname{sen}. m t}{\operatorname{sen}. t} = \binom{m}{1} \cos.^{2n} t - \binom{m}{3} \cos.^{2n-2} t \operatorname{sen}.^2 t + \ldots + (-1)^n \binom{m}{2n+1} \operatorname{sen}^{2n} t ,$$

sendo $m = 2n + 1$, portanto um número ímpar.

Seja $z = \operatorname{sen}.^2 t$. Então o segundo membro de (4,1) será um polinômio em **z** de grau **n**. Mas o primeiro membro se anula para

$$t_1 = \frac{\pi}{m} , \quad t_2 = 2 \frac{\pi}{m} , \quad \ldots \quad t_n = \frac{\pi}{m} .$$

Logo as **n** raízes do segundo membro são

$$r_1 = \operatorname{sen}.^2 \frac{\pi}{m} , \quad r_2 = \operatorname{sen}.^2 2 \frac{\pi}{m} , \ldots , \quad r_n = \operatorname{sen}.^2 n \frac{\pi}{m} .$$

Nessas condições o 2º. membro poderá ser fatorado como se segue

$$\frac{\operatorname{sen}. m t}{m \operatorname{sen}. t} = \left(1 - \frac{z}{r_1}\right) \left(1 - \frac{z}{r_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{z}{r_n}\right) ,$$

pois ambos os membros têm o mesmo limite 1 quando $t \longrightarrow 0$.

---

2 — Esta demonstração foi adaptada de **La Vallée Poussin** [3, 2º. vol., pp. 63-67] mas aproveitamos também muitos detalhes dados por**Knopp** [2, pp. 194-200].

Indicando-se por L o logarítmo natural ou neperiano e supondo-se

$$t = \frac{x}{m}, \text{ e ainda } -\pi < x < \pi \text{ , vem}$$

$$L \frac{\text{sen } x}{m \text{ sen } \frac{x}{m}} = \sum_{k=1}^{n} L \left(1 - \frac{\text{sen}^2 \frac{x}{m}}{r_k}\right)$$

Exige-se aí implicitamente que tenhamos

$$\frac{\text{sen.}^2 \frac{x}{m}}{r_k} = \frac{\text{sen.}^2 \frac{x}{m}}{\text{sen.}^2 \frac{k\pi}{m}} < 1,$$

isto é, que seja

$$\text{sen}^2 \frac{k\pi}{m} - \text{sen}^2 \frac{x}{m} > 0 .$$

Ora, para $-\pi < x < \pi$ isso sempre é possível, desde que se tome **m** suficientemente grande. E se pode até determinar um número N tal que para todo $m > N$ tenhamos

$$\text{sen.}^2 \frac{k\pi}{m} - \text{sen.}^2 \frac{x}{m} > \text{sen.}^2 \frac{k\pi}{m} - \frac{x^2}{m^2} > 0 .$$

Suporemos sempre satisfeita esta última condição.
Seja $1 < p < n$ e poderemos escrever

$$L \frac{\text{sen } x}{m \text{ sen } \frac{x}{m}} = \sum_{k=1}^{p} L \left(1 - \frac{m^2 \text{ sen}^2 \frac{x}{m}}{m^2 \text{ sen}^2 \frac{k\pi}{m}}\right) + R_p ,$$

em que R_p indica a soma dos têrmos restantes.

Sabemos que para $-1 < x \leqq 1$ temos

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^n}{n} - \ldots$$

Logo concluimos que

$$|L(1+x)| < x$$

E para $-1 \leqq x < 1$ temos então

$$|L(1-x)| = \left|L\left(1+\frac{x}{1-x}\right)\right| < \frac{x}{1-x}.$$

Podemos portanto escrever

$$Z_k = \left| L\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{m}}\right) \right| < \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{m}}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{m}}}$$

$$\therefore Z_k < \frac{\dfrac{x^2}{m^2}}{\operatorname{sen}^2 \dfrac{k\pi}{m} - \dfrac{x^2}{m^2}} = \frac{x^2}{m^2} \; \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \dfrac{k\pi}{m} - \dfrac{x^2}{m^2}}$$

Mas para $\frac{1}{2} \geqq \frac{k}{m} \geqq 0$ temos pela desigualdade de Jordan

$$\operatorname{sen}\frac{k\pi}{m} \geqq \frac{2}{\pi}\,\frac{k\pi}{m} = \frac{2k}{m}.$$

Como o maior valor de **k** é $n = \frac{m-1}{2}$, segue-se que esta desigualdade é sempre aplicável.

Portanto temos ainda

$$Zk < \frac{x^2}{m^2} \cdot \frac{1}{\frac{4k^2}{m^2} - \frac{x^2}{m^2}} = \frac{x^2}{4k^2 - x^2} < \frac{x^2}{4(k^2 - r^2)}$$

sendo $r = |x|$. Para **k** suficientemente grande em relação **r** o leitor verifica que

$$(k^2 - r^2) > (k - r)^2 > (k-r-1)(k-r)$$

Logo temos, nessas condições

$$Z_k < \frac{x^2}{4} \frac{1}{(k-r-1)(k-r)} = \frac{x^2}{4} \left(\frac{1}{k-r-1} - \frac{1}{k-r}\right)$$

E então vem

$$|R_p| = \left| \sum_{k=+1}^{n} Z_k \right| < \frac{x^2}{4(p-r)} .$$

E agora conclui-se logo que $\lim_{p \to 0} R_p = 0.$

Mas como $m > p$, se **p** tende para infinito o mesmo acontece com **m** . E então

$$\lim_{m \to \infty} m \operatorname{sen} \frac{x}{m} = \lim_{m \to \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{m}}{\frac{1}{m}} = x$$

E fica portanto

$$L \frac{\text{sen.}x}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} L \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

$$\therefore L \,\text{sen.}\, x = L\, x + \sum_{k=1}^{\infty} L \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right) .$$

Esta série nos dá por derivação

$$(4,2)\quad \cot. x = \frac{\pi}{x} - 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \pi^2 - x^2}$$

Esta derivação é lícita para todo $x \neq k\pi$, com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, pois a série derivada é então absoluta e uniformemente convergente em todo intervalo que não inclua um dos pontos excluídos. Essa conclusão sôbre a convergência da série resulta de que a relação entre seu têrmo geral para o têrmo geral da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

tem limite 1 quando $k \to \infty$.

De (4,2) resulta

$$(4,3)\quad x \cot. x = 1 - 2x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \pi^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2},$$

que vale para $-\pi < x < \pi$, desde que, consideremos no 1º. membro a função continua $f(x) = x \cot x$ para $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

Mas

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

para $-1 < x < 1$.

Portanto para $-\pi < x < \pi$ temos para $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$(4,4)\quad \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2} = 1 + \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2 + \left(\frac{x}{k\pi}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{x}{k\pi}\right)^{2n} + \ldots$$

A convergência absoluta de (4,3) nos permite substituir lá o 1º. membro de (4,4) pelo segundo e modificar a ordem dos têrmos até obter

$$(4,5)\quad x\cot.x = 1 - \frac{2x^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right) - $$

$$- \frac{2x^4}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right) - \ldots -$$

$$- \frac{2x^{2n}}{\pi^{2n}}\left(\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots\right) - \ldots$$

Seja

$$S_{2n} = \frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots$$

e a comparação de (4,5) com (2,2) nos mostra que

$$b_0 = 1\ ,\ b_2 = -\frac{2}{\pi^2}S_2\ ,\ b_4 = -\frac{2}{\pi^4}S_4\ ,\ \ldots\ ,$$

$$b_{2n} = -\frac{2}{\pi^{2n}}S_{2n}$$ e portanto

$$(4,6)\quad x\cot.x = 1 - \frac{2x^2}{\pi^2}S_2 - \frac{2x^4}{\pi^4}S_4 - \ldots - \frac{2x^{2n}}{\pi^{2n}}S_{2n} - \ldots$$

Evidentemente

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = 1.$$

Logo a aplicação do teste de convergência de Cauchy nos dá logo

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{|b_{2n}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sqrt[2n]{|2.\ S_{2n}|} = \frac{1}{\pi}$$

de onde se conclui que o raio de convergência da série é π, isto é, que (2,3) converge para $-\pi < x < \pi$.

Sabemos que

$$2 \cot 2x = 2 \frac{\cos 2x}{\text{sen } 2x} = \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\text{sen } x \cos x} = \cot x - \tan x$$

Logo

$$x \tan. x = x \cot. x - 2 x \cot 2 x,$$

e (4,5) nos dá, com $|\ 2x\ | < \pi$,

$$x \tan. x = \frac{2x^2 S_2}{\pi^2} (2^2 - 1) + \frac{2x^4 S_4}{\pi^4} (2^4 - 1) + \ldots + + \frac{2x^{2n} S_{2n}}{\pi^{2n}} (2^{2n} - 1) + \ldots$$

$$(4{,}7) \therefore \tan. x = \frac{2x \ S_2}{\pi^2} (2^2 - 1) + \frac{2x^3 \ S_4}{\pi^4} (2^4 - 1) + \ldots + + \frac{2x^{2n-1} \ S_{2n}}{\pi^{2n}} (2^{2n} - 1) + \ldots$$

A comparação de (4,6) com (2,1) nos mostra que

$$a_{2n-1} = \frac{2 \ S_{2n}}{\pi^{2n}} (2^{2n} - 1),$$

de onde se conclui fácilmente que a série (2,1) converge, como já se podia prever, para

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

5 — UMA APLICAÇÃO DO CÁLCULO DOS RESÍDUOS

Se o leitor estiver familiarizado com o Cálculo dos Resíduos, o desenvolvimento de x cot. x em série de frações parciais se tornará muito mais simples e direto. Basta para isso considerar a função $f(Z) = \cot. Z - \frac{1}{Z}$ para $Z \neq o$, $f(o) = 1$

e tomar para contornos C_n os quadrados de vértices $(n + \frac{1}{2})$ $(\pm 1 \pm i)$. Prova-se então que a essa função se pode aplicar a conhecida fórmula (3)

$$f(Z) = f(o) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{Z - a_k} \right),$$

em que a_k $(k = 1,2, \ldots)$ indica os polos simples de $f(Z)$ e b_k, os respectivos resíduos. Verifica-se logo que

$$a_k = n\pi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$b_k = 1$$

E vem

$$f(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k\pi} + \frac{1}{Z - k\pi} + \frac{1}{-k\pi} + \frac{1}{Z + k\pi} \right)$$

$$= -2Z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \pi^2 - Z^2} .$$

$$\therefore Z \cot Z = 1 - 2Z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \pi^2 - Z^2} .$$

6 — UMA FÓRMULA IMPORTANTE

Vimos antes [1, p. 121] que

$$(6,1) \quad {}_a^x D^{\Theta} f(t) = {}_b^x D^{\Theta} f(t) + \frac{1}{\Gamma(-\Theta)} \int_a^b (x-t)^{-\Theta-1} f(t)dt .$$

Entretanto, como essa fórmula foi dada sem demostração, não é demais por certo procurar prová-la agora.

---

3 — Ver, por exemplo, **Copson** [1, pp. 144-148] ou **Phillips** [5, pp. 131-133].

Seja $f > x > b > a > d$ e seja ainda f (t) uma função definida e restrita em $d \mapsto f$. Por definição, o derigral de ordem Θ no ponto x a partir de a da função f (t) é o limite da expressão

$$k^{-\Theta} \sum_{i=o}^{N} (-1)^{i} \binom{\Theta}{i} f\left[x + (\Theta - i)h\right],$$

quando $N \longrightarrow \infty$, sendo $k = \dfrac{x-a}{N}$ e h um infinitésimo com $\dfrac{1}{N}$ equivalente a k. E escrevemos então

$$_{a}^{x}D^{\Theta} f(t) = \lim_{N\to\infty} k^{-\Theta} \sum_{i=o}^{N} (-1)^{i} \binom{\Theta}{i} f[x+(\Theta-i\, h]$$

Seja Q um número natural tal que tenhamos

(6,2) $\quad x + (\Theta - Q)h \geq b > x + (\Theta - Q - 1)\, h.$

Podemos escrever que

$$(6{,}3) \quad _{a}^{x}D^{\Theta} f(t) = \lim_{N\to\infty} k^{-\Theta} \sum_{i=o}^{Q} (-1)^{i} \binom{\Theta}{i} f[x+(\Theta-i)h] +$$

$$+ \lim_{N\to\infty} k^{-\Theta} \sum_{i=Q+1}^{N} (-1)^{i} \binom{\Theta}{i} f[x+(\Theta-i)h]$$

De (6,1) obtemos logo

$$(6{,}4) \quad x + (\Theta - Q)\, \frac{x-a}{N} \cdot \frac{h}{k} \geq b > x + (\Theta - Q - 1)\, \frac{x-a}{N} \cdot \frac{h}{k}$$

Agora se $N \longrightarrow \infty$, evidentemente Q também tende para infinito. Passando-se ao limite, (6,4) nos dá logo

$$(6{,}5) \quad \lim_{N\to\infty} \frac{Q}{N} = \frac{x-b}{x-a}.$$

Logo $\dfrac{x-b}{Q}$ e $k = \dfrac{x-a}{N}$ são infinitésimos equivalentes.

Segue-se que

$$(6,6)\quad \lim_{N\to\infty} k^{-\Theta} \sum_{i=o}^{Q} (-1)^{i} \binom{\Theta}{i} f\,[x + (\Theta-i)h] =$$

$$= \lim_{Q\to\infty} \left(\frac{x-b}{Q}\right)^{-\Theta} \sum_{i=o}^{Q} (-1)^{i} \binom{\Theta}{i} f\,[x + (\Theta-i)h]$$

$$= {}_{b}^{x}D^{\Theta} f(t) .$$

Resta discutir o segundo têrmo do segundo membro de (6,3). Temos

$$Y = \lim_{N\to\infty} k^{-\Theta} \sum_{i=Q+1}^{N} (-1)^{i} \binom{\Theta}{i} f\,[x + (\Theta-i)h]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{N}{x-a}\right)^{\Theta} \sum_{i=1}^{N-Q} (-1)^{Q+i} \binom{\Theta}{Q+i} f[x+(\Theta-Q-i)h]$$

Mas como sabemos [1, p. 18]

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(-1)^{N}\binom{a}{N}}{\dfrac{N^{-a-1}}{\Gamma(-a)}} = 1$$

Logo temos

$$Y = \lim_{N\to\infty} \frac{(x-a)^{-\Theta}}{\Gamma(-\Theta)} \sum_{i=1}^{N-Q} N^{\Theta} (Q+i)^{-\Theta-1} f[x+(\Theta-Q-i)h]$$

$$= \frac{(x-a)^{-\Theta}}{\Gamma(-\Theta)} \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{NQ} \frac{f[x+(\Theta-Q-i)h]}{\left(\frac{Q}{N}+\frac{i}{N}\right)^{\Theta+1}} \cdot \frac{1}{N}$$

$$= \frac{(x-a)^{-\Theta}}{\Gamma(-\Theta)} \int_0^A \frac{f[b-(x-a)y]}{\left(\frac{x-b}{x-a}+y\right)^{\Theta+1}} dy\ ,$$

$$\text{onde } A = \frac{b-a}{x-a}\ .$$

Se aí fizermos $y = \dfrac{b-t}{x-a}$ teremos

$$Y = \frac{1}{\Gamma(-\Theta)} \int_a^b (x-t)^{-\Theta-1} f(t)\,dt\ .$$

E assim fica (6,1) demonstrada para o caso de $x > b > a$. Mas para $x > a > b$ teríamos então

$${}_b^x\mathrm{D}^{\Theta} f(t) =$$

$$= {}_a^x\mathrm{D}^{\Theta} f(t) + \frac{1}{\Gamma(-\Theta)} \int_b^a (x-t)^{-\Theta-1} f(t)\,dt,$$

$$\therefore\ {}_a^x\mathrm{D}^{\Theta} f(t) =$$

$$= {}_b^x\mathrm{D}^{\Theta} f(t) + \frac{1}{\Gamma(-\Theta)} \int_a^b (x-t)^{-\Theta-1} f(t)\,dt,$$

Portanto a fórmula continua válida, mas com a condição não já apenas da existência do derigral a partir de a, mas também da integrabilidade de f (t) em $b \mapsto a$.

Esta fórmula nova é de aplicação constante na derigração.

7 — A DERIGRAÇÃO DE TAN. x e COT x

Já sabemos que

$$\tan x = a_1 x + a_3 x^3 + \dots + a_{2n+1} x^{2n+1} + \dots ,$$

$$\cot. x = \frac{b_0}{x} + b_2 x + b_4 x^3 + \dots + b_{2n} x^{2n-1} + \dots ,$$

sabemos calcular os coeficientes dessas séries e conhecemos seus intervalos de convergência. Podemos então derigrá-las e obtemos [4]:

$$\mathop{{}_{o}\mathrm{D}^{\Theta}}^{x} \tan. t = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \Theta \end{bmatrix} x^{1-\Theta} + a_3 \begin{bmatrix} 3 \\ \Theta \end{bmatrix} x^{3-\Theta}$$

$$+ \dots + a_{2n+1} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ \Theta \end{bmatrix} x^{2n+1-\Theta} + \dots$$

$$\text{para} \; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Portanto podemos aplicar (6,1) e vem

$$\mathop{{}_{a}\mathrm{D}}^{x} \tan. t = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \Theta \end{bmatrix} x^{1-\Theta} + a_3 \begin{bmatrix} 3 \\ \Theta \end{bmatrix} x^{3-\Theta} + \dots +$$

$$+ a_{2n+1} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ \Theta \end{bmatrix} x^{2n+1-\Theta} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(-\Theta)} \int_a^o (x-t)^{-\Theta\, 1} \tan t.\, dt ,$$

4 — Ver [4, pp. 85-87, 104-107].

onde temos $-\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}$. A periodicidade de tan. x nos poupa o trabalho de discutir o derigral noutros intervalos.

Para a co-tangente, se nos lembrarmos de que $b_0 = 1$, poderemos escrever

$$\cot. x = \frac{1}{x} + b_2 x + b_4 x^3 + \dots + b_{2n} x^{2n-1} + \dots$$

Portanto para $o < a < x$, temos

$$ {}_a^x D^{\Theta} (\cot. t - \frac{1}{t}) = {}_o^x D^{\Theta} (\cot t - \frac{1}{t}) +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(-\Theta)} \int_a^o (x-t)^{-\Theta-1} (\cot t - \frac{1}{t})\, dt .$$

Segue-se que

$$ {}_a^x D^{\Theta} \cot. t = \frac{Lx - La}{(x-a)^{\Theta+1}\Gamma(-\Theta)} + \frac{g(\Theta+1,x)}{(x-a)^{\Theta+1}} +$$

$$+ b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \Theta \end{bmatrix} x^{1-\Theta} + b_4 \begin{bmatrix} 3 \\ \Theta \end{bmatrix} x^{3-\Theta} + \dots +$$

$$+ b_{2n} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ \Theta \end{bmatrix} x^{2n-1-\Theta} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(-\Theta)} \int_a^o (x-t)^{-\Theta-1} f(t)\, dt ,$$

com $f(t) = \cot. t - \dfrac{1}{t}$, para $t \neq 0$, $f(0) = 0$.

8 — UM PEQUENO APÊNDICE

Não podemos deixar de observar ao leitor que os desenvolvimentos de tan. x e cot. x estão estreitamente relacionados com os chamados números de Bernoulli, sôbre os quais não falamos antes por ser a sua introdução uma complicação inútil no que acabamos de expor. (5)

A comparação de (4,5) com (2,4) nos mostra que

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{k^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90},$$

e de u'a maneira geral

$$S_{2n} = -\frac{\pi^{2n} \quad b_{2n}}{2}.$$

Isto nos permite obter fàcilmente as somas das séries do tipo

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

conhecidas por séries harmônicas, no caso de **p** ser um número par. Mas quando p $>$ 1 é impar, nada se sabe ainda sôbre a sua soma.

Para as funções sec. x e csc. x, que ainda falta discutir, as fórmulas

$$\text{csc. } x = \text{cot. } x + \text{tan. } \frac{x}{2}$$

---

5 — O leitor interessado poderá consultar as obras de **La Vallée Poussin** [3, 2º. vol. pp. 68-71] e **Knopp** [2, pp. 175, 195-200, 230-234].

$$\sec. x = \csc. \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

nos permitem a redução aos casos já conhecidos.

O desenvolvimento de cot. x em frações parciais pode também ser obtido de modo simples e elegante por meio das séries de Fourier. O leitor interessado encontrará no livro de COURANT [7, 1.º vol., p. 444] a demonstração correspondente.

9 — BIBLIOGRAFIA CITADA

[1] — COPSON, E. T. — An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable. Oxford University Press. Londres. 1944.

[2] — KNOPP, K. Theorie und Anwendung der Unendlichen Reihen. Julius Springer. Berlim. 1922.

[3] — LA VALLÉE POUSSIN, Ch. de — Cours d'Analyse Infinitésimale. Lib. Universitaire. Louvain. 1938.

[4] — PIMENTEL GOMES, Frederico — Introdução ao Estudo dos Derigrais. Piracicaba. 1948.

[5] — PHILLIPS, E. G. — Functions of a Complex Variable. Oliver and Boyd Ltd. Edinburgo e Londres. 1946.

[6] — WHITTAKER, E. T. e WATSON, G. N. — A Course of Modern Analysis. The Macmillan Co. Nova York. 1944.

[7] — COURANT, R. — Differential and Integral Calculus. 2 vols. Blackie and Son Limited. Londres e Glasgow. 1943.