DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
(Diretor: **Prof. Dr. Pedro Egydio de Oliveira Carvalho**)

EM TÔRNO DO MÉTODO DAS SOMAS PARA DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS

G. GARCIA DUARTE
Assistente

1 — O presente trabalho tem por finalidade precípua dar maior divulgação, entre nós, do método das somas para determinação dos momentos.

Na confecção da parte teórica, que acreditamos haver abordado sob um ponto de vista mais geral, baseamo-nos principalmente no livro de Risser e Traynard "Les principes de la Statistique Mathématique", onde o assunto é bastante bem tratado, embora apareçam aqui e ali alguns senões imputáveis à impressão.

2 — Sejam $x_i = i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ os valores de uma variável com freqüências respectivas f_i $(\Sigma f_i = N)$. Esta hipótese não é por demais restritiva, visto como, em distribuições de freqüências por intervalos iguais da variável classificadora (X), definindo-se a variável

$$x_i = \frac{X_i - A_o}{t} \qquad (1)$$

(em que X_i são os pontos médios das diversas classes, A_o o ponto médio de uma classe hipotética anterior à primeira, tomada como origem, e t o intervalo de classe) recaímos no caso anterior.

Ora, desde que de (1) segue $X_i = t . x_i + A_o$ e que se pode fàcilmente determinar os momentos $m_k^{(A)}$ de X em tôrno de uma origem arbitrária A por meio dos momentos $\mu_k^{(a)}$ da variável x_i em tôrno de uma origem também arbitrária, pela conhecida relação:—

$$m_k^{(A)} = \sum_{i=o}^{k} \binom{k}{i} . t^{k-i} . \mu_{k-i}^{(a)} . (a . t + A_o - A)^i$$

então, é claro que todo método que permita determinar os $\mu_k^{(a)}$ apresentará grande utilidade no cômputo dos $m_k^{(A)}$.

3 — Isto pôsto, passemos a desenvolver os fundamentos do método das somas para a determinação dos momentos da distribuição definida por: — (i, f_i).

Sejam

$$S_j^{(o)} = \sum_{k=1}^{j} f_{n-j+k} \qquad S_j^{(1)} = \sum_{k=1}^{j} S_k^{(o)}$$

$$S_j^{(2)} = \sum_{k=1}^{j} S_k^{(1)} \qquad S_j^{(p)} = \sum_{k=1}^{j} S_k^{(p-1)}$$

Subsistindo:—

$$S_j^{(p)} = \sum_{k=1}^{j-1} S_k^{(p-1)} + S_j^{(p-1)}$$

e tendo-se:—

$$\sum_{k=1}^{j-1} S_k^{(p-1)} = S_{j-1}^{(p)}$$

vale, então, a relação de recorrência:

$$S_j^{(p)} = S_{j-1}^{(p)} + S_j^{(p-1)}$$

Pelas definições dadas resulta claramente o modo de formação dos diversos S's: — os de índice superior 0 são constituidos pelas freqüências acumuladas da distribuição originária, procedendo-se, porém, de baixo para cima, isto é, iniciando-se por f_n e fazendo, a seguir, sub-totais por acréscimos, um de cada vez, dos valores de f_{n-1}, f_{n-2}, ..., f_2, f_1; os de índice 1 são obtidos operando-se sôbre os $S^{(o)}$ do mesmo modo como se fêz com as freqüências; os de índice 2 são obtidos da mesma maneira operando-se sôbre os $S^{(1)}$ e assim por diante.

4 — Todo o fundamento do método das somas repousa na possibilidade óbvia de se poder exprimir os S's em função dos f_i; tal relação é consubstanciada pelo teorema abaixo, que passamos a demonstrar:—

Teorema: $$S_j^{(p)} = \sum_{k=1}^{j} \binom{p+k-1}{p} \cdot f_{n-j+k}$$

Verifiquemos, antes de tudo, que o teorema é válido para $p = 0, 1, 2$. Com efeito, para $p = 0$, tem-se, imediatamente, da definição:—

$$S_j^{(o)} = \sum_{k=1}^{j} f_{n-j+k} = \sum_{k=1}^{j} \binom{k-1}{o} \cdot f_{n-j+k}$$

e, em particular:—

$$S_n^{(o)} = \sum_{k=1}^{n} \binom{k-1}{o} \cdot f_k$$

Para $p = 1$, tem-se:—

$$S_j^{(1)} = \sum_{k=1}^{j} S_k^{(o)} = \sum_{k=1}^{j} \sum_{h=1}^{j} \binom{h}{o} \cdot f_{n-k+h}$$

Desenvolvendo as somatórias, vem:—

$$\begin{array}{lll}
k=1, & h=1 & \binom{1}{o} \cdot f_n + \\
k=2, & h=2,\ 1 & + \binom{2}{o} \cdot f_n + \binom{1}{o} \cdot f_{n-1} + \\
k=3, & h=3,\ 2,\ 1 & + \binom{3}{o} \cdot f_n + \binom{2}{o} \cdot f_{n-1} + \binom{1}{o} \cdot f_{n-2} + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
k=j-1, & h=j-1,\ \ldots,\ 1 & + \binom{j-1}{o} \cdot f_n + \binom{j-2}{o} \cdot f_{n-1} + \ldots + \binom{1}{o} \cdot f_{n-j+2} + \\
k=j & h=j,\ j-1,\ \ldots,\ 1 & + \binom{j}{o} \cdot f_n + \binom{j-1}{o} \cdot f_{n-1} + \ldots + \binom{1}{o} \cdot f_{n- +1}
\end{array}$$

o que permite escrever, somando por colunas:—

$$S_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{j} \binom{i}{o} . f_n + \sum_{i=1}^{j-1} \binom{i}{o} . f_{n-1} + \sum_{i=1}^{j-2} \binom{i}{o} . f_{n-2} + \ldots + \sum_{i=1}^{2} \binom{i}{o} . f_{n-j+2} + \sum_{i=1}^{1} \binom{i}{o} \cdot f_{n-j+1}$$

e, portanto:—

$$S_j^{(1)} = \sum_{k=1}^{j} \binom{k}{1} \cdot f_{n-j+k}$$

Em particular:—

$$S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} . f_k$$

Finalmente, para p = 2, tem-se, de acôrdo com o resultado anterior:—

$$S_j^{(2)} = \sum_{k=1}^{j} S_k^{(1)} = \sum_{k=1}^{j} \sum_{h=1}^{k} \binom{h}{1} . f_{n-k+h}$$

Desenvolvendo as somatórias, vem:—

$$\begin{array}{lll}
k = 1, & h = 1 & \binom{1}{1} . f_n + \\
k = 2, & h = 2, 1 & + \binom{2}{1} . f_n + \binom{1}{1} . f_{n-1} + \\
k = 3, & h = 3, 2, 1 & + \binom{3}{1} . f_n + \binom{2}{1} . f_{n-1} + \binom{1}{1} . f_{n-2} + \\
\multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
k = j-1 & h = j-1, \ldots, 1 & + \binom{j-1}{1} f_n + \binom{j-2}{1} . f_{n-1} + \ldots + \binom{1}{1} . f_{n-j+2} + \\
k = j & h = j, \ldots, 1 & + \binom{j}{1} . f_n + \binom{j-1}{1} . f_{n-1} + \ldots + \binom{1}{1} . f_{n-j+1}
\end{array}$$

o que permite escrever somando por colunas:—

$$S_j^{(2)} = \sum_{i=1}^{j} \binom{i}{1} . f_n + \sum_{i=1}^{j-1} \binom{i}{1} . f_{n-1} + \ldots + \sum_{i=1}^{2} \binom{i}{1} . f_{n-j+2} + \sum_{i=1}^{1} \binom{i}{1} . f_{n-j+1}$$

e, portanto:—

$$S_j^{(2)} = \sum_{k=1}^{j} \binom{k+1}{2} . f_{n-j+k}$$

Em particular:—

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} \binom{k+1}{2} . f_k$$

Suponhamos, agora, que o teorema é válido para m—1, isto é, que:—

$$S_j^{(m-1)} = \sum_{k=1}^{j} \binom{k+m-2}{m-1} . f_{n-j+k}$$

e vamos provar que êle é verdadeiro para m.

Desta hipótese, segue, tendo-se em vista a definição:—

$$S_j^{(m)} = \sum_{k=1}^{j} S_k^{(m-1)} = \sum_{k=1}^{j} \sum_{h=1}^{k} \binom{h+m-2}{m-1} . f_{n-k+h}$$

Desenvolvendo as somatórias, vem:—

$$S_j^{(m)} = \binom{m-1}{m-1} . f_n +$$

$$+ \binom{m}{m-1} . f_n + \binom{m-1}{m-1} . f_{n-1} +$$

$$+ \binom{m+1}{m-1} . f_n + \binom{m}{m-1} . f_{n-1} + \binom{m-1}{m-1} . f_{n-2} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \binom{m+j-2}{m-1} . f_n + \binom{m+j-3}{m-1} . f_{n-1} + \ldots + \binom{m-1}{m-1} . f_{n-j+1}$$

o que permite escrever, somando por colunas:—

$$S_j^{(m)} = \sum_{i=m-1}^{m+j-2} \binom{i}{m-1} . f_n + \sum_{i=m-1}^{m+j-3} \binom{i}{m-1} . f_{n-1} + \ldots + \sum_{i=m-1}^{m-1} \binom{i}{m-1} . f_{n-j+1}$$

e, portanto:—

$$S_j^{(m)} = \sum_{k=1}^{j} \binom{m+k-1}{m} . f_{n-j+k} \qquad \text{c. q. d.}$$

Em particular:—

$$S_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} \binom{p+k-1}{p} . f_k$$

5 — Dêste resultado segue imediatamente:—

$$S_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k.(k+1).(k+2)\ldots(k+p-1)}{p!}.f_k =$$

$$= \frac{k^p + k^{p-1}.\Sigma i_1 + k^{p-2}\Sigma i_1 i_2 + \ldots + k^{p-j}\Sigma i_1 i_2 \ldots i_j + \ldots + k\Sigma i_1 \ldots i_{p-1}}{p!} f_k$$

em que $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_j$ representa qualquer dos elementos; 1, 2, ... $(p-1)$ é a somatória contendo j fatôres i's é estendida a tôdas as combinações de ordem j, encerrando, portanto, $\binom{p-1}{j}$ têrmos.

Particularizando, temos:—

$$S_n^{(o)} = \sum_{k=1}^{n} f_k = N$$

$$S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}.f_k = \sum_{k=1}^{n} k.f_k = N.\mu_1^{(o)}$$

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2!}f_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2!}f_k = \frac{N.\mu_2^{(o)} + N.\mu_1^{(o)}}{2!}$$

$$S_n^{(3)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{3!}.f_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{1+2}{3!}.k^2 f_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{1.2}{3!}.f_k =$$

$$= \frac{N.\mu_3^{(o)} + 3.N.\mu_2^{(o)} + 2.N.\mu_1^{(o}}{3!}$$

$$S_n^{(4)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{4!}.f_k + \sum_{k=1}^{n}.k^3.\frac{1+2+3}{4!}.f_k + \sum_{k=1}^{n}k^2.\frac{1.2+1.3+2.3}{4!}.f_n +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}k.\frac{1.2.3}{4!}.f_k =$$

$$= \frac{N.\mu_4^{(o)} + 6.N.\mu_3^{(o)} + 11.N.\mu_2^{(o)} + 6.N.\mu_1^{(o)}}{4!}$$

Destas relações, resulta imediatamente:—

$$\mu_1^{(o)} = \frac{S_n^{(1)}}{N}$$

$$\mu_2^{(o)} = \frac{2 \, . \, S_n^{(2)} - S_n^{(1)}}{N}$$

$$\mu_3^{(o)} = \frac{6 \, . \, S_n^{(3)} - 6 \, . \, S_n^{(2)} + S_n^{(1)}}{N}$$

$$\mu_4^{(o)} = \frac{24 \, . \, S_n^{(4)} - 36 \, . \, S_n^{(3)} + 14 \, . \, S_n^{(2)} - S_n^{(1)}}{N}$$

Segue-se um exemplo elucidativo da aplicação do método.

VARIÁVEL	$\frac{X_i - A_o}{t}$	Freqüên-cia	$S^{(o)}$	$S^{(1)}$	$S^{(2)}$	$S^{(3)}$	$S^{(4)}$
0,75 ⊢ 1,25	1	10	3560	20818	72968	197683	455917
1,25 ⊢ 1,75	2	12	3550	17258	52150	124715	258234
1,75 ⊢ 2,25	3	56	3538	13708	34892	72565	133519
2,25 ⊢ 2,75	4	122	3482	10170	21184	37673	60954
2,75 ⊢ 3,25	5	896	3360	6688	11014	16489	23281
3,25 ⊢ 3,75	6	1717	2464	3328	4326	5475	6792
3,75 ⊢ 4,25	7	647	747	864	998	1149	1317
4,25 ⊢ 4,75	8	83	100	117	134	151	168
4,75 ⊢ 5,25	9	17	17	17	17	17	17
		3560	20818	72968	197683	455917	

$$\mu_1^{(o)} = \frac{20.818}{3.560}$$

$$\mu^{(o)} = \frac{2 \times 72968 - 20818}{3560} = \frac{125118}{3560}$$

$$\mu_3^{(o)} = \frac{6 \times 197683 - 6 \times 72968 + 20818}{3560} = \frac{125118}{3560}$$

$$\mu_4^{(o)} = \frac{24 \times 455917 - 36 \times 197683 + 14 \times 72968 - 20818}{3560} =$$

$$= \frac{4.826.154}{3560}$$

Sendo

$$X_i = t.x_i + A_o$$

$$m_1^{(o)} = \overline{X} = t \,.\, \mu_1^{(o)} + A_o = 0{,}5 \times \frac{20818}{3560} + 0{,}5 = 3{,}424$$

e tendo-se

$$A_o - \overline{X} = - t \,.\, \mu_1^{(o)}$$

vem:—

$$m_2^{(\bar{x})} = t^2 \left[\mu_2^{(o)} - (\mu_1^{(o)})^2 \right] = 0{,}25 \left[\frac{125118}{3560} - \frac{20818^2}{3560^2} \right] = 0{,}237$$

$$m_3^{(\bar{x})} = t^3 \left[\mu_3^{(o)} - 3\, \mu_2^{(o)} . \mu_1^{(o)} + 2.(\mu_1^{(o)})^3 \right] =$$

$$= 0{,}5^3 \left[\frac{769108}{3560} - 3 \,.\, \frac{125118}{3560} \times \frac{20818}{3560} + 2 \times \frac{20818^3}{3560^3} \right] = - 0{,}073$$

$$m_4^{(\bar{x})} = t^4 \left[\mu_4^{(o)} - 4.\mu_3^{(o)} . \mu_1^{(o)} + 6\,(\mu_2^{(o)}) . (\mu_1^{(o)})^2 - 3\,(\mu_1^{(o)})^4 \right] =$$

$$= 0{,}5^4 \left[\frac{4826154}{3560} - 4 \frac{769198}{3560} \times \frac{20818}{3560} + 6 \left(\frac{125\ 18}{3560} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{20818}{3560} \right)^2 - 3 \left(\frac{20818}{3560} \right)^4 \right] = 0{,}322$$

6 — Tal como foi desenvolvido, o método das somas pode apresentar o inconveniente de se ter que manejar com valores consideràvelmente elevados.

E' claro que esta desvantagem depende essencialmente da ordem de grandeza das freqüências das diversas classes e do próprio número destas.

O artifício que passamos a expor visa dirimir, ao menos em parte, êste inconveniente.

7 — Suponhamos na (1) $A_o = X_k$, em que X_k é o ponto médio de uma das classes. Com isto, obtém-se uma distribuição do tipo:—

$$
\begin{array}{cccccc}
-(k-1), & -(k-2), & \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots & & n-k-1, & n-k \\
f_1 & f_2 & f_{k-2}, f_{k-1}, f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \ldots & & f_{n-1}, & f_n
\end{array}
$$

Definamos, agora, os dois grupos de somas:—

$$
j = 1, 2, \ldots, n-k \left\{ \begin{aligned}
S_j^{(o)} &= \sum_{h=o}^{j-1} f_{n-h} \\
S_j^{(1)} &= \sum_{h=1}^{j} S_h^{(o)} \\
S_j^{(2)} &= \sum_{h=1}^{j} S_h^{(o)} \\
&\vdots \\
S_j^{(p)} &= \sum_{h=1}^{j} S_h^{(p-1)}
\end{aligned} \right.
\qquad
i = 1, 2, \ldots, k-1 \left\{ \begin{aligned}
\sigma_i^{(o)} &= \sum_{h=1}^{i} f_h \\
\sigma_i^{(1)} &= \sum_{h=1}^{i} \sigma_h^{(o)} \\
\sigma_i^{(o)} &= \sum_{h=1}^{i} \sigma_h^{(1)} \\
&\vdots \\
\sigma_i^{(p)} &= \sum_{h=1}^{i} \sigma^{(p-1)}
\end{aligned} \right.
$$

Considerando-se, de um lado, que a definição dos atuais S_j coincidem com os dos S_j introduzidos em 3, visto como,

$$\sum_{k=1}^{j} f_{n-j+k} = \sum_{h=o}^{j-1} f_{n-k}$$

então, tem-se imediatamente do teorema fundamental

$$S_{n-k}^{(p)} = \sum_{h=1}^{n-k} \binom{p+h-1}{p} . f_{k+h}$$

e que, de outro lado, para se passar dos S's para os σ's basta realizar a transformação:—

$$f_{n-j} \longrightarrow f_{j+1}$$

então, tendo em vista que os coeficientes de f_n, $f_{n-1}, \dots f_{n-(j-1)}$ na expressão de $S_j^{(p)}$ são

$$\binom{p+j-1}{p}, \binom{p+j-2}{p} \dots \binom{p}{p}$$

é claro que tais valores passam a ser coeficientes de

$$f_1,\ f_2,\ \dots\ f_j$$

e, portanto,

$$\sigma_i^{(p)} = \sum_{h=1}^{i} \binom{p+i-h}{p} . f_h$$

do que segue

$$\sigma_{k-1}^{(p)} = \sum_{h=1}^{k-1} \binom{p+k-1-h}{p} . f_h$$

e realizando a substituição $\alpha = k - h$

$$\sigma_{k-1}^{(p)} = \sum_{\alpha=k-1}^{1} \binom{p+\alpha-1}{p} . f_{k-\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{k-1} \binom{p+\alpha-1}{p} . f_{k-\alpha}$$

Dos dois resultados supra segue:—

$$S_{n-k}^{(p)} + (-1)^p . \sigma_{k-1}^{(p)} = \sum_{h=1}^{n-k} \binom{p+h-1}{p} . f_{k+h} + (-1)^p \sum_{h=1}^{k-1} \binom{p+h-1}{p} . f_{k-h} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n-k} \frac{h\,(h+1)\,(h+2) \dots (h+p-1)}{p\,!} f_{k+h} + (-1)^p \sum_{h=1}^{k-1} \frac{h\,(h+1) \dots (h+p-1)}{p\,!} f_{k-h} =$$

$$= \frac{1}{p\,!} \left[\sum_{h=1}^{n-k} h^p . f_{k+h} + (-1)^p \sum_{h=1}^{k-1} h^p . f_{k-h} \right] +$$

$$+ \frac{1}{p\,!} \Sigma\, i_1 \left[\sum_{h=1}^{n-k} h^{p-1} f_{k+h} + (-1)^p \sum_{h=1}^{k-1} h^{p-1} . f_{k-h} \right] +$$

$$+ \frac{1}{p\,!} \Sigma\, i_1 i_2 \left[\sum_{h=1}^{n-k} h^{p-2} . f_{k+h} + (-1)^p \sum_{h=1}^{k-1} h^{p-2} . f_{k-h} \right] + \dots$$

$$+ \ldots + \frac{1}{p!} \Sigma i_1 i_2 \ldots i_{p-1} \left[\sum_{h=1}^{n-k} h \cdot f_{k+h} + (-1)^p \sum_{h=1}^{k-1} h \cdot f_{k-h} \right]$$

e para p = 0, 1, 2, 3 e 4:—

$$S_{n-k}^{(o)} + \sigma_{k-1}^{(o)} = N - f_k \quad \Big\} \quad N = S_{n-k}^{(o)} + \sigma_{k-1}^{(o)} + f_k$$

$$S_{n-k}^{(1)} - \sigma_{k-1}^{(1)} = N \cdot \mu_1^{(o)} \quad \Big\} \quad \mu_1^{(o)} = \frac{S_{n-k}^{(1)} - \sigma_{k-1}^{(1)}}{N}$$

$$S_{n-k}^{(2)} + \sigma_{k-1}^{(2)} = \frac{1}{2!} \left[\sum_{h=1}^{n-k} h^2 \cdot f_{k+h} + \sum_{h=1}^{k-1} h^2 \cdot f_{k-h} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[\sum_{n=1}^{n-k} h . f_{k+h} + \sum_{h=1}^{k-1} h . f_{k-h} \right] =$$

$$= \frac{N \cdot \mu_2^{(o)}}{2!} + \frac{1}{2!} \left[S_{n-k}^{(1)} + \sigma_{k-1}^{(1)} \right]$$

$$S_{n-k}^{(3)} - \sigma_{k-1}^{(3)} = \frac{1}{3!} \left[\sum_{h=1}^{n-k} h^3 \cdot f_{k+h} + \sum_{h=1}^{k-1} h^3 \cdot f_{k-h} \right] +$$

$$+ \frac{1+2}{3!} \left[\sum_{h=1}^{n-k} h^2 \cdot f_{k+h} - \sum_{h=1}^{k-1} h^2 \cdot f_{k-h} \right] +$$

$$+ \frac{1 \cdot 2}{3!} \left[\sum_{h=1}^{n-k} h \cdot f_{k+h} - \sum_{h=1}^{k-1} h \cdot f_{k-h} \right] =$$

$$= \frac{N \cdot \mu_3^{(o)}}{3!} + \frac{3}{6} \left[\sum_{h=1}^{n-k} h^2 \cdot f_{k-h} - \sum_{h=1}^{k-1} h^2 \cdot f_{k-h} \right] +$$

$$+ \frac{3}{6} \left[\sum_{h=1}^{n-k} h . f_{k-h} - \sum_{h=1}^{k-1} h . f_{k-h} \right] -$$

$$-\frac{1}{6}\left[\sum_{h=1}^{n-k} h \,.\, f_{k+h} - \sum_{h=1}^{h-1} h \,.\, f_{k-h}\right] =$$

$$= \frac{N \,.\, \mu_3^{(o)}}{3\,!} + \left[S_{n-k}^{(2)} - \sigma_{k-1}^{(2)}\right] - \frac{1}{6}\left[S_{n-k}^{(1)} - \sigma_{k-1}^{(1)}\right]$$

$$S_{n-k}^{(4)} + \sigma_{k-1}^{(4)} = \frac{1}{4\,!}\left[\sum_{h=1}^{n-k} h^4 \,.\, f_{k+h} + \sum_{h=1}^{k1} h^4 \,.\, f_{k-h}\right] +$$

$$+ \frac{1+2+3}{4\,!}\left[\sum_{h=1}^{n-k} h^3 \,.\, f_{k+h} + \sum_{h=1}^{k-1} h^3 \,.\, f_{k-h}\right] +$$

$$+ \frac{1.2+1.3+2.3}{4\,!}\left[\sum_{h=1}^{n-k} h^2 \,.\, f_{k+h} + \sum_{h=1}^{k-1} h^2 \,.\, f_{k-h}\right] +$$

$$+ \frac{1\,.\,2\,.\,3}{4\,!}\left[\sum_{h=1}^{n-k} h \,.\, f_{k+h} + \sum_{h=1}^{k-1} h \,.\, f_{k-h}\right] =$$

$$= \frac{N \,.\, \mu_4^{(o)}}{4\,!} + \frac{1}{4}\left[\left(\sum_{h=1}^{n-k} h^3 \,.\, f_{k+h} + \sum_{h=1}^{k-1} h^3 \,.\, f_{k-h}\right) +\right.$$

$$+ 3.\left(\sum_{h=1}^{n-k} h^2 \,.\, f_{k+h} + \sum_{h=1}^{k-1} h^2 \,.\, f_{k-h}\right) +$$

$$\left. + 2.\left(\sum_{h=1}^{n-k} h \,.\, f_{k+h} + \sum_{h=1}^{k-1} h \,.\, f_{k-h}\right)\right] -$$

$$- \frac{7}{24}\left[\left(\sum_{h=1}^{n-k} h^2 \,.\, f_{k+h} + \sum_{h=1}^{k-1} h^2 \,.\, f_{k-h}\right) +\right.$$

$$\left. + \left(\sum_{h=1}^{n-k} h \,.\, f_{k+h} + \sum_{h=1}^{k-1} h \,.\, f_{k-h}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{24}\left(\sum_{h=1}^{n-k} h \,.\, f_{k+h} + \sum_{h=1}^{k-1} h \,.\, f_{k-h}\right)$$

$$S_{n-k}^{(4)} + \sigma_{k-1}^{(4)} = \frac{N.\mu_4^{(o)}}{4\,!} + \frac{3}{2}\left(S_{n-k}^{(3)} + \sigma_{k-1}^{(3)}\right) - \frac{7}{12}\left(S_{n-k}^{(2)} + \sigma_{k-1}^{(2)}\right) + \frac{1}{24}\left(S_{n-k} + \sigma_{-}\right)$$

8 — Segue-se um exemplo elucidativo da aplicação do método.

$\frac{X_i - X_k}{t}$	Freqüência	$\sigma^{(0)}$	$\sigma^{(1)}$	$\sigma^{(2)}$	$\sigma^{(3)}$	$\sigma^{(4)}$
—4	10	10	10	10	10	10
—3	12	22	32	42	52	62
—2	56	78	110	152	204	266
—1	122	200	310	462	666	932
Total	200	310	462	666	932	
0	896	$S^{(0)}$	$S^{(1)}$	$S^{(2)}$	$S^{(3)}$	$S^{(4)}$
1	1717	2464	3328	4326	5475	6792
2	647	747	864	998	1149	1317
3	83	100	117	134	151	168
4	17	17	17	17	17	17
Total	2464	3328	4326	5475	6792	

$$m_1^{(0)} = \bar{X} = t \, . \, \mu_1^{(0)} + X_k = 0,5 \times \frac{3328 - 310}{3560} + 3 = 3,424$$

$$m_2^{(\bar{x})} = t^2 \, . \, \mu_2^{(0)} + 2 \, . \, t \, . \, \mu_1^{(0)} (X_k - \bar{X}) + (X_k - \bar{X})^2 =$$

$$= 0,5^2 \times \frac{2 \times 4788 - 3368}{3560} + 2 \times 0,5 \times \frac{3018}{3560} \times (-0,424) +$$

$$+ (-0,424)^2 = 0,237$$

$$m_3^{(\bar{x})} = t^3 \, . \, \mu_3^{(0)} + 3.t^2.\mu_2^{(0)}.(X_k - \bar{X}) + 3.t.\mu_1^{(0)}.(X_k - \bar{X})^2 + (X_k - \bar{X})^3 =$$

$$= 0,5^3 \times \frac{6 \times 4809 - 6 \times 3864 + 3018}{3560} + 3 \times 0,5^2 \times$$

$$\times \frac{2 \times 4788 - 3638}{3560} (-0{,}424) + 3 \times 0{,}5 \times \frac{3018}{3560} (-0{,}424)^2 +$$

$$+ (-0{,}424)^3 = -0{,}073$$

$$m_4^{(\bar{X})} = t^4 \cdot \mu_4^{(o)} + 4 \cdot t^3 \cdot \mu_3^{(o)} \cdot (X_k - \bar{X}) + 6 \cdot t^2 \cdot \mu_2^{(o)} \cdot (X_k - \bar{X})^2 +$$

$$+ 4 \cdot t \cdot \mu_1^{(o)} \cdot (X_k - \bar{X})^3 + (X_k - \bar{X})^4 =$$

$$= 0{,}5^4 \times \frac{27694}{3560} + 4 \times 0{,}5^3 \times \frac{8688}{3560} (-0{,}424) + 6 \times 0{,}5^2 \times$$

$$\times \frac{5938}{3560} \times (-0{,}424)^2 + 4 \times 0{,}5 \times \frac{3018}{3560} \times (-0{,}424)^3 +$$

$$+ (-0{,}424)^4 = 0{,}322$$

SUMÁRIO

O autor teve por finalidade precípua dar maior divulgação do método das somas para determinação dos momentos. Acredita haver abordado a parte teórica sob um ponto de vista mais geral.

Após haver demonstrado um teorema fundamental, estabelece os valores dos quatro primeiros momentos em função de particulares somas.

Expõe a seguir um artifício de utilidade prática. Dá exemplos elucidativos da teoria desenvolvida.

SUMMARY

The main object of the author was to make the determination of moments by repeated summation better known. He believes that the theoretical part of the subject was taken up at its broader aspects.

After demonstrating a fundamental theorem he establishes the values of the first four moments in function of particular sums.

An artifact of practical use is expounded. Examples clarify the theory given.