DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
Diretor: **Prof. Dr. Pedro Egydio de Oliveira Carvalho**

SÔBRE UMA SOMATÓRIA NOTÁVEL

G. GARCIA DUARTE

Sob o título acima encontramos em "Periodico di matematica" — série III — vol. XIII — 1916 — págs. 253-259, de autoria de R. Vercellini, o estudo da função:

$$S_k = \sum_{r=1}^{n} r^k \cdot x^r$$

E' nossa intenção rever o estudo do autor e apresentar dois métodos mais simples para a determinação de S_k no ponto $x = 1$. Para tanto consideremos o operador:

$$\theta = x \cdot D_x$$

para o qual, como sabemos, subsiste:

$$\theta^k = \sum_{j=1}^{k} T_{kj} \, x^j \, D_x^j \; {}^{*} \qquad (1)$$

onde os T_{kj} são números de Stirling de segunda espécie, definidos por:

$$T_{kj} = \frac{1}{j\,!} \left(\triangle^j x^k \right)_{x=0}$$

Uma tabela dêsses números é de imediata elaboração se levarmos em conta a relação:

$$T_{n-1,j} = j \cdot T_{n,j} + T_{n,j-1}$$

a qual nos levará imediatamente a:

* Calculus of finite differences — C. Jordan. Chelsea Publishing Company, N. Y. — págs. 195-196.

Das (3) e (4) segue

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{j=1}^{k} T_{kj} \,.\, \alpha^{j}_{n-j+1}$$

Como aplicação determinemos a soma das 5ª potências dos 6 primeiros números naturais:

$$\sum_{i=1}^{6} i^5 = \sum_{j=1}^{6} T_{5j} \,.\, \alpha^{j}_{7-j} = 1.21 + 15.70 + 25.210 + 10.504 + 1.840 = 12.201$$

Por último, notemos que a determinação de S_k no ponto $x = 1$ é uma operação imediata se considerarmos a relação:

$$x^k = \sum_{j=1}^{k} T_{kj} \,.\, x^{[j}$$

do que segue:

$$\sum_{x=1}^{n} x^k = \sum_{j=1}^{k} T_{kj} \,.\, \sum_{x=1}^{n} x^{[j]}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} T_{kj} \,.\, \frac{(n+1)^{[j+1]}}{j+1}$$