MOMENTOS DE DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS *

ELZA S. BERQUÓ **

Sempre que se estuda teòricamente as distribuições de probabilidade de maior uso em estatística, há uma natural preocupação de analisá-las através de suas principais características.

Quando se trata de distribuições contínuas, os momentos genéricos de ordem k são, via de regra, de fácil determinação. Todavia, a solução do mesmo problema para o caso de distribuições discretas não é comumente obtida com a mesma facilidade.

O presente trabalho visa mostrar que expressões simples para os momentos de potência de distribuições discretas, podem ser obtidas quando se lança mão da relação [1] (1950):

$$m_k = \sum_{i=0}^{k} T_{ki} \; m_{[i]} \qquad (1)$$

que exprime o momento de potência não centrado de ordem k, $m_k = E\ (x^k)$, em função do momento fatorial não centrado de ordem i.

$$m_{[i]} = E\ (x^{[i]}) = E\ [x\ (x - 1) \ldots . (x - i + 1)]$$

e dos números de Stirling de 2.ª espécie T_{ki}.

Nesta ordem de idéias consideraremos as distribuições binomial, Poisson e hipergeométrica.

Na distribuição binomial, definida por:

$$p_j = \binom{n}{j} p^j \, q^{n-j} \qquad 0 \leq j \leq n$$

tem-se

$$m_{[k]} = \sum_{j=0}^{n} j^{[k]} \binom{n}{j} p^j \, q^{n-j}$$

Recebido para publicação em 31-10-1958.

* Trabalho do Departamento de Bioetatística da Faculdade de Higiene e Saúde Pública da Universidade de São Paulo.

** Professor Catedrático Substituto da Cadeira de Bioestatística da F. H. S. P. U. S. P. Livre Docente da Cadeira de Bioestatística da F. H. S. P. U. S. P.

$$= n^{[k]} p^k \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} p^{j-k} p^{n-j}$$

$$= n^{[k]} p^k \tag{2}$$

Pela (1) segue:

$$m_k = \sum_{i=0}^{k} T_{ki} \, n^{[i]} \, p^i \tag{3}$$

resultado bastante cômodo se lembrarmos que para a distribuição binomial, o cômputo de momentos de ordens elevadas, envolve um processo deveras tedioso de derivações sucessivas [2] (1943).

A (3) nos parece ter sido tentada pela primeira vez por W. D. Evans [3] (1940) que não chegou a um resultado tão explícito.

Na *distribuição de Poisson*, definida por:

$$p_j = \frac{e^{-n} \, n^j}{j!} \qquad j = 0, 1, 2, 3, \ldots..$$

tem-se:

$$m_{[k]} = \sum_{j=0}^{\infty} j^{[k]} \frac{e^{-n} \, n^j}{j!} =$$

$$= n^k \sum_{j=k}^{\infty} \frac{n^{j-k}}{(j-k)!} e^{-n} = n^k$$

Pela (1) segue:

$$m_k = \sum_{i=0}^{k} T_{ki} \, n^i \tag{4}$$

Finalmente, na *distribuição hipergeométrica,* definida por:

$$p_j = \frac{\binom{Np}{j}\binom{Nq}{n-j}}{\binom{N}{n}} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n$$

tem-se

$$m_{[k]} = \sum_{j=0}^{n} j^{[k]} \frac{\binom{Np}{j}\binom{Nq}{n-j}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{j=0}^{n} j^{[k]} \frac{(Np)!}{j!\,(Np-j)!} \binom{Nq}{n-j}$$

$$= \frac{(Np)^{[k]}}{\binom{N}{n}} \sum_{m=0}^{n-k} \binom{Np-k}{m} \binom{Nq}{n-k-m}$$

$$= \frac{(Np)^{[k]}}{\binom{N}{n}} \binom{N-k}{n-k}$$

$$= \frac{(Np)^{[k]}\, n^{[k]}}{N^{[k]}}$$

Pela (1), segue:

$$m_k = \sum_{i=0}^{k} T_{ki} \frac{n^{[i]}\,(Np)^{[i]}}{N^{[i]}} \qquad (5)$$

SUMMARY

The present paper shows that it is possible to obtain very simple expressions for the moments of discrete distributions if use is made of the relation

$$m_k = \sum_{i=0}^{k} T_{ki}\, m_{[i]}$$

which gives the moments of order k in terms of the factorial moments of order i, $m_{[i]}$, and the second kind of Stirling's numbers T_{ki}.

BIBLIOGRAFIA

1. Duarte, G. G.: Contribuição para o estudo dos momentos fatoriais. Tese de Concurso à Livre-Docência da Cadeira de Bioestatística da Faculdade de Higiene e Saúde Pública da Universidade de São Paulo, 1950.

2. Evans, W. D.: Note on the moments of a binomially distributed variate. Annals of Mathematical Statistics, **11**:106-107, 1940.

3. Kendall, M. G.: The advanced theory of statistics. 1.ª ed. Londres, Buther & Tanner, 1943. Vol. 1.