

AS SIMETRIAS COMO INSTRUMENTOS DE OBTENÇÃO DE CONHECIMENTO

Henrique Fleming

Advertência

Estas notas constituem parte de um curso sobre “Simetrias” que dei, anos atrás, em uma reunião da Sociedade Brasileira de Física em São Paulo. Duas são as razões que terminaram por me fazer retirá-las do “limbo das notas incompletas”: a insistência de amigos, e a convicção de que os físicos, como os cientistas da natureza em geral, têm um papel importante a cumprir no desenvolvimento da Teoria do Conhecimento: a apresentação de exemplos, e a recepção, para testá-los, de esquemas conjecturados por seus colegas filósofos. Por isso, este trabalho não é, propriamente, nem Física nem Filosofia.

Foi dividido em duas partes: a primeira, descritiva, é esta que se segue. A segunda, formal, virá em breve.

Agradeço ao professor Paulo Saraiva de Toledo pelo estímulo constante, e ao professor José Raimundo Chiappin pelos “empurrões” finais e por me ter posto em contato com os editores desta Revista.

A eles o trabalho é, apropriadamente, dedicado.

1 *Introdução*

A idéia de simetria vem associada comumente à de regularidade, particularmente no caso das estruturas ornamentais imaginadas pelos artistas da antiguidade. O fato de que a simetria era deliberadamente procurada pelo artista não pode deixar de sugerir a existência de uma conexão entre os conceitos de simetria e beleza.

Para ser mais exato, a palavra simetria não é usada sempre com o mesmo significado. Seleccionaremos, pela importância que assumem na nossa discussão, dois, que estão, aliás, estreitamente relacionados,

fato que torna o problema ainda mais fascinante. O primeiro diz respeito à harmonia de formas, e é quase um sinônimo de beleza, pelo menos no pouco de objetivo que o conceito de beleza inclui. Policleto, autor do Doriforo e de outras realizações eternas, deixou-nos um livro sobre proporções de figuras, no qual a palavra simetria é de uso frequente; Dürer é outro exemplo conhecido, com o seu cânon de proporções do corpo humano. O conceito, ainda com o seu primeiro significado, é extensível, em sentido figurado, às harmonias geométricas, adquirindo então uma conotação de “equilíbrio”. Propagasse nesta forma às mais diversas formas da atividade cultural humana¹

O segundo sentido dado habitualmente à palavra, simetria diz respeito às regularidades das figuras geométricas, o exemplo mais simples sendo o da simetria bilateral, isto é, a invariância de uma figura pela reflexão em relação a um plano, ou a simetria entre a esquerda e a direita, presente na estrutura dos animais superiores. Sendo uma propriedade geométrica, pode ser transformada em um conceito preciso. Uma figura é simétrica em relação a um plano se for levada sobre si mesma por reflexão neste plano. De uma maneira geral, se uma transformação do espaço sobre si mesmo leva uma figura em outra indistinguível da primeira, a figura é simétrica por esta transformação. A transformação inversa será também uma transformação de simetria da figura, e o produto de duas transformações de simetria, isto é, a transformação obtida pela aplicação sucessiva de duas transformações de simetria, é também uma transformação de simetria. Resume-se isso dizendo que o conjunto das transformações perante as quais uma figura é simétrica possui uma estrutura de grupo. É o chamado grupo de simetrias da figura.

O leitor inexperiente não pode imaginar a riqueza de conteúdo da frase aparentemente anódina que diz que o conjunto de transformações de simetria possui uma estrutura de grupo. A introdução do conceito de grupo, a estrutura mais fundamental da matemática, trouxe-lhe o sangue novo e permitiu generalizações e pontos de vista novos que ali-

(1) — Veja por exemplo:

- Dürer, A., *Vier Bücher von menschlicher Proportion*, (1528);
Birkhoff, G. D., *Aesthetic Measure*, Harvard (1933);
Birkhoff, G.D., *A Mathematical Theory of Aesthetics and its Applications to Poetry and Music*, in *Complete Works*, Dover (1969);
Ivins, W. M., *Art and Geometry*, Dover (1964);
Hambidge, J., *The Elements of Dynamic Symmetry*, Dover (1967);
Speiser, A., *Die Theorie der Gruppen von Endlicher Ordnung*, Birkhäuser Verlag, Basel.
Coxeter, H. S. M., *Introduction to Geometry*, Wiley (1969);
A referência mais importante é citada à parte:
Weyl, H., *Symmetry*, Princeton University Press.

mentaram as gerações de matemáticos desde então. Basta citar o exemplo da memorável classificação das geometrias por Felix Klein, no famoso Programa de Erlangen ².

É possível que a razão profunda pela qual o conceito de grupo é tão fundamental seja o fato de os axiomas da estrutura de grupo corresponderem exatamente aos axiomas de uma relação de equivalência ³. A linguagem natural para a descrição das simetrias é a teoria dos grupos, e o leitor interessado no estudo detalhado das simetrias e suas aplicações fará bem em familiarizar-se com ela ⁴. Não faremos, nestas notas, contudo, uso de seus aspectos técnicos. Procuraremos acompanhar, desde um passado bastante remoto, a influência da idéia de simetria sobre o pensamento humano, primeiro como transparece nas aplicações ornamentais, e depois como guia na construção de uma descrição coerente da Natureza. Prosseguiremos neste estudo até aos nossos dias, quando as considerações sobre simetrias passaram à categoria de uma verdadeira super teoria, um substrato que, acreditamos, sobreviverá à contingência de nossos atuais esquemas e que, portanto, fornecerá subsídios para a reformulação dos conceitos na medida em que se vão tornando inadequados. Neste sentido as simetrias desempenham hoje um papel análogo ao que uma parte da Teologia desempenhou em outros tempos.

O programa destas notas é o seguinte: após uma introdução à simetria ornamental, que foi possivelmente o laboratório onde as simetrias fundamentais do espaço (e suas quebras) foram descobertas (ou tornaram-se conscientes), passa-se a uma análise do espaço nesses termos. A Física aparece neste ponto. O resultado mais importante é a conexão entre as simetrias e as leis de conservação. A mais fundamental das simetrias da Física, a relatividade, será descrita como era entendida por Galileu, sendo introduzida em suas próprias palavras, dificilmente superáveis em clareza.

Depois, partiremos para objetivos mais ambiciosos. A definição de simetria (ou princípio de invariância) de Wigner será introduzida, inteiramente em termos de observações e correlações entre observações, e, portanto, independente de particulares formalismos. O grau de abstração obtido é suficiente para que algumas ambigüidades na conceituação de simetria na Física se tornem claras. Emergem duas

(2) — Klein, F., *Le Programme d'Erlangen*, Gauthier-Villars (1974);

(3) — Weyl, H., *Group Theory and Quantum Mechanics*, Dover.

(4) — Além da referência anterior,

Wigner, E. P., *Group Theory and its Applications to the Study of Atomic Spectra*, Academic Press; Filmore, R., *Lie Groups, Lie Algebras and Some of their Application*, Wiley (1974).

categorias: simetrias geométricas e dinâmicas. A respeito das últimas quase nos omitiremos. As primeiras serão estudadas, com algum detalhe, no contexto mais simples da mecânica clássica de partículas puntiformes. Já aí alguns resultados profundos aparecerão, relacionados à conexão entre simetrias e leis de conservação ⁵.

2 — *Simetria Ornamental e Albores de Outros Problemas.*

Examinemos alguma coleção de arte antiga, por exemplo suméria. Quando, após a emoção do primeiro impacto causado pelos tesouros que os milênios não puderam destruir, nossas faculdades analíticas começam a agir e a discernir detalhes, o que, talvez, impressiona em primeiro lugar é a frequência com que as ornamentações dos vasos e as esculturas possuem uma simetria bilateral. Esta característica se propaga a quase toda a arte antiga e, embora a excelência dos sumérios fosse certamente suficiente para influenciar os que os seguiram, o fato é que, por transmissão ou não, a simetria bilateral dominou a estética de então.

O homem, como os animais superiores, possui, ele mesmo, uma simetria bilateral, e não é impossível que esta fosse a causa de tudo — o artista louva-se, ou ao homem, reproduzindo, até o absurdo, esta simetria. Para não quebrá-la, chega a colocar, em uma águia, duas cabeças dispostas simetricamente. Coloca uma característica de si próprio em suas obras? Platão sugere outra explicação: as simetrias da natureza decorrem das simetrias das leis matemáticas que a descrevem, e o homem, parte da natureza e sujeito às suas leis, tem o reflexo delas não só em sua forma, mas também em seu espírito. Eis que, em poucas palavras, está sugerida uma relação entre o belo e o necessário. Sem tentar descer ao fundo, de onde talvez não conseguíssemos sair, contentemo-nos em observar um pouco mais a beleza dessas configurações regulares que refletem um pouco dos espíritos mais elevados daquelas épocas. Tentemos extrair mais, desses tesouros de nossa herança cultural.

A preocupação com a simetria bilateral teve um papel importante no desvendamento de alguns segredos do espaço. É provável que tenham sido os artistas, preocupados em colocar suas figuras planas em configurações bilateralmente simétricas, a perceber a dificuldade proveniente da tridimensionalidade dos objetos. Por exemplo, grupos de homens representados de perfil não oferecem qualquer dificuldade

(5) — Houtappel, R., Van Dam, H., Wigner, E. P., "The Conceptual Basis and Use of the Geometric Invariance Principles", *Reviews of Modern Physics*, Vol. 37, pg. 595 (1965).

em serem dispostos com simetria bilateral, um como imagem especular do outro. Porém, no momento em que um mínimo de tridimensionalidade é introduzido, fazendo-se aparecer, por exemplo, as duas mãos, ocorrerá que, se um segura a lança com a direita, o seu companheiro de simetria segurá-la-á com a esquerda. Como a humanidade não é ambidextra, a quebra de simetria bilateral não pode ser facilmente evitada, e certamente preocupou mais de uma mente. As quebras de simetria, como a incongruência entre a mão esquerda e a direita, podem ter se tornado, já nessa época, problemas filosóficos relativos às propriedades do espaço. Como veremos mais tarde, é freqüentemente a quebra de uma simetria que desperta a consciência para problemas relacionados com a essência da própria simetria. Nas palavras de Pierre Curie, “são as dissimetrias que possibilitam os fenômenos”

A simetria na arte possui certas conotações cuja permanência através de milênios dá o que pensar. Citando Dagobert Frey⁶, “a simetria significa repouso e confinamento; a assimetria, movimento e desenvoltura; uma, ordem e lei; outra, arbitrariedade e acidente; uma, rigidez formal e contenção; a outra, vida, gozo e liberdade” Há milênios que a simetria perfeita vem associada ao eterno, e é mais inflexível quanto mais é importante a eternidade na mitologia de uma cultura — atinge a paroxismos no Egito antigo, a civilização da eternidade. Ainda na civilização cristã esta característica se apresenta frequentemente: sempre que Deus ou Cristo são representados como símbolos da verdade e justiça eternas, aparecem frontalmente, não de perfil. Edifícios públicos e lugares de adoração, sejam templos gregos ou catedrais cristãs, quase sempre apresentam simetria bilateral.

O movimento, a vida, são introduzidos por quebras de simetria. Exemplos de beleza única são encontrados na escultura grega, como na indescritível Vitória de Samotrácia, o movimento parado! Em palavras, Thomas Mann, na *Montanha Mágica*, descreve o episódio em que Castorp, oprimido pela fadiga de uma longa travessia na neve, observa os pequenos flocos: “Castorp adiantou-se para que alguns caíssem em sua manga e observou-os com a competência de um estudioso diletante. Pareciam migalhas amorfas, mas mais de uma vez os tinha visto com a sua boa lente e sabia bem de que jóias graciosamente regulares eram compostos, de objetos preciosos, estrelas cavalheirescas, fechos de brilhantes que nem o mais cuidadoso joalheiro saberia criar. ., e entre aquelas miríades de estrelinhas mágicas em sua diminuta e secreta magnificiência, inacessível e, aliás, nem mesmo destinada ao olho humano, não havia uma igual à outra; uma alegria

(6) — Frey, D. “Zum Problem der Symmetrie in der bildenden Kunst” *Studium Generale*, Vol. 2, pg. 268 (1949).





ainda que, enquanto a gota está no ar, a nave se move de muitos palmos; os peixes em sua água não nadarão com mais fadiga em direção à precedente que à subsequente parte do vaso; mas com igual agilidade correrão para o alimento jogado em qualquer lugar da beira do vaso; e finalmente as borboletas e as moscas continuarão seus voos indiferentemente em direção a todas as partes, e não acontecerá nunca que se reunam em direção à parte da popa, quase como se estivessem cansados de correr atrás da nave, da qual por longo tempo, mantendo-se no ar, estarão separadas: e queimando-se alguma lágrima de incenso, se fará um pouco de fumaça que se verá subir ao alto e, como uma pequena nuvem, aí se manter”

Isto é, o navio em movimento uniforme é equivalente ao navio em repouso. A transformação que leva o navio do estado de repouso ao estado de movimento uniforme é uma invariância, é uma simetria. Esta afirmação, que diz que um sistema em repouso é equivalente, no sentido explicado por Galileu, a um sistema em movimento uniforme (com velocidade constante), é o princípio de relatividade, e possui um enorme conteúdo. Como se vê, era conhecido antes de Newton, e teve que ser levado em conta na elaboração da mecânica newtoniana. De fato, diz Newton que, para que apareçam forças em um sistema que não existem em um outro, é preciso que os dois não difiram apenas por uma velocidade constante. Uma aceleração de um em relação ao outro é necessária. Pode-se utilizar este mesmo exemplo para observar a evolução da proeminência dos princípios de invariância, manifesta em épocas de elaboração de uma teoria, em direção a um papel subsidiário, em épocas em que vige uma teoria eficiente. Após a formulação newtoniana as observações de Galileu, incorporadas ao formalismo, perderam o papel de guia que possuíam. Não havia mais necessidade de guia. Quando muito, o princípio de relatividade (não se chamava assim, então) era deduzido das leis de Newton! Posteriormente, com a crise advinda do confronto entre a mecânica e o eletromagnetismo, e as dúvidas que surgiram sobre a região de validade de ambas as teorias, fez-se novo apelo ao princípio e, como é bem sabido, obteve-se a reformulação da mecânica conhecida hoje como mecânica relativística.

O estudo desse exemplo mostra claramente uma diferença de nível entre um princípio de invariância em forma abstrata, e uma teoria, que concretiza esse princípio em algum formalismo. A passagem de uma teoria a outra mantém a simetria em sua forma abstrata, e reformula a sua concretização formal.

A importância dos princípios de invariância como estrutura das teorias tem encontrado pouca ênfase entre os filósofos da ciência. Entre os físicos, seu defensor é Eugene Wigner, que tratou do proble-

ma em uma série de profundos trabalhos⁷ Estaremos, de agora em diante, expondo e comentando as idéias de Wigner, com o objetivo principal de apresentá-las aos nossos filósofos.

O caso da relatividade, exposto acima, tem o mérito de ser pouco trivial, no sentido de que apresenta uma equivalência entre sistemas que não é óbvia, isto é, com a qual não estamos excessivamente familiarizados. Contudo, os exemplos mais poderosos de uma estrutura de simetrias subjacentes às leis da natureza são apresentados por aqueles princípios de invariância aos quais estamos de tal modo acostumados que a sua presença e a sua necessidade não são nem mesmo advertidas, passam-nos despercebidas.

As hipóteses que constituem a nossa “teia de suposições”⁸ sobre a natureza, devem ser testadas em um confronto com a experiência. Não é, entretanto, suficiente, que uma experiência-teste, feita em um determinado instante, se mostre de acordo, ou contrária, à hipótese. É necessário que, cada vez que a experiência se repita, a conclusão seja a mesma. Em outras palavras, é necessário que uma certa correlação entre observações, que constitui a experiência, seja garantidamente invariante, sob condições estipuladas, em relação a transformações do instante em que se realiza⁹ Essa invariância está tão inextricavelmente ligada ao conceito mesmo de experiência, que é esquecido que é ela o fundamento da teoria estatística dos erros, que admite que repetições de uma medida “em condições idênticas”, permitam-nos obter um valor mais correto da quantidade medida do que uma medição isolada. Se despojarmos o Universo de tudo aquilo que é irrelevante à correlação, o resultado deve ser o mesmo em qualquer instante. Pode-se resumir isso da forma seguinte: um sistema isolado é invariante por translações temporais. Ou ainda, translações temporais são simetrias de um sistema isolado.

Não só em relação ao tempo, mas também em relação ao espaço é preciso que as observações possam ser repetidas. Reproduzindo-se exatamente uma experiência em dois lugares, diferentes, os resultados

(7) — Wigner, E. P., *Symmetries and Reflections*, M. I. T. Press, Cambridge, U.S.A. (1970). Veja especialmente o ensaio “The Role of Invariance Principles in Natural Philosophy”.

(8) — Xenófanés, citado por K. R. Popper no Prefácio à 3ª edição alemã da *Lógica da Pesquisa Científica*, editada no Brasil pela Editora Cultrix, São Paulo (1974).

(9) — A Mecânica Quântica não apresenta problemas. Uma seqüência de muitas medidas de uma propriedade do sistema terá como resultado uma certa distribuição de valores. Outra seqüência, realizada em outro instante, dará a mesma distribuição de valores. A equivalência entre instantes é entendida neste sentido.

devem ser os mesmos. A homogeneidade do espaço é o que nos autoriza a conceber a possibilidade de reproduzir em um ponto uma situação existente em outro. É possível resumir isto dizendo que um sistema isolado é invariante por translações. Observe que um sistema isolado é, por definição, um que “ignora” o resto do Universo. Comporta-se, por conseguinte, como se fosse o único sistema do Universo. De suas propriedades de invariância decorrem, imediatamente, simetrias do espaço vazio. O espaço vazio deve, portanto, ser invariante por translações espaciais e temporais, entre outras transformações óbvias.

Essas simetrias são, como vimos, indispensáveis para o funcionamento do próprio método científico. Não é possível testar uma teoria, na ausência deles. Usando a nomenclatura de Popper, não existem teorias científicas da natureza que possam abrir mão dessas simetrias.

Essas simetrias, que estivemos descrevendo como transformações que relacionam dois sistemas físicos, podem ser também interpretadas em termos de um único sistema, examinado por dois observadores diferentes. Por exemplo, a transformação de simetria que faz corresponder a um sistema um outro que difere dele apenas por possuir uma velocidade constante em relação ao primeiro, pode ser realizada também da maneira seguinte: um mesmo sistema é descrito por um primeiro observador em repouso em relação a ele, e também por um outro, movendo-se em relação ao primeiro observador com velocidade constante. A primeira caracterização da transformação, envolvendo dois sistemas e um observador, é chamada de “ativa”. A segunda, de “passiva”. São, claramente, equivalentes. As translações espaciais e temporais admitem também essa duplicidade de caracterização, como o leitor poderá verificar sem dificuldade. Tais transformações são denominadas “geométricas”, em contraposição a transformações chamadas dinâmicas, que só podem ser interpretadas da maneira ativa¹⁰. As transformações geométricas podem, por conseguinte, ser enunciadas como relações entre pontos de vista de observadores diferentes a respeito de um mesmo fenômeno. A idéia de que a descrição da natureza deve independer do particular observador que a descreve fornece, então, um argumento intuitivo para que se procure garantir a existên-

(10) — Exemplo de transformação dinâmica: a inversão temporal. Se um certo movimento do sistema é possível, é possível também o movimento inverso a ele, que se obteria, por exemplo, projetando às avessas um filme do primeiro. As leis da Mecânica e do Eletromagnetismo são invariantes pela inversão temporal. Contudo, a transformação não pode ser descrita em termos de um único sistema e dois observadores, um sendo o “inverso temporal” do outro.

cia das simetrias geométricas como pressuposto para a elaboração de teorias físicas. É, porém, uma idéia que deve, em cada caso, ser testada experimentalmente: a citação de Galileu acima descreve a verificação experimental dessa idéia para o caso de observadores em movimento relativo uniforme.

4. *Leis da Natureza e Condições Iniciais*

Pierre Curie¹¹ observou que a existência de uma simetria exata no Universo, torná-la-ia impossível de ser detetado. Por exemplo, se o Universo fosse rigorosamente simétrico por translações, este fato seria impossível de ser observado. Cada ponto seria uma réplica idêntica de todo o Universo, nós mesmos estaríamos com igual probabilidade em todos os pontos, e a observação do que se passa em outro ponto, e a conclusão de que ali se passa exatamente o mesmo que no ponto inicial seria impossível, e as novas observações interpretadas como uma repetição das observações relativas ao primeiro ponto. Esta dificuldade, de grande porte, foi resolvida por Wigner pela separação entre condições iniciais e leis da natureza. A lei de Newton não permite deduzir o movimento que uma certa partícula realizará, a partir de um certo instante. É preciso que se conheça o estado dessa partícula naquele instante. O estado de um sistema é descrito pelas condições iniciais. No caso da partícula, consistem na posição e na velocidade da partícula no instante considerado. As leis da natureza informam, dado um estado, o que acontecerá a seguir, isto é, em que estado, em algum instante posterior, encontraremos o sistema. Segundo Wigner, os princípios de invariância não se referem às condições iniciais, mas àquela parte da natureza sobre a qual se manifestam as leis. Assim, o Universo pode ser invariante por translações, e eu estar em um ponto e não em outro. É, então, o fato de que as condições iniciais não são simétricas que permite a detecção das simetrias das leis da natureza¹²

A esta altura estamos com um vocabulário adequado para tentar um passo importante. Já que os princípios de invariância, as simetrias,

(11) — Curie, P., *Oeuvres*, Gauthier-Villars, Paris (1908).

(12) — A possibilidade de separação, em um conjunto de observações, de condições iniciais e leis da natureza, deve ser tomada como um postulado. Ocasionalmente a separação é difícil. Não conhecemos nenhum caso em que seja impossível. Exemplo: o estudo da estrutura da Terra por meio de ondas sísmicas. Em um laboratório a experiência consiste em aplicar à Terra uma onda de características conhecidas. As oscilações da crosta informam sobre a constituição interna da Terra, usando-se as leis da mecânica. Na prática, não se conhecem bem as condições iniciais, nem a estrutura, e as vibrações da crosta informam um pouco sobre um, um pouco sobre outro. A continuação dos estudos, espera-se, acaba determinando quase simultaneamente as condições iniciais e a estrutura.

constituem um pressuposto para as leis da natureza, e já que se referem a correlações entre observações, não será possível *definir* as transformações de invariância diretamente em termos de observações, sem a utilização do formalismo ou dos conceitos típicos de qualquer teoria? É possível fazer isso. Não é possível fazê-lo, entretanto, sem modificar sensivelmente o estilo que utilizamos até aqui e é inevitável que a exposição se torne muito mais técnica. Deixaremos este novo passo para a segunda parte dessas notas.

Duas observações finais, para que o leitor não se sinta frustrado demais: a importância, para a formulação das simetrias da natureza, de isolar as condições iniciais das leis da natureza, encontra sua linguagem natural na teoria das equações diferenciais. A solução de uma equação diferencial requer, além da forma explícita da equação, o conhecimento das condições iniciais. Uma formulação diferencial de uma teoria separa, então, automaticamente as leis das condições iniciais. Esta é uma das razões do sucesso das formulações diferenciais na física contemporânea. Finalmente, uma observação de caráter psicológico devida a Wigner: por que certos tipos de formalismo nos parecem mais elegantes que outros? Responde Wigner que nos parecem mais elegantes, ou naturais, aqueles formalismos em termos dos quais as simetrias sejam mais simplesmente descritas. Esta seria, em sua opinião, a razão da atração que sentimos pelos formalismos lagrangeanos e princípios de mínima ação.

Instituto de Física, Universidade de São Paulo