Ciência & Filosofia. n. 5, p. 67-105, 1996.

Russell, Tarski, Gödel: Um Guia de Estudos*

David Miller**

Introdução

Estas notas, que tencionam apresentar um levantamento da literatura mais importante sobre as descobertas de Russell, Tarski e Gödel relativas aos *paradoxos lógicos*, à *verdade* e à *prova*, foram escritas originalmente em 1985. A versão atual destinava-se aos alunos do curso de Filosofia da Lógica da Universidade de Warwick no trimestre da Quaresma de 1989. Não havia plano para uma circulação mais ampla. Senti-me portanto honrado ao saber que Caetano Plastino e Otávio Bueno julgavam que tais notas mereciam uma edição em português. Sou profundamente grato a Bueno por seu hábil e sensível trabalho de tradução.

Diversos trabalhos foram desenvolvidos na última década sobre os paradoxos, e meu próprio pensamento alterou-se um pouco. Mas atualizar estas notas envolveria reescrevê-las por completo. Há dois pontos, todavia, sobre os quais um breve comentário faz-se necessário.

No décimo parágrafo da Seção IV, que se segue à definição recursiva de adição e inicia-se com as palavras "Com efeito", é afirmado que, ao se transformar a definição recursiva de satisfação numa definição explícita, o Paradoxo do Mentiroso torna-se demonstrável e o

---

 Tradução de Otávio Bueno.

** Professor do Departamento de Filosofia da Universidade de Warwick, Reino Unido.

Os três principais paradoxos conjuntistas são: o *Paradoxo de Russell,* da classe de todas as classes que não são membros de si mesmas; o *Paradoxo de Cantor* do universo; e o *Paradoxo de Burali-Forti* do maior número ordinal. Este último é um pouco técnico, mas deveremos considerar os números ordinais posteriormente, à medida que nos aproximemos do trabalho de Kripke sobre a verdade. O Paradoxo de Cantor mostra que não pode existir nenhuma entidade como *o universo,* o conjunto de tudo que existe. Isso é mais importante do que parece, pois torna a interpretação dos quantificadores $\forall x$ e $\exists x$ uma questão arriscada. Historicamente, o mais importante dos três paradoxos foi o de Russell. Ele é provocado ao se perguntar se o conjunto

$$w = \{x\text{: } x \text{ é um conjunto e } x \notin x\}$$

é ou não um membro de si mesmo. É claro que nenhuma resposta consistente é possível: $w \in w$ se, e somente se, $w \notin w$. O que torna essa contradição não apenas uma contradição, mas um paradoxo ou uma antinomia é a trivialidade das premissas usadas em sua derivação. Com efeito, estas são tão triviais que pode exigir um pouco de esforço descobrir quais são. Parece que somos compelidos a concluir que não há tal conjunto w, muito embora sua condição de pertinência (a ausência de autopertinência) esteja claramente afirmada. Para a conexão entre os paradoxos de Russell e Cantor, veja Miller 51.

A solução do próprio Russell para os paradoxos, conhecida como *a teoria dos tipos* (Russell 69, p. 135-7; Copi 13, p. 21-7 e 60-75), mesmo na forma simplificada que lhe deu Ramsey, é bastante drástica. Não satisfeita em negar que o conjunto w exista, ela afirma que tal asserção é destituída de significado. Deveremos examinar por que Russell foi conduzido a esse extremo desesperado. Um excelente exame, embora muito condensado, aparece em Quine 64, p. 241-9. Um gênero mais sensato de solução, mais estimado atualmente, concretiza-se na *teoria axiomática de conjuntos;* ele suprime as questões de significatividade, propondo, em vez delas, axiomas de existência de conjuntos. Um estilo de solução completamente diferente é o de Leśniewski, que considerou os conjuntos como se fossem corpos físicos ocupando certo volume. Ele interpretou a relação de pertinência $\in$ quase da mesma maneira que a de inclusão de conjuntos $\subseteq$, de tal modo que, para todo x, $x \in x$. Por

indivíduo, a expressão "$\{a\}$" é bem formada e denota o conjunto cujo único elemento é *a;* todavia, a expressão "$\{a,\{a\}\}$", que parece designar o conjunto cujos dois elementos são a e $\{a\}$, é gramaticalmente incorreta. Não apenas inexiste tal conjunto: tentar afirmar sua existência constitui um palavrório sem nexo. Também a expressão "$\{a: a = a\}$" é gramaticalmente inaceitável, pois objetos idênticos a si mesmos aparecem em todos os tipos.

Formalmente, todas essas regras e esses regulamentos são mantidos em ordem, atribuindo-se a cada tipo suas próprias variáveis. Dessa forma, as variáveis x^0, y^0, z^0, ... podem ser consideradas como percorrendo os indivíduos; x^1, y^1, z^1, ..., os conjuntos de indivíduos; e assim por diante. Também às constantes se empilham semelhantes apêndices. Então, $x^m \in x^n$ é gramaticalmente correta nessa teoria somente se $n = m + 1$. E as únicas descrições bem formadas de abstratores de classe são aquelas que indicam explicitamente uma variável como índice superior. Logo, $\{x^m: x^m \neq x^m\}$ é um termo legítimo e denota o conjunto vazio $\varnothing^m$ de tipo $m + 1$; mas $\{x: x \neq x\}$ não é reconhecível. Na teoria simples de tipos, existe uma multiplicidade de conjuntos vazios, um em cada tipo, exceto no básico. Resulta, na verdade, que, na teoria desenvolvida, a aritmética também teria de ser repetida em cada tipo. Pior que isso, ela não se torna de forma alguma possível, dado o modo como Russell definiu os números naturais, a menos que postulemos a existência de infinitos indivíduos, ou, pelo menos, a infinitude de um dos tipos. Para a necessidade desse *axioma do infinito,* e para alguns dos problemas que origina, veja Russell 69, Cap. 13.

Qual o propósito dessa série draconiana de restrições gramaticais? Note-se que ela parece classificar como destituída de significado a formulação da teoria de tipos que apresentamos três parágrafos atrás. Pois dizer que a está em um tipo e não em outro é proferir um enunciado no qual pelo menos um de seus conjuntivos não possui significado. Tal limitação acerca do que faz sentido, tornando destituído de significado mesmo mencionar o universo ou o conjunto de todos os conjuntos normais, naturalmente basta para resolver os paradoxos conjuntistas. De fato, como se observa em Quine 64, p. 249, ela resolve os paradoxos muitas vezes além do necessário. Contudo, ela simplesmente não é necessária, como foi notado em Quine 64, p. 269, e, portanto, é melhor que seja descartada.

Para vermos isso, tomemos seriamente a estratificação do universo em tipos. Suponha que consideremos apenas como falso (a menos que $n = m + 1$), mas jamais como sem sentido, afirmar a pertinência num conjunto de tipo n de um objeto de tipo m. Isto é, exceto quando $n = m + 1$, a asserção de que $x^m \in y^n$ será considerada como falsa. O que ocorre com o Paradoxo de Russell? O máximo que podemos nos aproximar do conjunto de todos os conjuntos normais é o conjunto de todos os conjuntos normais de algum tipo, por exemplo, o conjunto $\{x^m: x^m \notin x^m\}$, que é claramente de tipo $m + 1$; com efeito, ele é V^{m+1}, a classe de todos os objetos de tipo m. Ora, seria $V^{m+1} \in V^{m+1}$? Manifestamente, este não é o caso: em primeiro lugar, porque nada é elemento de si mesmo, e, em segundo, pois V^{m+1}, de qualquer modo, é do tipo errado: os únicos candidatos à pertinência ao conjunto $V^{m+1} = \{x^m: x^m \notin x^m\}$ são objetos do tipo m. O paradoxo se desintegra. O Paradoxo de Cantor, que obviamente é muito similar, uma vez que também lida com o conjunto universal V^{m+1}, é resolvido de forma semelhante. V^{m+1} não contém todos nem, com efeito, qualquer um de seus próprios subconjuntos. Em geral, se um tipo possui k elementos, o próximo tipo acima dele possui 2^k elementos; mas nenhuma contradição surge.

Quando todas as variáveis são indexadas de acordo com o tipo, permanece, entretanto, o problema de como enunciar a teoria dos tipos corretamente. Não há nada verdadeiro que possamos afirmar acerca de todos os objetos, ou de todos os conjuntos. O melhor que podemos fazer é formular a teoria metalingüisticamente, como fizemos. O passo seguinte foi de fato dado por Zermelo. Em vez de usar variáveis indexadas para indicar o tipo de um objeto, por que não introduzimos nomes V^0, V^1, V^2, ... para os diferentes tipos, e retornamos às variáveis gerais? A idéia é que os abstratores de conjunto são relativizados a algum tipo ou outro. Assim, o conjunto de Russell torna-se algo como $w = \{x \in V^m: x \notin x\}$, que é V^m, já que continuamos a exigir que seja falso que x seja um elemento de x. Resulta que não há mais qualquer necessidade de insistir que os tipos sejam disjuntos; podem ser cumulativos, iniciando com o conjunto dos indivíduos (que, na teoria pura de conjuntos, é tomado como vazio), e estendendo-se continuamente à medida que tomamos todos os conjuntos possíveis de objetos que já apareceram. Na verdade, a hierarquia de tipos pode estender-se ao transfinito: V^{ω} é considerado como contendo tudo que aparece em todo tipo finito. A história desse desenvolvimento é contada em Quine 64, p. 266-86. A teoria madura consiste no que é conhecido como *teoria axiomática de conjuntos.*

Retornemos, finalmente, à questão de por que Russell sentiu necessidade de decretar que locuções como "$a \in a$" são gramaticalmente incorretas, e não apenas falsas. Parte da resposta provém de ele ter remontado todos os paradoxos a violações do *princípio do círculo vicioso,* que se relaciona à definição ou especificação de termos, e não à verdade/falsidade de proposições; trata-se, pois, de um princípio que, naturalmente, é disposto em termos de significado. Além disso, Russell pensou que, se dois objetos partilham uma propriedade, poderiam ser colocados juntos em alguma classe; portanto, se tanto a Torre Eiffel como o conjunto de todos os guarda-chuvas possuem a propriedade de *não serem um guarda-chuva,* há um conjunto ao qual ambos pertencem. É claro que isso enseja a possibilidade da miscigenação de tipos. Ocorre que Russell atribuiu tipos também a propriedades e a predicados (que ele confundiu sob a designação de *função proposicional).* No entanto, se o predicado F é de tipo m, também o é seu complementar $\neg F$; desse modo, se x for do tipo errado para lhe atribuir F, ele também é do tipo errado para que $\neg F$ lhe seja atribuído. Assim, nem Fx nem $\neg Fx$ são verdadeiros, o que começa a sugerir que F não é nem verdadeiro nem falso acerca de x; isto é, que Fx é destituído de sentido. Mas essa linha de raciocínio está errada. Dado que os tipos são atribuídos a funções proposicionais, temos de aceitar que tanto F como $\neg F$ podem não se aplicar a um objeto de tipo não apropriado. Não é mais paradoxal classificar ambos, Fx e $\neg Fx$, como falsos, do que dizer que os dois condicionais $P \to Q$ e $P \to \neg Q$ podem ser simultaneamente verdadeiros. Contudo, de modo geral, é melhor não se preocupar, em absoluto, com os tipos para funções proposicionais.

O fato é que Russell jamais pareceu ter ponderado, de forma adequada, que a teoria de conjuntos não é apenas lógica pura, mas contém axiomas de existência de conjuntos. Na teoria ingênua, há o *esquema de axiomas de compreensão,* que afirma, para qualquer fórmula Fx de uma

O Capítulo 1 de Platts 55 proporciona uma apresentação legível. Os principais pontos da teoria tarskiana da verdade são os seguintes:

(i) Qualquer definição adequada de verdade deve satisfazer uma condição de adequação material conhecida como *Convenção T:* que seja possível dela derivar todos os enunciados da forma

(T) *S* é uma sentença verdadeira se, e somente se, *p*

onde "*S*" é substituída por algum nome adequadamente explícito para uma sentença, e "*p*", ou por *S* ou por alguma sentença logicamente equivalente a *S*.

(ii) O esquema *(T)* é inconsistente quando se permite que *S* percorra todas as sentenças de uma linguagem natural, como o português; basta tomar como *S* alguma sentença paradoxal, tal como a versão de Quine do Mentiroso.

(iii) A verdade pode ser adequadamente definida somente para linguagens que são sintaticamente bem especificadas e *semanticamente abertas;* a definição de verdade para as sentenças de uma linguagem *L* deve ser conduzida numa linguagem de ordem superior, denominada *metalinguagem* de *L*.

(iv) É possível formular uma definição materialmente adequada de verdade para as sentenças de uma linguagem elementar. Essa definição, derivada de uma definição recursiva de *satisfação* de uma fórmula aberta por uma seqüência (infinita) de objetos, *não contém primitivos semânticos*.

(v) O recurso a uma metalinguagem permite-nos capturar plenamente as intenções da teoria correspondencial da verdade.

Pareceu claro a muitos, tal como exposto, por exemplo, em Popper 57, p. 223-8; *idem* 58, p. 304-29; Martin 48; Platts 55, p. 10-6 e 32-7. que o esquema *(T)* torna bastante manifesto como sentenças verdadeiras correspondem aos fatos, de tal modo que (v) é correto. Por exemplo, a instância

"A neve é branca" é uma sentença verdadeira se, e somente se, a neve é branca.

exibe uma correspondência entre o nome de sentença "'A neve é branca'" (note as aspas) e a sentença "A neve é branca" Essa correspondência não seria demasiadamente obscurecida se, em vez de discutir em português a verdade de sentenças do português, discutíssemos em francês a verdade de sentenças do inglês; uma instância do esquema *(T)*, nesse caso, seria:

"Snow is white" est un énoncé vrai si et seulement si la neige est blanche.

Aqui, a metalinguagem é o francês; o inglês, a linguagem que é o objeto de pesquisa, é denominada *linguagem objeto*. Colocando o assunto de modo resumido, suponha que *S* seja verdadeira. Então, a correspondência entre os objetos lingüísticos que substituem "*S*" e "*p*" reflete uma correspondência entre a própria *S*, que é o que "*S*" nomeia, e algo que "*p*" nomeia; chame este último, se desejar, de *o fato que p*. Quando *S* não for verdadeira, a correspondência lingüística ainda permanece, mas ela não mais reflete algo no mundo; embora *S* ainda esteja disponível, aquilo que "*p*" supostamente nomeia não o está. Da mesma forma que o discurso, de aparência metafísica, acerca de fatos que são, ou que não são, o caso pode ser substituído por um mais concreto sobre a verdade ou falsidade de sentenças (em Quine 65, p. 10-3, isso é denominado *ascensão semântica)*, afirmações acerca da correspondência ou não-correspondência das sentenças aos fatos podem ser substituídas pelo discurso sobre a correspondência entre entidades lingüísticas. Podendo ser assim substituídas, elas devem ser suficientemente inócuas. Tarski sugere corretamente que sua teoria não se encontra comprometida com nenhum realismo não crítico com respeito aos fatos; mas ela não precisa tampouco temê-lo (Tarski 79, p. 361). De qualquer maneira, o realismo sobre a existência de fatos constitui uma questão bastante diferente do realismo concernente à verdade, que é aquilo a que a teoria da verdade como correspondência equivale. Para a interpretação de que a teoria de Tarski, embora uma teoria da correspondência, leva a um tipo de relativismo ontológico, veja Jennings 33, e a discussão resultante em Siegel 73, Jennings 34 e 35.

Alguns, entretanto, colocaram em dúvida que o esquema *(T)* de Tarski proporcione uma formulação decente da teoria correspondencial da verdade; veja especialmente Davidson 14 (que, não obstante, defende a proposta de que a definição de verdade de Tarski faz o serviço). Veja também Haack 24, seções 1 e 2, criticado em Popper 60; Haack 25, p. 99-102, criticado em Tennant 80, p. 297-8, Keuth 36, O'Connor 53, Parte II, Cap. 1, Grayling 22, p. 164-8. Para uma crítica das próprias concepções de Popper, cf. Healy 27. Diferentemente de uma tentativa anterior de formular uma teoria da correspondência em Russell 68, Cap. 12, a teoria tarskiana não sugere qualquer correspondência detalhada entre partes de sentenças e partes do mundo, apesar do uso de seqüências de objetos na definição de satisfação. Contudo, veja novamente Davidson 14, e também Mackie 45, p. 28-30, Grayling 22, p. 142-6.

Outras objeções à teoria de Tarski, concernentes mais a questões epistemológicas do realismo e do objetivismo do que aos problemas com a definição de verdade proposta, podem ser encontradas em Black 5, p. 245-9, Kneale 39, p. 238-43, e Strawson 77. p. 267-71. Para uma mudança em direção à teoria da redundância, veja Field 18.

IV. A TEORIA DA VERDADE DE TARSKI

Para recapitular: Tarski propõe que definamos a verdade, ou o predicado "verdadeiro", somente para as sentenças de linguagens semanticamente abertas. Para evitar inteiramente o risco de paradoxos semânticos, a definição de "sentença verdadeira" para uma linguagem *L* deve ser formulada numa metalinguagem *M* que não contém primitivos semânticos. Exige-se ainda que a definição satisfaça a Convenção *T*

Note-se que a possibilidade de derivar, a partir da definição de verdade, todas as instâncias do esquema *(T)*, embora suficiente para a adequação material (isto é, para se obter a extensão correta do termo "sentença verdadeira"), está muito longe de ser necessária. Numa linguagem cujas sentenças são definidas por:

"A lua é redonda" é uma sentença;
se *A* é uma sentença, o resultado de prefixá-la por "Não é o caso que" também o é;
estas são todas as sentenças;

Tarski descreve uma linguagem como *semanticamente fechada* se (1) contiver os nomes de suas próprias expressões; (2) contiver predicados semânticos (como "verdadeiro") aplicáveis a suas próprias expressões; e, (3) para cada sentença *S*, contiver uma sentença *(T)* como um axioma ou teorema (Tarski 79, Seção 8). As linguagens naturais são semanticamente fechadas. Tarski nota que os paradoxos são inevitáveis em linguagens semanticamente fechadas (exceto, talvez, se modificarmos a lógica). Ocorre que (1) pode ser satisfeita por qualquer linguagem razoavelmente poderosa (pela técnica de *aritmetização);* de qualquer maneira, dificilmente constituiria uma solução dos paradoxos restringir nossa atenção a linguagens que violam (1). Quanto a (2), ela é, sem dúvida alguma, ambígua: "aplicáveis" significa "aplicáveis verdadeiramente", ou apenas "aplicáveis com sentido"? Alguns autores (ver, por exemplo, Quine 63, p. 7-9) foram levados a supor que se trata deste último caso, de tal modo que a aplicação de um predicado de verdade a uma sentença de uma linguagem inadequada deve ser classificada como gramaticalmente incorreta; isso parece envolver uma interpretação equivocada do empreendimento tarskiano (ainda mais surpreendente em alguém que notou, com clareza, como eram supérfluas as restrições ao significado impostas pela teoria dos tipos). Seja como for, o Mentiroso Fortificado indica que o abandono de apenas (2) não resolverá coisa alguma. (3) também necessita de modificação. Ocorre que é o enfraquecimento da condição (3) que se revela crucial para a solução dos paradoxos por Tarski.

Mas se (3) deve ser enfraquecida, como a Convenção *T* pode ser satisfeita? Somente, parece, se a definição de verdade para uma linguagem *L* for conduzida em alguma outra linguagem *M*, de tal modo que, para cada sentença de *L*, formos capazes de derivar uma sentença *(T)* em *M*. Embora *M*, a metalinguagem de *L*, não possa ser idêntica a *L*, ela pode ser uma extensão da mesma. De forma alternativa, ela pode conter, como uma parte própria, uma tradução de toda a *L*.

Seja L^0 uma linguagem que não contenha predicados semânticos de qualquer espécie. A idéia básica consiste em apresentar uma *definição recursiva*, de acordo com a estrutura das sentenças de L^0, de um predicado de verdade "verdadeiro^0". Contudo, já que o valor de verdade de uma sentença quantificada não é uma função apenas dos valores de verdade das sentenças componentes mais curtas, semelhante programa, nessa forma, revela-se irrealizável, e Tarski achou necessário definir recursivamente não "verdadeiro^0", mas "satisfaz^0", onde satisfação é uma relação que se estabelece (ou não) entre uma seqüência infinita de objetos extraídos do domínio de interpretação e uma fórmula aberta. É possível, então, definir "verdadeiro^0" como significando "satisfeito^0 por todas as seqüências" e "falso^0" como "satisfeito^0 por nenhuma seqüência" A definição de satisfação será explicada na próxima seção.

Um aspecto crucial de uma definição recursiva, no qual difere de uma definição explícita, consiste em nos permitir eliminar o termo definido em apenas alguns dos contextos nos quais ocorre com significado. Por exemplo, a definição recursiva do sinal de adição "+", pelas fórmulas bem conhecidas

$$x + 0 = x$$
$$x + y' = (x + y)'$$

(onde $'$ representa a operação sucessor), permite-nos reduzir o termo "5 + 7" a "12" (e, assim, eliminar inteiramente dele o sinal "+"), mas não nos permite eliminar "+" do termo

o número dos planetas + o número dos planetas,

embora presumivelmente esse seja um termo perfeitamente significativo. Não deveríamos dizer que "+" não está definido para esses argumentos (no sentido de não ter significado, ou de ser gramaticamente mal formado) somente por não estar definido para eles. Da mesma forma, o fato de o predicado "verdadeiro^0" não estar definido para sentenças que não pertencem a L^0 não deve nos encorajar a pensar que não faz sentido aplicá-lo a tais sentenças. Com efeito, é perfeitamente possível (usando a locução de Quine, por exemplo) construir uma sentença *U* que afirma de si mesma que ela não é verdadeira^0. Tal sentença não se encontra em L^0. E é somente para sentenças de L^0 que podemos derivar, a partir de nossa definição de "verdadeiro^0", uma sentença *(T)* apropriada; pois a sentença *(T)* para *S* de fato nos permite eliminar "verdadeira^0" de "*S* é verdadeira^0" Mas o Mentiroso somente nos envolve em problemas por ter uma sentença *(T)* contraditória. Na ausência de uma sentença *(T)* para *U*, não há nenhuma contradição.

Em geral, podemos requerer que tantos elementos do domínio satisfaçam uma fórmula quantas forem suas variáveis livres. Pense na fórmula

$$x < y \wedge y < z \wedge z < w \wedge w < u \wedge u < v \wedge \ldots$$

Podemos então tentar definir a propriedade de *ser satisfeita por um subconjunto finito do domínio*. Mas isso também não pode ser feito por uma definição manifestamente recursiva. Pois o conjunto {0, 1} presumivelmente satisfaz cada uma das fórmulas *A, B, C,* e também $A \wedge C$; mas, presumivelmente, não satisfaz $A \wedge B$. Pois x tem que ser 1 para satisfazer *A*, e nesse caso não haveria nada em {0, 1} para que y satisfizesse *B*. A solução de Tarski para essa dificuldade foi, em cada caso, atar cada variável da linguagem a um único elemento do domínio; e definir a propriedade *ser satisfeita por uma seqüência de tais elementos*. Desse modo, diz-se que a fórmula $v_j < v_k$ é satisfeita pela seqüência **m** se, e somente se, o j-ésimo elemento dessa seqüência for menor que o k-ésimo. (Iniciamos a contagem a partir do 0.) Uma vez que não há quota superior ao número de variáveis que possam ocorrer numa fórmula, temos que permitir seqüências de comprimento ilimitado. E Tarski portanto define a propriedade de *ser satisfeita por uma seqüência infinita extraída do domínio*. (Popper 58, p. 335-40, mostra como podemos proceder com seqüências finitas).

É fácil notar que a seqüência **m** satisfaz $\neg A$ se, e somente se, não satisfaz *A;* que **m** satisfaz $A \vee B$ se, e somente se, satisfaz pelo menos um, ou ambos, de seus componentes *A* e *B*; e similarmente para todos os outros compostos sentenciais. Mas essa recursividade manifesta não sobrevive ao considerarmos as sentenças quantificadas. Pois a fórmula $A = v_0 \leq v_1$ é satisfeita por cada uma das seqüências **m** = 0, 1, 0, 1, 0, ... e **n** = 1, 2, 1, 2, 1, ..., ao passo que o resultado de quantificá-la universalmente, $\forall v_1\, A = \forall v_1\, (v_0 \leq v_1)$, é satisfeito pela seqüência **m**, mas não pela **n**. A determinação de se uma seqüência **m** satisfaz ou não uma sentença universal $\forall x\, Fx$ depende não apenas de se **m** satisfaz Fx, mas também de se outras seqüências satisfazem Fx. Em nossa busca pela recursividade manifesta, somos portanto levados a considerar *a classe das seqüências que satisfazem uma fórmula A;* e é isto que denotaremos por *Sat*[*A*]. Note-se que, quando o domínio de interpretação é o sistema de números naturais, *Sat*[$\forall x\, (x \leq y)$] é o conjunto vazio, ao passo que

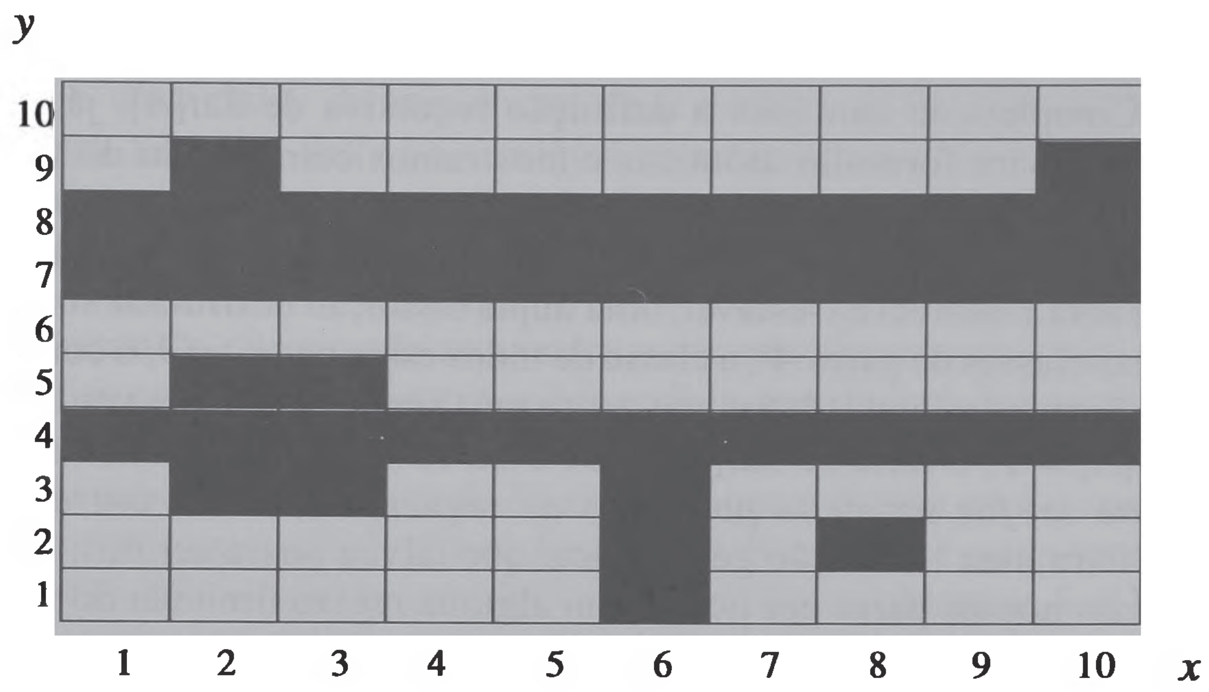
não contém x livre, pode ser derivada de A apenas, então B pode ser derivada de $\exists x\, A$. Isto é, $\exists x\, A$ é a fórmula mais forte, não contendo x livre, que pode ser derivada de A; desse modo, $Sat[\exists x\, A]$ deve ser a menor extensão x-estável de $Sat[A]$. Isso foi exatamente o que se sugeriu acima.

Completa-se com isso a definição recursiva de $Sat[A]$, já que a definimos para fórmulas atômicas e mostramos como, além disso, ela pode ser definida para os compostos sentenciais e quantificacionais. É claro que se A for uma sentença (uma fórmula sem variáveis livres), $Sat[A]$ será x-estável e y-estável, uma dupla distinção desfrutada somente por duas classes de pares: **P** a classe de todos esses pares, e $\varnothing$, o conjunto vazio. Seguindo Tarski, definimos agora uma sentença A como verdadeira se $Sat[A] = \mathbf{P}$, e falsa se $Sat[A] = \varnothing$. *Uma sentença é verdadeira se, e somente se, for satisfeita por todas as seqüências; caso contrário, é falsa.* Para uma ilustração geométrica, que talvez possa ser útil, representamos nossos pares por pontos em alguma região limitada do plano. Uma classe de tais pontos é x-estável (y-estável) se, e somente se, for uma paralela, plenamente estendida, ao eixo x (eixo y). $Sat[\exists x A]$ é assim obtida a partir de $Sat[A]$ estendendo-a ao longo do eixo x; $Sat[\forall x\, A]$ é aquela parte de $Sat[A]$ que já se encontra assim estendida. O diagrama mostra uma possível configuração, e como as classes x-estáveis de pares se assemelham a cilindros (ou a classes deles). Não há, é claro, qualquer dificuldade, exceto talvez de natureza gráfica ou intuitiva, em estender essas idéias a linguagens com mais do que duas variáveis, ou mesmo com uma quantidade infinita delas; simplesmente representamos nossas seqüências por pontos num espaço multidimensional. Se A for uma sentença, $Sat[A]$ se encontra plenamente estendida em toda dimensão, sendo, portanto, ou todo o espaço ou o conjunto vazio.

É fácil extrair do diagrama a verdade das sentenças:

Todos os estilos estão disponíveis no tamanho 4
Alguns estilos estão disponíveis no tamanho 5
O tamanho 6 não está disponível em nenhum estilo
Todo estilo está disponível em algum tamanho

e assim por diante. Que fórmula *A* o diagrama como um todo representaria?



Os blocos representam *Sat*[*A*]. *Sat*[$\forall x\, A$] é constituída pelas linhas 4, 7, e 8. *Sat*[$\exists x\, A$] é obtida preenchendo-se os espaços vazios nas linhas 1-5 e 7-9.

A prova de que a definição de verdade acima é materialmente adequada (isto é, que ela implica o esquema *(T)*) está longe de ser trivial, muito embora o resultado não possa ser colocado em dúvida.

Sabemos, em virtude da ameaça do Paradoxo de Cantor, que não podemos postular numa linguagem, de modo consistente, que o domínio de interpretação seja realmente um conjunto. Pela mesma razão, a classe de todas as seqüências extraídas do domínio não pode ser um conjunto. Contudo, para que a definição recursiva de *Sat* possa ser substituída por uma explícita, é necessário que todos os seus valores sejam conjuntos. Desse modo, é somente numa linguagem com suposições conjuntistas mais poderosas que as da linguagem objeto que se torna possível proporcionar uma definição explícita de satisfação ou de verdade.

Note que dizer que *A* é satisfeita por todas as seqüências em alguma interpretação não é afirmar que ela é verdadeira em todas as circunstâncias. Poderia facilmente haver outras interpretações nas quais ela fosse falsa. Assim, há uma nítida separação entre verdade e verdade lógica. A apresentação em O'Connor 53, p. 109, revela-se seriamente confusa a esse respeito. Outras apresentações da definição de Tarski, numa forma um tanto padrão, podem ser encontradas em Quine 65, Cap. 3, Platts 55, p. 16-33, Haack 25, p. 104-10. Tanto Quine (em impressões anteriores) e Platts tentam formulá-las sem o uso de seqüências na definição de satisfação, buscando escapar com *k*-uplas ordenadas. Essa tática não funciona se a própria linguagem objeto contiver certa teoria de conjuntos. (Mas ao menos Quine sabe a diferença entre pares ordenados, digamos, e seqüências de comprimento 2. Platts não parece saber. Note-se que aquilo que acima denominamos pares são seqüências, não apenas pares ordenados.) Para um tipo diferente de comentário, cf. Martin 50.

VI. O TEOREMA DE GÖDEL

Embora poucos filósofos (e desde Tarski virtualmente nenhum) tenham sido suficientemente ousados para esperar que pudesse haver um critério infalível para a verdade das sentenças fatuais, por muito tempo se supôs que em matemática, especialmente em aritmética elementar, tal critério pudesse existir. Pois se pensava que, em assuntos matemáticos, os teoremas, ou sentenças demonstráveis, devessem coincidir com as sentenças verdadeiras. O que Gödel mostrou, no mesmo ano em que o trabalho de Tarski sobre a verdade era apresentado à Sociedade Científica de Varsóvia, foi que tal esperança era vã: mesmo em aritmética elementar, as verdades não podem ser exatamente o mesmo que os teoremas. Se os axiomas da aritmética são consistentes, Gödel mostrou, há sentenças que podemos estabelecer como não sendo teoremas do sistema, embora possamos reconhecê-las como verdadeiras (e é trivial que, se os axiomas forem inconsistentes, alguns teoremas não serão verdades). Gödel provou esse resultado numa forma sem dúvida forte, realmente construindo uma sentença *G* que parece expressar uma verdade sobre os números naturais, e que, entretanto, demonstravelmente não é um teorema da aritmética (a menos que esta seja inconsistente). Fazendo uma suposição um pouco mais forte, de que a aritmética é ω-consistente (um pressuposto mais fraco que aquele de que os axiomas da aritmética são todos verdadeiros), Gödel foi capaz também de mostrar que *G* não é refutável na aritmética. No entanto, foi Rosser que completou o trabalho, estabelecendo que o pressuposto de consistência é completamente suficiente; sob essa condição, há uma sentença *G*+ (não muito diferente da *G* de Gödel) que é reconhecidamente verdadeira, embora se demonstre que ela não pode nem ser provada nem refutada no sistema. Em outras palavras, se a aritmética elementar for consistente, ela será incompleta (e, portanto, se for completa, será inconsistente).

A principal idéia da Prova de Gödel pode ser apresentada, como o foi pelo próprio, como um argumento da diagonal relacionado aos paradoxos semânticos. Gödel referiu-se ao Paradoxo de Richard, mas o Mentiroso pode ser usado da mesma maneira. Suponha que todas as sentenças verdadeiras sejam demonstráveis, e vice-versa. Então, o Mentiroso equivale a uma sentença que afirma sua própria indemonstrabilidade. E ela será demonstrável se, e somente se, for indemonstrável. Assim, se um enunciado de aritmética puder afirmar a sua própria indemonstrabilidade, as verdades e os teoremas não podem coincidir. À primeira vista, esse resultado pode não parecer muito sério, já que os enunciados da aritmética parecem fazer asserções sobre números, não sobre sentenças. Contudo, pelo método de *aritmetização,* ou *numeração de Gödel,* expressões da aritmética podem ser representadas, ou codificadas, por números, e as relações entre elas caminharão de maneira estritamente paralela às relações aritméticas. Isto é, um enunciado da aritmética formal não interpretada, além de ser interpretado como um enunciado acerca de números naturais, pode também ser interpretado como um enunciado acerca de itens sintáticos; acerca de expressões da aritmética e suas inter-relações. Gödel mostrou como construir uma sentença *G* que, naturalmente interpretada na esfera da sintaxe, afirma de si mesma que ela não é demonstrável.

Suponha que dispomos de uma lista $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, ... de todas as fórmulas contendo uma variável livre. Para cada número natural *n,* seja **n** o símbolo formal composto pelo algarismo **0** sucedido por *n* apóstrofos (símbolos como ´); **n** é chamado o *numeral* do número *n.* (Note-se que quando *n* é um número, **n** é um símbolo formal; 2 é um número, por exemplo, mas **0**´´ é um símbolo.) O resultado da substituição das variáveis livres em $\mathbf{R}_j$ pelo numeral do número *k* será representado por $\mathbf{R}_j[\mathbf{k}]$. Ora, é possível encontrar na lista infinita $\mathbf{R}_0$, ... uma fórmula $\mathbf{R}_q$ com duas propriedades: (i) naturalmente interpretada como sendo sobre fórmulas, $\mathbf{R}_q[\mathbf{n}]$ afirma que $\mathbf{R}_n[\mathbf{n}]$ não é demonstrável; (ii) se $\mathbf{R}_n[\mathbf{n}]$ for demonstrável na aritmética, então (contanto que esta última seja consistente) $\mathbf{R}_q[\mathbf{n}]$ não o será. Ora, considere $\mathbf{R}_q[\mathbf{q}]$. Se $\mathbf{R}_q[\mathbf{q}]$ for demonstrável, por (ii) ela não o será; logo, não o será. E se não for demonstrável, por (i) será verdadeira. $\mathbf{R}_q[\mathbf{q}]$, na verdade, é a sentença *G* de Gödel, uma sentença que, interpretada de modo natural, afirma sobre si mesma que ela não é demonstrável.

Como isso se relaciona com o argumento da diagonal? Imaginemos uma matriz duplamente infinita cujas linhas são indexadas pelas sucessivas fórmulas unárias $\mathbf{R}_j$, e cujas colunas são indexadas pelos sucessivos numerais **k**. Preenchamos cada célula com *S* ou *N* dependendo de se a sentença $\mathbf{R}_j[\mathbf{k}]$ é ou não um teorema da aritmética. Se agora substituirmos cada *S* na diagonal por *N*, e cada *N* por *S*, e escrevermos essa linha antidiagonal na base da matriz, nessa linha haverá *S* na coluna *n* se, e somente se, $\mathbf{R}_n[\mathbf{n}]$ não for demonstrável na aritmética. Pelo argumento da diagonal de Cantor, a linha antidiagonal difere, em um termo, de cada uma das linhas originais, não correspondendo, assim, a nenhuma fórmula $\mathbf{R}_j$. Nada pode ser feito a esse respeito. Todavia, o que Gödel fez foi focalizar não numa nova linha, mas numa linha $\mathbf{R}_n$ já existente; uma linha que (contanto que a aritmética seja ω-consistente) pode ser atingida da seguinte maneira: se $\mathbf{R}_n[\mathbf{n}]$ contém *N*, e esse fato pode ser provado na aritmética, então $\mathbf{R}_q[\mathbf{n}]$ contém *S;* caso contrário, contém *N*. Claramente, $\mathbf{R}_q[\mathbf{q}]$ não pode conter *S*, e o fato de que contém *N* não pode ser demonstrado na aritmética. Trata-se, pois, de uma verdade da aritmética que não é um teorema (supondo-se que a aritmética seja consistente).

A maior parte da Prova de Gödel encarrega-se de estabelecer que o sistema formal da aritmética de Peano (os axiomas são devidos a Dedekind; para um enunciado informal e uma discussão, veja Russell 69, Cap. 1) é de fato adequado para desenvolvermos o que usualmente denominamos *aritmética;* isto é, cálculos envolvendo números particulares. É claro que qualquer sistema axiomático que inclua o esquema de indução pode ser usado para muito mais que a elaboração de meros cálculos; também podemos demonstrar, em seu interior, teoremas aritméticos gerais, tais como a existência de números primos arbitrariamente grandes, ou o teorema de Lagrange de que todo número pode ser expresso como a soma de quatro quadrados. Nisso ele difere manifestamente de um computador digital como normalmente encontrado. O *hardware* de um microcomputador usual é construído para fazer aritmética com grande velocidade, mas você não encontrará nenhum modo rápido de verificar em seu PC que todo número é a soma de quatro quadrados; ou mesmo um teorema aritmético trivial, como a lei comutativa da adição ($\forall x\ \forall y\ (x+y = y+x)$). Contudo, os computadores podem ser programados para demonstrar tais coisas, contanto que alguém lhes diga quais são os Axiomas de Peano e as regras de inferência. O que ocorre é que as manipulações lógicas de fórmulas são traduzidas em manipulações aritméticas de seus números de Gödel (ou códigos). E, já que as regras formais da derivação lógica são completamente mecânicas, fica claro que determinar se uma seqüência de fórmulas constitui ou não uma prova válida de sua última linha é algo que um computador corretamente programado poderia verificar. Em outras palavras, trata-se de um problema aritmético, ou computacional, não algébrico, ou geral. Entretanto, as questões são bastante diferentes se desejamos não apenas verificar a correção de uma pretensa prova, mas determinar se uma sentença particular *A* é *demonstrável* ou não; se ela é um *teorema*. Embora a produção de uma demonstração ratifique *A* como sendo um teorema, em geral não há nenhuma forma pela qual uma simples máquina de cálculo possa estabelecer que uma pretendente não é um teorema. Ela será capaz de mostrar, acerca de qualquer demonstração proposta de *A*, que ela não é válida; mas isso não é o mesmo que mostrar que não há tal prova. Com efeito, o resultado de Gödel estabelece exatamente isto: que há uma fórmula unária **F** tal que, para todo número *n*, é possível demonstrar **F[n]**; contudo, não podemos demonstrar a generalização universal $\forall n\ \mathbf{F}n$. É graças a isso que a célula $\mathbf{R}_n$**[n]** pode conter *N*, o que significa que $\mathbf{R}_n$**[n]** não é um teorema da aritmética, embora esse fato mesmo não seja um teorema da aritmética; e, assim, $\mathbf{R}_q$**[n]** também contém *N*. Essa deve ser a situação na diagonal principal, quando *n* é idêntico a *q*.

Passaremos agora a mostrar como identificar a fórmula $\mathbf{R}_n$ na lista $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_1$, ... Assumiremos doravante que se uma pretensa demonstração realmente prova uma dada sentença, ou não a prova, constitui um problema que pode ser solucionado por mero cálculo; e, portanto, que, se a aritmética formal for adequada para tal cálculo (como Gödel argumentou que é), será possível verificar tais afirmações no interior do próprio sistema formal. Para tornar isso claro, estendamos um pouco nossa notação acima; se $\mathbf{A}(x, y)$ for uma fórmula com duas variáveis livres, $\mathbf{A}[\mathbf{n}, \mathbf{k}]$ será aquilo que ela se torna quando substituímos x (onde livre) pelo numeral de n, e y (onde livre) pelo numeral de k. Nossa suposição acerca da habilidade do sistema de verificar a correção (e incorreção) de supostas demonstrações pode ser assim apresentada. Deve haver alguma fórmula da linguagem formal, que abreviaremos por **Prov** (x, y), que satisfaz as seguintes condições:

(i) se k é o número de Gödel de uma prova da sentença $\mathbf{R}_n[\mathbf{n}]$, então $\mathbf{Prov}[\mathbf{n}, \mathbf{k}]$ é um teorema;

(ii) se k não é o número de Gödel de uma prova da sentença $\mathbf{R}_n[\mathbf{n}]$, então $\neg\mathbf{Prov}[\mathbf{n}, \mathbf{k}]$ é um teorema.

Pode-se dizer que uma fórmula **Prov** que satisfaça (i) e (ii) *representa* a relação numérica: k é o número de uma prova que demonstra $\mathbf{R}_n[\mathbf{n}]$. Pois, ao provar ou refutar a sentença formal $\mathbf{Prov}[\mathbf{n}, \mathbf{k}]$, devemos ser capazes de determinar se uma seqüência de fórmulas com número de Gödel k é ou não uma prova de $\mathbf{R}_n[\mathbf{n}]$. O estabelecimento da questão relativa a $\mathbf{Prov}[\mathbf{n}, \mathbf{k}]$ constituiria uma *representação* formal do cálculo numérico necessário. Considere agora a fórmula $\neg\exists y\mathbf{Prov}(x, y)$. Ela possui uma única variável livre, e, assim, deve ser uma $\mathbf{R}_q$, para algum q. A sentença que nos interessa é $\mathbf{R}_q[\mathbf{q}]$, que podemos escrever, de modo mais detalhado, como $\neg\exists y\mathbf{Prov}[\mathbf{q}, y)$. Se compreendermos essa sentença em termos das condições de representação (i) e (ii), notaremos que ela afirma que não há um número y que seja um número de Gödel de uma demonstração de $\mathbf{R}_q[\mathbf{q}]$; isto é, $\mathbf{R}_q[\mathbf{q}]$ afirma sua própria indemonstrabilidade.

Para vermos que, contanto que o sistema seja consistente, $\mathbf{R}_q[\mathbf{q}]$ não é demonstrável, não precisamos nos preocupar com o modo como ela foi interpretada. Basta empregar (i). Pois suponha que, afinal, a sentença $\mathbf{R}_q[\mathbf{q}]$ fosse demonstrável. Então, $\neg\exists y\mathbf{Prov}[\mathbf{q}, y)$ seria um teorema.

Nesse caso, haveria uma demonstração dele, com número de Gödel *k*, digamos; conseqüentemente, por (i), **Prov[q, k]** seria um teorema. Disso se segue que $\exists y$**Prov[q,** *y*) também seria um teorema, dado que GE é uma regra válida no interior do sistema. Logo, o sistema seria inconsistente. Usando (ii), também é possível mostrar que $\mathbf{R}_q$**[q]** não é refutável, contanto que assumamos que o sistema possua a seguinte propriedade de ω-consistência: se para quaisquer numerais **k** e fórmulas **A** for possível demonstrar **A[k]**, então não será possível demonstrar $\exists y \neg \mathbf{A}y$. Com efeito, suponha que possuímos uma refutação de $\mathbf{R}_q$**[q]**; por consistência, nenhum *k* poderia ser o número de Gödel de uma demonstração de $\mathbf{R}_q$**[q]**; assim, para todo *k*, teríamos, por (ii), que $\neg$**Prov[q, k]** é um teorema. Seguir-se-ia, pela ω-consistência, que não poderíamos demonstrar que $\exists y$**Prov[q,** *y*). Mas isso implicaria, contrariamente à suposição feita, que não poderíamos refutar $\mathbf{R}_q$**[q]**.

Em artigo posterior, Rosser mostrou que a suposição de ω-consistência poderia ser enfraquecida pela mera consistência. Ele construiu uma sentença mais complexa que $\mathbf{R}_q$ (em linhas gerais, uma que afirma sobre si mesma que, para qualquer demonstração, existe uma refutação com um número de Gödel menor) sobre a qual se pode mostrar que ela poderia ser demonstrada se, e somente se, pudesse ser refutada. O predicado que Rosser emprega nessa construção pode ser pensado como uma linha antidiagonal numa matriz quadrada, onde *S* significa que $\mathbf{R}_j$**[k]** é demonstrável, e *N*, que é refutável. Para detalhes, veja Kleene 37, p. 204-13, ou Rosser 67. Demonstrações mais próximas da própria exposição de Gödel podem ser encontradas em De Long 15, p. 165-87, e Nagel e Newman 52, p. 68-102. Veja também Hofstadter 31, p. 438-64. Uma prova mais intimamente relacionada à computabilidade se encontra em Charlesworth 11. Engenhosa coleção de *puzzles* relacionados ao tema pode ser encontrada em Smullyan 74, especialmente na parte quatro.

Tem-se afirmado em diversos lugares, mas de forma mais notável em Lucas 43, caps. 24-30 (resumindo diversos anos de discussão), que o teorema de Gödel mostra que não podemos ser identificados a máquinas de cálculo. A tese de Lucas foi contestada de modo ainda mais freqüente e fervoroso; por exemplo, em Webb 82 e 83, p. 229-38, Benacerraf 3, Good 20 e 21, e, recentemente, Bowie 7. Referências a outras críticas podem ser encontradas neste último artigo. A questão é mais sutil do que certos autores parecem ter notado. Em particular, não é claro que as máquinas devam ser identificadas com sistemas formais, e não com predicados que podem, de alguma maneira, ser expressos em tais sistemas.

Referências Bibliográficas

1. BARWISE, J. e ETCHEMENDY, J. *The Liar.* Oxford University Press, 1987.

2. BELNAP, N.P. "Gupta's Rule of Revision Theory of Truth" In: *Journal of Philosophical Logic,* 11, 1982.

3. BENACERRAF, P. "God, the Devil, and Gödel" In: *The Monist,* 51, 1967.

4. BETH, E.W. *The Foundations of Mathematics.* North-Holland, 1959; Harper, 1966.

5. BLACK, M. "The Semantic Definition of Truth" In: *Language and Philosophy.* Cornell University Press, 1949; MACDONALD, M. (ed.). *Philosophy and Analysis.* Blackwell, 1954; *Analysis,* 8, 1948.

6. _______. *Caveats and Critiques.* Cornell University Press, 1975.

7. BOWIE, G.L. "Lucas' Number Is Finally Up" In: *Journal of Philosophical Logic,* 11, 1982.

8. BURGE, T. "Semantical Paradox" In: *Journal of Philosophy,* 76, 1979; reimpresso em MARTIN 47, p. 83-117.

9. CARGILE, J. *Paradoxes: A Study in Form and Predication.* Cambridge University Press, 1979.

10. CHAMPLIN, T.S. *Reflexive Paradoxes*. Routledge, 1988.

11. CHARLESWORTH, A. "A Proof of Gödel's Theorem in Terms of Computer Programs" In: *Mathematics Magazine,* 54, maio de 1981.

12. CHURCH, A. "Comparison of Russell's Resolution of the Semantical Antinomies with that of Tarski" In: *Journal of Symbolic Logic,* 41, 1976; reimpresso em MARTIN 47, p. 289-306.

13. COPI, I.M. *The Theory of Logical Types*. Routledge and Kegan Paul, 1971.

14. DAVIDSON, D. "True to the Facts" In: *Journal of Philosophy,* 66, 1969; Capítulo 3 de *Inquiries into Truth and Interpretation*. Clarendon Press, 1984.

15. DE LONG, H. *A Profile of Mathematical Logic*. Addison-Wesley, 1970.

16. ETCHEMENDY, J. "Tarski on Truth and Logical Consequence" In: *Journal of Symbolic Logic,* 51, 1988.

17. FIELD, H. "Tarski's Theory of Truth" In: *Journal of Philosophy,* 69, 1972.

18. _______. "The Deflationary Conception of Truth" In: MACDONALD, G. e WRIGHT, C. (eds.). *Fact, Science and Morality*. Blackwell, 1986.

19. FREGE, G. "The Thought: A Logical Inquiry" Trad. de A.M. Quinton. In: STRAWSON, P.F. (ed.). *Philosophical Logic*. Oxford University Press, 1967; originalmente publicado, na trad. de P.T.Geach, em *Mind,* 65, 1956; e republicado em GEACH, P.T. (ed.). *Logical Investigations*. Blackwell, 1977.

20. GOOD, I.J. "Human and Machine Logic" In: *British Journal for the Philosophy of Science,* 18, 1967.

21. _______. "Gödel's Theorem Is a Red Herring". In: *The British Journal for the Philosophy of Science,* 19, 1969.

22. GRAYLING, A.C. *An Introduction to Philosophical Logic*. Harvester, 1982.

23. GUPTA, A. "Truth and Paradox" In: *Journal of Philosophical Logic,* 11, 1982; reimpresso em MARTIN 47, p. 175-235.

24. HAACK, S.W. "Is It True What They Say About Tarski?" In: *Philosophy,* 51, 1976.

25. _______. *Philosophy of Logics.* Cambridge University Press, 1978.

26. HANSSON, B. "Paradoxes in a Semantic Perspective" In: HINTIKKA, J., NIINILUOTO, I. e SAARINEN, E. (eds.). *Essays on Mathematical and Philosophical Logic.* Reidel, 1978.

27. HEALY, P. "On Popper on Truth" In: *Auslegung,* 12, 1986.

28. HERZBERGER, H.G. "Dimensions of Truth" In: HOCKNEY, D., HARPER, W. e FREED, B. (eds.). *Contemporary Research in Philosophical Logic and Linguistic Semantics.* Reidel, 1975.

29. _______ "Notes on Naive Semantics" In: *Journal of Philosophical Logic,* 11, 1982; reimpresso em MARTIN 47, p. 135-74.

30. HODGES, W. "Truth in a Structure" In: *Proceedings of the Aristotelian Society,* NS 86, 1986.

31. HOFSTADTER, D.R. *Gödel, Escher, Bach.* Harvester, 1979; Penguin, 1980.

32. HUGLY, P. e SAYWARD, C. "The Lessons of the Liar" In: *Theory and Decision,* 11, 1979.

33. JENNINGS, R.C. "Popper, Tarski and Relativism" In: *Analysis,* 43, 1983.

34. _______. "Tarski – an Ambiguity" In: *Analysis,* 46, 1986.

35. _______. "Tarski – a Dilemma". In: *Inquiry,* 30, 1987.

36. KEUTH, H. "Tarski's Definition of Truth and the Correspondence Theory" In: *Philosophy of Science,* 45, 1978.

37. KLEENE, S.C. *Introduction to Metamathematics.* Van Nostrand, 1952.

38. KNEALE, W.C. "Russell's Paradoxes and Some Others" In: *British Journal for the Philosophy of Science,* 22, 1971.

39. _______. "Propositions and Truth in Natural Languages" In: *Mind,* 81, 1972.

40. KOKOSZYŃSKA, M. "A Refutation of the Relativism of Truth" In: *Studia Philosophica,* 1949-50.

41. KRIPKE, S. "Outline of a Theory of Truth". In: *Journal of Philosophy,* 72, 1975; reimpresso em Martin 47, p. 53-81.

42. LEMMON, E.J. *Beginning Logic.* Nelson, 1965.

43. LUCAS, J.R. *The Freedom of the Will.* Oxford University Press, 1970.

44. MACKIE, J.L. "Metaphysical Common Sense" In: *British Journal for the Philosophy of Science,* 23, 1972.

45. _______. *Truth, Probability and Paradox.* Oxford University Press, 1973.

46. MACKIE, J.L. e SMART, J.J.C. "A Variant of the 'Heterological Paradox' " In: *Analysis,* 13, 1953.

47. MARTIN, R.L. (ed.). *Recent Essays on Truth and the Liar Paradox.* Oxford University Press, 1984.

48. MARTIN, R.M. "Truth and Its Illicit Surrogates" In: MARTIN, R.M. *Pragmatism, Truth, and Language,* Reidel, 1979; originalmente publicado em *Neue Hefte für Philosophie,* 2.

49. _______. "The Truth about Kripke's 'Truth' " In: MARTIN, R.M. *Pragmatism, Truth, and Language.* Reidel, 1979.

50. _______. "Some Reminders Concerning Truth, Satisfaction, and Reference" In: MARTIN, R.M. *Pragmatism, Truth, and Language.* Reidel, 1979; originalmente publicado em *The Monist,* 58, 1976.

51. MILLER, D.W. "Russell the Logician". In: *Manifold,* 6, março de 1970.

52. NAGEL, E. e NEWMAN, J.R. *Gödel's Proof.* Routledge and Kegan Paul, 1959.

53. O'CONNOR, D.J. *The Correspondence Theory of Truth.* Hutchinson, 1975.

54. OREY, S. Review of Ryle 70. In: *Journal of Symbolic Logic,* 20, 1955.

55. PLATTS, M. *Ways of Meaning.* Routledge and Kegan Paul, 1979.

56. POPPER, K.R. "Self-Reference and Meaning in Ordinary Language" In: *Conjectures and Refutations.* Routledge and Kegan Paul, 1963.

57. _______. *Conjectures and Refutations.* Routledge and Kegan Paul, 1963.

58. _______. *Objective Knowledge.* Oxford University Press, 1972.

59. _______. "Schlesinger on My Paper on Self-Reference and Meaning" In: SCHILPP, P.A. (ed.). *The Philosophy of Karl Popper.* Open Court, 1974.

60. _______. "Is It True What She Says About Tarski?" In: *Philosophy,* 54, 1979.

61. PRIOR, A.N. "Some Problems of Reference in John Buridan" In: FINDLAY, J.N. (ed.). *Studies in Philosophy.* Oxford University Press, 1966.

62. _______. *Formal Logic.* Oxford University Press, 1972.

63. QUINE, W.V. "The Ways of Paradox" In: QUINE, W.V. *The Ways of Paradox.* Harvard University Press, 1966; originalmente, "Paradox" In: *Scientific American,* 206, 1962.

64. _______. *Set Theory and Its Logic.* Edição revista, Harvard University Press, 1969.

65. _______. *Philosophy of Logic.* Prentice-Hall, 1970; segunda edição, 1981.

66. RAMSEY, F.P. *The Foundations of Mathematics.* Routledge and Kegan Paul, 1931.

67. ROSSER, J.B. "An Informal Exposition of Proofs of Gödel's Theorems and Church's Theorem" In: *Journal of Symbolic Logic,* 4, 1939.

68. RUSSELL, B.A.W. *The Problems of Philosophy.* Williams and Norgate, 1912.

69. _______. *Introduction to Mathematical Philosophy.* Allen and Unwin, 1919.

70. RYLE, G. "Heterologicality" In: MACDONALD, M. (ed.). *Philosophy and Analysis.* Blackwell, 1954; originalmente publicado em *Analysis,* 11, 1951.

71. SAINSBURY, M. *Paradoxes.* Cambridge University Press, 1988.

72. SCHLESINGER, S. "Popper on Self-Reference" In: SCHILPP, P.A. (ed.). *The Philosophy of Karl Popper.* Open Court, 1974.

73. SIEGEL, H. "Tarski a Relativist?" In: *Analysis,* 45, 1985.

74. SMULLYAN, R. *The Lady or the Tiger?* Penguin, 1982.

75. SOAMES, S. "What Is a Theory of Truth?" In: *Journal of Philosophy,* 81, 1984.

76. SOBOCIŃSKI, B. "L'Analyse de l'Antinomie Russellienne par Leśniewski" In: *Methodos,* 1, 1949; 2, 1950.

77 STRAWSON, P.F. "Truth" In: MACDONALD, M. (ed.). *Philosophy and Analysis.* Blackwell, 1954; originalmente publicado em *Analysis,* 9, 1949.

78. TARSKI, A. "The Concept of Truth in Formalized Languages" Tradução de J.H. Woodger. In: TARSKI, A. *Logic, Semantics, Metamathematics.* Oxford University Press, 1956; J. CORCORAN (ed.). Hackett, 1983.

79. ________. "The Semantic Conception of Truth" In: LINSKY, L. (ed.). *Semantics and the Philosophy of Language.* University of Illinois Press, 1952; FEIGL, H. e SELLARS, W. (eds.). *Readings in Philosophical Analysis.* Appleton Century Crofts, 1949.

80. TENNANT, N. "From Logic to Philosophies (review of S. Haack: *Philosophy of Logics)*" In: *British Journal for the Philosophy of Science,* 32, setembro de 1981.

81. THOMSON, J.F. "On Some Paradoxes". In: BUTLER, R.J. (ed.). *Analytical Philosophy.* Blackwell, 1962.

82. WEBB, J. "Metamathematics and the Philosophy of Mind" In: *Philosophy of Science,* 35, 1968.

83. ________. *Mechanism, Mentalism, and Metamathematics.* Reidel, 1980.

84. WHITEHEAD, A.N. e RUSSELL, B.A.W. *Principia Mathematica.* Segunda edição, Cambridge University Press, 1925.