Intuicionismo e Verificação*

Gilles Gaston Granger**

Resumo: Neste artigo, apresentamos o intuicionismo como uma atitude epistêmica geral, caracterizada pelo rigor de suas exigências de verificação não apenas na matemática e na lógica, mas em todo conhecimento científico.
Palavras-chave: Intuicionismo – verificação – infinito.

Gostaria de apresentar o intuicionismo não como uma doutrina específica e de alcance essencialmente restrito à matemática, mas como uma *atitude epistêmica geral*, marcada pela preocupação de dar um sentido preciso e diversificado à exigência de verificação, que é a característica própria do conhecimento científico.

Desse ponto de vista, cumpre antes de mais nada observar que o nome "intuicionismo" convém mal até mesmo à doutrina original, concernente a uma filosofia da matemática. Para seu iniciador, Brouwer, absolutamente não se trata de fundar a matemática sobre uma "intuição" dirigida a objetos, como a escolha da palavra talvez fizesse supor, mas sobre atos de pensamento, considerados como efetivamente executáveis e capazes de exibir objetos. Sem dúvida, o adjetivo justifica-se na medida em que se pretenda opor essa concepção à de

* Tradução de Luiz Henrique Lopes dos Santos.

** Professor do Collège de France e professor convidado do Departamento de Filosofia da USP.

um "formalismo" extremo, segundo a qual a matemática nada mais seria que um jogo de símbolos. Entretanto, a atitude intuicionista, como se verá, não teria como excluir as manipulações formais, e deve-se dizer mesmo que ela só ganha sentido num universo formal de pensamento.

O que de fato a caracteriza é o rigor de suas exigências acerca das justificações requeridas, e as tentativas que impõe de descrever com precisão as maneiras como os enunciados são estabelecidos, como são verificadas as propriedades dos objetos de pensamento e como é apresentada a existência deles. Para fazer aparecer claramente a natureza dessa preocupação fundamental e o interesse de suas manifestações na ciência, começaremos por discutir brevemente suas origens matemáticas; em seguida, proporemos para ela uma interpretação no próprio seio da atividade lógica; procuraremos finalmente esboçar o sentido e o alcance dessa orientação intuicionista no pensamento científico em geral.

O intuicionismo em matemática

1) O intuicionismo responde a uma questão que só se levanta com a consideração do infinito.

Para os geômetras da Antiguidade, o infinito tem essencialmente o sentido do indeterminado. Eludem-no na completa medida do possível: objetos geométricos são explicitamente construídos com régua e compasso, por exemplo; o raciocínio por absurdo é usado nas quadraturas de Arquimedes, evitando-se o recurso a uma infinidade de cortes. O terceiro excluído pode então desempenhar seu papel sem nenhuma restrição.

Na época contemporânea, Poincaré é considerado, sob certos aspectos, um campeão do intuicionismo em filosofia da matemática: o princípio da indução aritmética é formulado por ele como um dado intuitivo originário (Poincaré 10, p. 41). Observa-se, porém, que essa "intuição" se refere a uma *atividade efetiva*, e a uma *construção de objeto*. Não é um princípio empírico nem uma convenção. Do mesmo modo, o objeto geométrico, ainda que enseje convenções a seu respeito, depende, para Poincaré, de uma construção que repousa sobre a noção — não convencional — de grupo, norma de uma atividade.

2) *É a oposição Brouwer-Hilbert que confere à noção de intuicionismo seu sentido moderno.*

Mas trata-se então fundamentalmente, nos dois casos, de uma concepção de *verificação* que acarreta uma concepção do objeto matemático.

Segundo Hilbert:

> "É preciso que os objetos sejam percebidos em todas as suas partes e que sua ocorrência, seu caráter distinto, sua sucessão ou sua justaposição, se apresentem à intuição ao mesmo tempo que esses objetos, como algo de imediato ... Os objetos de nosso estudo serão, pois, os próprios sinais concretos." (*Sobre o infinito*, apud Van Heijenoort 11, p. 376)

Vem daí a restrição dos procedimentos demonstrativos *últimos* ao finito; para tanto, Hilbert examina o trabalho matemático em sua forma, na medida em que concerne a seqüências efetivas de símbolos, cujo número é necessariamente finito:

> "a inferência segundo o conteúdo é substituída pela manipulação formal de sinais de acordo com regras" (*id.,ibidem*, p.379)

Certos objetos essenciais à matemática introduzem por certo o infinito; são todavia objetos "ideais", "maneiras de falar", diretamente inverificáveis, mas que não intervêm, eles próprios, na economia da demonstração. A teoria da demonstração desses procedimentos de demonstração, ou "metamatemática", permanecerá estritamente finitista, sem que esse finitismo seja exigido das próprias demonstrações; ela tentará mostrar a não-contradição dos raciocínios referentes aos *conteúdos objetivos*, que constituem na verdade, segundo Hilbert, a realidade da matemática. Quando Gödel demonstrou a impossibilidade de um programa assim concebido, Hilbert disso conclui ser preciso não renunciar às metademonstrações, mas, pelo contrário, reforçar as exigências metamatemáticas, e responde que se havia tão-somente

> "mostrado que o ponto de vista finitista deve ser explorado de uma maneira mais precisa que a exigida pela consideração do formalismo elementar" (Hilbert 7, prefácio de 1934)[1].

Para Brouwer, o problema também é o das condições de verificação: a única verificação das propriedades matemáticas é, segundo ele, a que se dá por "construção introspectiva" (Brouwer 1). Tomemos, como exemplo simples, a construção do contínuo segundo seu discípulo Heyting (5).

Enumeram-se os racionais segundo um procedimento determinado; por exemplo:

0;1;1/2;1/3,2/3;1/4,3/4;1/5,2/5,3/5,4/5;1/6 ...

Define-se um corte atribuindo-se a cada racional uma posição à esquerda ou à direita do real a ser definido, respeitada a ordem dos racionais. Deixando-se indeterminada a posição de um racional, fixa-se assim — provisoriamente e por aproximações sucessivas — uma vizinhança do real, que vem a ser dinamicamente construído.

Uma tal concepção do trabalho matemático exclui a esperança na constituição de uma "linguagem mais segura", que permitisse evitar os erros e as confusões; pelo contrário, é impossível garantir *a priori* uma formulação não-contraditória, e é preciso, antes de tudo, tornar consciente a *existência translingüística* dos objétos matemáticos (Brouwer 3, p.417).

3) *No entanto, a oposição entre Hilbert e Brouwer constitui-se a partir de um mesmo zelo pela verificação.*

Ambos invocam Kant; para Hilbert, o infinito é "uma idéia, um conceito da razão que ultrapassa toda experiência possível e completa o concreto, de maneira a formar uma totalidade" (*Sobre o infinito*, apud Van Heijenoort 11, p.302).

Brouwer, por seu lado, abandona o *a priori* kantiano das formas espaciais, mantendo, porém, o *a priori* temporal (Brouwer 2). Hilbert transfere a operatória efetiva para o metanível das operações lógicas com os sinais e admite objetos matemáticos "ideais"; para Brouwer, os objetos matemáticos permanecem imanentes a uma operatória que lhes é própria.

Seria ainda possível mostrar, no pormenor, que as recentes filosofias "construtivistas" da matemática buscam um meio-termo entre essa tese intuicionista da imanência radical e um finitismo mais acomodatício, que confere valor de verificação às demonstrações de não-contradição.

O momento lógico do intuicionismo.

1) *Malgrado a tese que relega a lógica ao papel extrínseco de modalidade de expressão, os intuicionistas matemáticos ainda assim construíram uma lógica.*

"A lógica nem é o fundamento da matemática nem é indispensável para sua construção" (Heyting 6).

Para Brouwer, ela não é mais que uma roupagem, um "invólucro lingüístico" da matemática. Não obstante, pode-se ter interesse pela "meaning" dessa linguagem, ou seja, como expõe Dummett, pelas condições de reconhecimento das provas (Dummett 4). A "lógica" intuicionista será, pois, uma *matemática* desses objetos específicos que são as "provas efetivas", apresentadas numa linguagem.

2) *O cálculo intuicionista deve então ser interpretado como um desenvolvimento das "razões para asserir",*

ou para considerar que um problema está resolvido (Kolmogorov 8).

Se designamos por $\perp$ um enunciado atômico cuja impossibilidade seja diretamente apreendida, a negação "não A" é definida por: "têm-se razões para transformar a asserção A na asserção de $\perp$". Nessas condições, $\neg\neg A \rightarrow A$ não é válida. Do mesmo modo, de $\neg\forall x \neg A(x)$ não se pode deduzir $\exists x\, A(x)$ Resulta daí que o terceiro excluído não é válido e os conectivos não se reduzem uns aos outros.

3) Qual é a relação com os cálculos clássicos?

Toda proposição que se possa provar no sentido intuicionista pode-se provar classicamente, *a fortiori*; sendo a recíproca falsa, pode-se dizer, *nesse sentido*, que o cálculo clássico é mais forte que o intuicionista. Mas Gödel mostra também que todas as proposições clássicas podem ser traduzidas em proposições intuicionistas (assinaladas pelo asterisco), por conta de um enfraquecimento de sentido, conforme o dicionário:

Class.		**Intuic.**	
	p		$p^* = \neg\neg p$
	$(A \vee B)$		$(A \vee B)^* = \neg(\neg A^* \wedge \neg B^*)$
	$(\exists x\, A)$		$(\exists x\, A)^* = \neg\forall x \neg A^*$

Como há proposições intuicionistas que não são traduções de proposições clássicas, o cálculo intuicionista é, *nesse sentido*, mais forte que o clássico. A comparação da "força" dos dois sistemas é, pois, inteiramente relativa.

Por outro lado, de um ponto de vista semântico, mostra-se que não pode haver tabelas-*n* que definam os conectivos intuicionistas, para n finito. No entanto, caso se queira defini-los de uma maneira comparável àquela como se determinam os conectivos clássicos, pode-se, por exemplo, fazer uso dos Modelos de Kripke, que *introduzem uma estrutura, postulam propriedades do "objeto" proposição.*

4) A "lógica" intuicionista não é, pois, uma teoria de grau zero do objeto formal.

De resto, ela só se distingue da lógica clássica caso se introduza a noção *objetual* de infinito. O infinito não está totalmente ausente da lógica proposicional clássica, mas nela é puramente *virtual*, simples possibilidade operatória de iteração. A abstração extrema da lógica *stricto sensu* consistiria, pois, numa neutralização no que concerne a esse ponto da distinção entre virtual e "real". A lógica clássica das proposições representa essa camada profunda e governa todos os outros cálculos, para os quais funciona como sistema de meta-regras fundamentais. Dessa perspectiva, que propomos, pode-se dizer que a dissociação entre um regime clássico e um intuicionista só pode aparecer com um certo enriquecimento dos objetos formais (e a oposição finito/não-finito, em particular, com os graus do não-finito), primeiro momento de uma descida à empiria. Qual vem a ser, nesse caso, a atitude intuicionista?

A atitude intuicionista nas ciências da empiria.

1) Em What are philosophical systems? *e* Necessité ou contingence, *J. Vuillemin faz corresponder ao intuicionismo os juízos "de método", em que se produz a "determinação do termo singular pela unidade sintagmática do enunciado".*

Nos tipos "dogmáticos" de juízo, do fato

> "de que um indivíduo não é subsumido sob um universal, inferimos que aquilo que o representa fica fora do círculo de representação do universo. Pelo contrário, com o juízo de método perdemos o direito de fechar o universo do discurso sempre que não dispusermos de um procedimento de construção. O universo fechado é substituído por um universo aberto e determinado apenas pela regra subjetiva de construção do individual."(Vuillemin 12, pp. 82-83)

Ora, nas ciências da experiência esse tipo de juízo desempenha um papel essencial.

Nesse caso, verificar não consiste simplesmente em confrontar um vivido singular dado com um conceito, mas em *produzir conceitualmente* uma representação de vividos singulares, levando em conta não apenas a maneira como se *entra em contacto* com os objetos, mas também a *legitimidade e a factibilidade* da construção dos conceitos que os representam. A atitude "operacionalista" aparece então como forma extrema do intuicionismo assim entendido: o "verdadeiro" se reduz ao que pode ser efetivamente executado. No entanto, parece-nos que o intuicionismo em ato da ciência se atém, a bem dizer, à exigência de procedimentos *executáveis num campo operatório determinado*.

Desse ponto de vista, levantaremos, sem desenvolvê-las, três questões epistemológicas capitais.

2) *Qual é o estatuto dos conceitos abstratos "ideais", no sentido de Hilbert, nas ciências da empiria?*

No curso do progresso do conhecimento, eles aparecem como correlatos de operações executáveis em níveis superiores de abstração. A matemática determina então, nesses níveis, sistemas variados de correlação operacões-objetos, que satisfazem aos "cadernos de encargos" formulados pelo cientista no nível da empiria. As regras desses sistemas, ainda que muito gerais, não estão todavia no mesmo plano que a lógica, pois refletem um conteúdo. Portanto, qualificaremos de "pseudológicas" as tentativas de pôr em forma essas estruturações de objetos específicos. É o caso das "lógicas" quânticas, cálculos que concernem a propriedades de objetos estranhos ao senso comum e nos quais a manipulação das proposições é regida, sob todos os aspectos, pelas regras de uma lógica no sentido estrito, clássica (ou, quando se é mais exigente, intuicionista — no sentido que indicamos).

3) *Qual é o estatuto da aproximação relativamente às exigências intuicionistas?*

Os procedimentos de aproximação correspondem a um passo de alguma maneira inverso ao que conduz à formação dos conceitos "ideais". Trata-se agora de passar de um certo nível de abstração a um nível operatório mais concreto. As exigências "intuicionistas" concernem aqui às condições da passagem. Formular-se-ão, por exemplo, condições referentes à possibilidade de usar noções matemáticas como a de continuidade; delimitar-se-ão intervalos de variação das grandezas dentro dos quais as operações abstratas terão uma imagem empírica admissível etc.

4) Qual é o estatuto dos enunciados probabilísticos?

Eles não dizem respeito diretamente a eventos, mas a *meta-eventos* (seqüências de eventos virtuais). As iterações dessa manobra tornam-se imediatamente necessárias (por exemplo, a partir do enunciado do teorema de Bernoulli ou do lema de Bienaymé-Tchebychev): consideram-se freqüências de eventos virtuais, depois freqüências de seqüências virtuais de eventos virtuais. A atitude intuicionista, tal como a descrevemos, conduz então à distinção clara desses planos de abstração e à determinação precisa das condições de verificação empírica dos enunciados concernentes a tais eventos virtuais. Reconhecem-se aqui situações epistemológicas comparáveis àquelas de que se originaram as teses intuicionistas na matemática pura: um infinito *fictício* aparece nos raciocínios e a probabilidade igual a 1 não equivale à certeza, tanto quanto a probabilidade nula não equivale à impossibilidade.

Conclusão

Assim, se é fato que foi na matemática que o movimento intuicionista se manifestou como doutrina explícita, vê-se que a orientação que ele testemunha pode, contudo, ser reconhecida como um dos componentes essenciais da atitude científica.

Não na medida, acreditamos nós, em que se podem formular as regras de uma lógica intuicionista que fosse ao mesmo tempo mais estrita e mais fecunda que a clássica; pois, enquanto governa as formas do pensamento demonstrativo, *aquém de toda especificação de objetos*, ela confunde-se com a clássica. Quando se enriquece, porém, o conteúdo dos objetos de conhecimento, quando o infinito, já na própria matemática, aparece como objeto de pensamento, a atitude intuicionista põe os problemas em evidência, exige precauções, faz ver a relatividade e os limites de certos procedimentos demonstrativos. E se fosse o caso de indicar concisamente sua caracterização mais geral e mais profunda, diríamos que ela consiste numa tomada de consciência muito viva — eventualmente levada a excessos de prudência — das modalidades, fontes e limites da relação dual entre as *operações* do pensamento e seus *objetos*.

"Cassiopée", novembro de 1990.

Abstract: We shall be concerned in this paper to characterize intuitionism as a general epistemic attitude, one that makes the concept of verification an essential part of the scheme we employ for understanding scientific thought.
Keywords: Intuitionism – verification – infinity.

Notas

(1) Como diz muito corretamente A.. Raggio: "Costuma-se falar do fracasso do programa original de Hilbert. Com as adequadas extensões do ponto de vista finitista, não apenas não houve fracasso, como esse ponto de vista se impôs como o esquema metodológico de base de toda pesquisa de fundamentos". (Raggio 10, p. 209)

Bibliografia

1. Brouwer, L. *Consciousness, philosophy and mathematics.* Amsterdã, North-Holland, 1948.
2. _____ . *"Intuition and Formalism"*. In: *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1912.
3. _____ . *"Mathematik, Wissenschaft und Sprache"*. In: *Collected Works*, vol. I, 1928.
4. Dummet, M. *Truth and Other Enigmas.* Cambridge. Mass., Harvard University Press, 1978.
5. Heyting, A. *"The Intuitionistic Foundations of Mathematics"*. In: *Erkenntnis,* 1931.
6. _____ . *"Logique et intuitionisme"*. In: *Applications scientifiques de la logique mathématique*, 1954.
7. Hilbert, D. *Grundlagen der Mathematik.* Berlim, Springer, 1934.
8. Kolmogorov, A. *"On the principle of excluded middle"*. 1925.
9. Poincaré, H. *La Science et L'hypothèse.* Paris, Flammarion, 1920.
10. Raggio, A. *"El cincuentenario de los Grundlagen der Mathematik de Hilbert-Bernays"*. *Revista latinoamericana de Filosofía.* vol. XVI, nº 2, julho 1990.
11. Van Heijenoort, J. (org.). *From Frege to Gödel.* Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1981.
12. Vuillemin, J. *What are philosophical Systems?* Cambridge University Press, 1986.