Notas

Leilões de objetos idênticos com demanda unitária: resultados introdutórios*

Alexandre R. Kosbiau§
Marilda Sotomayor¤

RESUMO

Esta é uma introdução de caráter didático à Teoria dos Leilões de objetos idênticos com demandas unitárias, onde os objetos são vendidos simultaneamente ou seqüencialmente. Sob as hipóteses de valores privados independentes caracterizamos os equilíbrios simétricos e demonstramos um teorema de equivalência de *payoffs*.

Palavras-chave: leilões de objetos idênticos, demandas unitárias.

ABSTRACT

This is an introduction to the auction theory of identical objects and single-unit demands. The objects are sold simultaneously or sequencially. Under the hypothesis of independent private values, we characterize the symmetric equilibria and prove a payoff equivalence theorem.

Key words: auctions of identical objects, single-unit demands.

JEL classification: D44.

---

* Este trabalho foi parcialmente financiado pela FIPE/ SP e CNPq- Brasil.

§ Universidade de São Paulo, Departamento de Economia.

¤ Universidade de São Paulo, Departamento de Economia. E-mail: marildas@usp.br.

Recebido em maio de 2000. Aceito em outubro de 2000.

1 Introdução

Existem k objetos idênticos indivisíveis e n compradores neutros ao risco. Cada comprador deseja comprar, no máximo, um item, atribui um valor monetário aos objetos e não conhece o valor dos objetos para os demais compradores. As avaliações dos diferentes compradores são observações independentes de uma variável aleatória com distribuição contínua. A distribuição é de conhecimento comum entre os agentes. O mecanismo de venda é um leilão de lance lacrado onde os objetos são vendidos simultaneamente ou seqüencialmente. Os lances dos compradores dependem das suas avaliações segundo uma mesma função. Este é o modelo simétrico com valores privados independentes (SVPI). Ele pode ser apropriado para bens pessoais não duráveis, sem nenhum valor de revenda. É o modelo de leilões de que trataremos neste artigo.

Historicamente a literatura formal sobre leilões teve início em 1961 com o trabalho seminal de Vickrey. De lá para cá este assunto tem sido de interesse de inúmeras pesquisas que contribuíram para o desenvolvimento de uma poderosa e elegante teoria. Stark e Rothkopf (1979) listam quase 500 artigos. A maior parte deles refere-se à venda de um único objeto indivisível.

Os tipos mais populares de leilões de um objeto são o leilão de preço ascendente ou leilão inglês, o leilão de preço descendente ou leilão holandês, o leilão de primeiro preço de lance selado e o leilão de segundo preço de lance selado, também conhecido como leilão de Vickrey.

No leilão inglês, o leiloeiro determina um preço mínimo inicial para o objeto e gradativamente sobe o preço até que todos os licitantes menos um desistam de participar do leilão. O licitante não desistente paga pelo objeto um preço igual ao último lance. Numa variação, usada no Japão, o preço aparece numa tela e é aumentado gradativamente. Qualquer licitante que deseje estar ativo ao preço corrente aperta um botão. O licitante que soltar o botão deve retirar-se do leilão e não tem permissão para retornar. (Ver Wolfstetter, 1996, p. 370).

O leilão holandês é conduzido por um leiloeiro, que estabelece um preço elevado que é diminuído gradativamente até que um dos licitantes pare o leilão. Este licitante é o vencedor, que fica com o objeto, pagando por este o preço do momento da interrupção do leilão.[1]

1 Um leilão holandês interessante é usado em muitas cidades americanas como um método para oferecer descontos na venda de roupas. Cada peça é vendida pelo preço marcado na etiqueta menos um desconto que depende do número de semanas que a peça ficou na prateleira. O preço cai, de uma semana para outra, 10%, até que o preço mínimo de venda seja alcançado. (Ver Wolfstetter, 1996, p. 414).

Em leilões de lance selado, cada licitante submete um lance dentro de um envelope fechado. O objeto é vendido ao licitante que tiver feito o maior lance. No leilão de lance selado de primeiro preço o ganhador paga o valor do seu lance. No leilão de segundo preço ou de Vickrey o licitante vencedor paga o valor do segundo lance mais elevado. Ou seja, o objeto é vendido por um preço igual ao maior lance perdedor.

A propriedade mais importante do leilão de segundo preço, provada por Vickrey (1961), é que submeter o verdadeiro valor é uma estratégia dominante para o comprador. De fato, o comparador não ganha nada fazendo lances por baixo do verdadeiro valor porque, quaisquer que sejam as ofertas dos outros compradores, isso só diminui a sua probabilidade de ganhar, sem alterar o preço que terá de pagar, caso ganhe o leilão. Da mesma forma, ele não ganha nada fazendo lances acima do seu verdadeiro valor, porque se isto é necessário para vencer o leilão, deve ser porque alguém fez uma oferta que é pelo menos igual ao seu verdadeiro valor. Neste caso terá de pagar uma quantia igual ou maior do que o seu verdadeiro valor, o que lhe dá um excedente menor ou igual a zero. Assim, o uso do leilão de Vickrey assegura ao vendedor o segundo valor mais alto dentre os valores de todos os licitantes, supondo que estes usem a sua estratégia dominante. Desta forma, este tipo de leilão não incentiva o comprador a procurar obter informações sobre os seus rivais, o que reduz os custos de preparação dos lances. Além disso, se os licitantes adotam sua estratégia dominante, a alocação resultante dos bens será eficiente (o objeto será alocado para o licitante com o mais alto valor).

A comparação destas quatro formas de leilão pode ser reduzida a comparar os leilões inglês e holandês, ou o de segundo e de primeiro preços. Isso se deve ao fato mostrado por Vickrey, de que o leilão holandês é equivalente ao leilão de primeiro preço e, no modelo SVPI, o leilão inglês é equivalente ao de segundo preço. É fácil ver que o leilão holandês é equivalente estrategicamente ao leilão de 1° preço (de lance selado) e que esta equivalência estratégica não requer que um licitante conheça o valor do objeto para si mesmo. De fato, num leilão holandês o licitante deve escolher o nível de preço ao qual ele parará o leilão, isto é, o nível de preço ao qual reclamará o objeto, se este ainda não tiver sido vendido. O licitante ganhador será aquele que escolher o nível mais alto e o preço que ele pagará será igual a esta quantia. Este é também o modo pelo qual o ganhador e o preço são determinados num leilão de 1° preço de lance selado. Assim, os jogos estratégicos induzidos por estes leilões são equivalentes. Isto é, os conjuntos de estratégias são idênticos, e as funções resultado, que transformam estratégias em alocações, são as mesmas para ambas as formas de leilão. Conseqüentemente, a identidade do ganhador, o preço que ele paga e os equilíbrios destes dois jogos de leilão devem coincidir.

No contexto do modelo simétrico de valores privados independentes, o leilão de 2° preço e o leilão inglês são estrategicamente equivalentes, embora num sentido mais fraco do que a equivalência estratégica dos leilões holandês e de 1° preço de lance selado. De fato, num leilão inglês o comprador deve escolher o nível de preço ao qual deixará o leilão. O licitante ganhador será aquele que escolher o nível mais alto, e o preço que ele pagará será igual ao nível escolhido pelo último comprador a deixar o leilão. Este é também o modo pelo qual o ganhador e o preço são determinados num leilão de 2° preço de lance selado.

No leilão inglês, se o comprador souber o valor do objeto para si mesmo, ele terá uma estratégia dominante, que é lançar ativamente até que o preço alcance o valor do objeto para ele. Independentemente das estratégias adotadas pelos outros jogadores, esta simples estratégia será uma ótima resposta. Analogamente, no leilão de 2° preço, se um comprador souber o valor do objeto para si mesmo, então a sua estratégia dominante será submeter um lance selado igual ao seu valor. Portanto, em ambos os leilões - inglês e de 2° preço - existe um único equilíbrio em estratégias dominantes. Em ambos os leilões, no equilíbrio, o ganhador será o licitante que tem o valor mais alto do objeto e o preço que ele pagará será o segundo valor mais alto. Neste sentido, os dois leilões são equivalentes.[2]

Vickrey (1961) explicitou equilíbrios simétricos para os leilões de um único objeto de primeiro e de segundo preços de lances selados. Mais ainda, ele provou que no modelo simétrico de valores privados independentes (SPVI), com licitantes neutros ao risco, estas duas formas de leilão são *payoff*-equivalentes, isto é, em equilíbrio, o vendedor e os compradores obtêm os mesmos *payoffs* nos dois tipos de leilões. Este é o celebrado Teorema de Equivalência de Receitas de Vickrey (1961). Devido ao resultado de equivalência estratégica este teorema vale também para os leilões holandês e inglês.

O Teorema de Equivalência de Receitas é bastante surpreendente, pois à primeira vista pode parecer que, como era acreditado antigamente, o leilão de Vickrey acarretasse alguma perda de receita para o vendedor, comparado ao leilão de primeiro preço.[3] Porém, neste leilão, os compradores farão geralmente lances mais altos do que no leilão de 1° preço, onde, no equilíbrio, o objeto é vendido a um preço inferior àquele que o mais alto licitante esteja querendo pagar. De fato, como dizer a verdade é uma estratégia dominante para cada

2 Observe que este argumento requer que cada ofertante conheça o valor do objeto para si mesmo. Se existirem mais do que dois licitantes e o que está sendo leiloado for, por exemplo, o direito de extração de minerais de uma jazida mineral, onde a quantidade de minerais a ser extraída é desconhecida, ou se for um objeto de arte, que será vendido por um preço não determinado, então esta equivalência não se aplicará. Os jogadores aprendem sobre seus valores quando outros jogadores deixam um leilão inglês e condicionam seu comportamento a esta informação.

3 Esta crença se deveu a uma falsa argumentação de Cassady (1967, p. 260): " ... *in the Dutch auction... each potential buyer tends to bid his highest demand price, whereas a bidder in the English system need advance a rival's offer by only one increment.*"

comprador no leilão de Vickrey, o uso desse leilão assegura ao vendedor o valor do licitante com o segundo maior valor, supondo que todos os compradores usem a sua estratégia dominante. O mais surpreendente, porém, é que o leilão de licitação em envelope selado de primeiro preço é incapaz de proporcionar um resultado melhor que o leilão de segundo preço. Mais precisamente, a receita esperada para o vendedor, gerada por qualquer um desses dois mecanismos, é o valor esperado do objeto para o 2° mais alto avaliador.

Uma modificação deste resultado é obtida com a introdução de licitantes avessos ao risco. Naturalmente nada muda no leilão de segundo preço. Porém as estratégias e *payoffs* se alteram no leilão de primeiro preço. Neste mecanismo os compradores fazem lances inferiores aos seus valores reais quando são neutros ao risco. Com a aversão ao risco, esta tática torna-se menos atraente, o que leva os licitantes a submeterem lances mais altos do que submeteriam se fossem neutros ao risco. Assim, a receita do vendedor cresce e o vendedor prefere o leilão holandês ao inglês.

Uma outra alteração é obtida se removermos a independência do modelo SVPI e a substituirmos pela hipótese de uma correlação positiva entre as avaliações dos licitantes. Correlação positiva significa que se a avaliação de um licitante é alta (respectivamente baixa), é provável então que as avaliações dos seus oponentes também sejam altas (respectivamente baixas). Uma correlação positiva não afeta os lances no leilão de segundo preço, pois é sempre uma estratégia dominante dizer a verdade. Porém, faz com que os licitantes lancem mais baixo num leilão de primeiro preço. Desta forma, a introdução de correlação reduz o *payoff* do vendedor no leilão holandês e não o afeta no leilão inglês. Assim, o vendedor prefere o leilão inglês ao holandês quando os valores são correlacionados positivamente. A intuição deste resultado é esboçada como segue: cada licitante sabe que ganhará o leilão somente quando as avaliações dos outros licitantes forem inferiores a sua. Quando os valores são correlacionados positivamente, os licitantes com valores baixos também acreditarão que seus rivais têm avaliações baixas. Desta forma eles diminuirão seus lances. Por outro lado, isto convence os licitantes com valores altos a não lançarem tão agressivamente.

A hipótese de simetria é central para o teorema de equivalência de receitas. Se as avaliações dos compradores não são variáveis aleatórias identicamente distribuídas, não mais pode ser garantido no leilão de primeiro preço que o objeto será vendido ao comprador com a mais alta avaliação. Ou seja, Pareto eficiência só é assegurada pelo leilão de segundo preço. Se uma autoridade pública usa leilões como um procedimento para aconselhar uma alocação, eficiência deve ser o seu objetivo primário. Isto sugere que as autoridades públicas deveriam usar leilões de segundo preço.

Um estudo detalhado de leilões assimétricos é feito em Maskin e Riley (1993). Eles encontram condições suficientes sob as quais os leilões de primeiro preço são preferidos pelo vendedor. Seus resultados sugerem que, nas situações em que o vendedor sabe menos sobre os licitantes do que estes sabem sobre os seus rivais, o leilão de primeiro preço tende a gerar uma receita esperada mais alta que o leilão de segundo preço. Mas em leilões de arte, por exemplo, onde o leiloeiro está tão bem informado quanto os próprios licitantes, sobre os seus preços de reserva, acontece o oposto.

Myerson (1981) generalizou os resultados de Vickrey consideravelmente, estendendo-o para modelos mais gerais de leilões com um único objeto. Os métodos introduzidos por Myerson têm, desde então, sido amplamente aplicados a outros problemas envolvendo informação privada. Riley e Samuelson (1981) mostraram, independentemente, o mesmo resultado de Myerson (1981). Milgron e Weber (1982) generalizaram também o Teorema de Equivalência de Receitas no caso de um único objeto, mas em outra direção, ou seja, assumindo que os licitantes conhecem como o seu valor para o objeto depende da informação privada de cada licitante. Eles somente consideram três mecanismos específicos de leilões: o de primeiro preço e lance selado e dois mecanismos de leilão oral progressivo. Restritos ao caso de valores privados independentes, todos os três mecanismos geram a mesma receita esperada.

Embora, como mencionado anteriormente, a maior parte dos modelos de leilões tratados na literatura considere a venda de um único objeto indivisível, o caso de vários objetos idênticos, onde os licitantes estão interessados em comprar um único objeto, tem merecido a atenção de muitos autores, de tal forma que atualmente este assunto é um dos campos mais ativos de pesquisas da teoria de leilões. Assim é que nos propomos a oferecer uma breve introdução a esta teoria. A nossa análise tem por base o modelo simétrico de valores privados e independentes (SVPI). Os objetos são vendidos simultaneamente ou seqüencialmente.

No **leilão simultâneo de preço discriminatório** cada um dos licitantes que submeterem os k mais altos lances paga o valor de seu lance. Nos **leilões simultâneos de preço uniforme ou de Vickrey**, cada um paga o lance correspondente ao $k+1$-ésimo lance mais elevado, que é o lance do mais alto perdedor. Vickrey também considerou o caso em que cada ganhador paga o valor do lance mais baixo submetido por um ganhador. Estes dois últimos tipos de leilão produzem o preço mínimo e o preço máximo de equilíbrio competitivo, respectivamente, para o mercado correspondente aos valores declarados.

Duas outras generalizações dos leilões de primeiro e segundo preços são o **leilão seqüencial de 1° preço e o leilão seqüencial de 2° preço**. O primeiro é simplesmente uma seqüência de k leilões de 1° preço de lance selado, onde, em cada rodada, o licitante com o maior lance ganha um objeto e paga o valor de seu lance. O segundo é uma seqüência de leilões de 2° preço de lance selado. Isto é, em cada rodada, o licitante com o maior lance ganha um objeto e paga o equivalente ao 2° lance mais elevado, ou seja, o maior lance perdedor. Em ambos os leilões seqüenciais, ao fim de cada rodada, o leiloeiro anuncia o preço ao qual o objeto foi vendido. Este tipo de leilão é comum, por exemplo, para vender vinho, cavalos de raça e carros usados. Como no leilão de um único objeto, para o caso de valores privados independentes, no equilíbrio, cada um desses leilões gera a mesma receita esperada para o vendedor.

Weber (1983) considera uma família mais ampla de mecanismos. Os licitantes com os mais altos valores ganham um objeto, mas ele permite que o valor de um licitante dependa da informação privada dos outros, como no modelo para um único objeto de Milgrom e Weber. O preço de equilíbrio é o mesmo em todos esses mecanismos uma vez tenham sido satisfeitas certas condições de fronteira. Por exemplo, a condição poderia ser que se um licitante tem o valor mais baixo possível e ganha (caso em que todos os outros devem também ter o mesmo valor mais baixo possível para o objeto), então ele tem um lucro esperado de zero. Engelbrecht-Wiggans (1987) estende este resultado ao caso de um número aleatório de objetos, independentemente da informação privada do licitante.

Engelbrecht-Wiggans (1988) generaliza o resultado de Vickrey para leilões de múltiplos objetos de maneira análoga à que Myerson fez para os resultados de Vickrey sobre os leilões de um único objeto. Embora ele requeira valores privados independentes, cada licitante pode adquirir mais de um objeto.

Em Menezes (1998) é apresentada uma resenha com os enunciados dos principais resultados, que são ilustrados com exemplos simples de dois objetos e três compradores.[4]

As mais importantes aplicações de leilões de múltiplos objetos são em mercados financeiros. A venda de ações do Tesouro dos Estados Unidos, por exemplo, é feita em mais de 150 leilões por ano, usando um mecanismo de leilão de lance lacrado.

4 É preciso observar aqui que, devido a uma errônea interpretação deste autor, o enunciado do Teorema 2 (ii) está incorreto, como também os argumentos usados no exemplo de leilão discriminatório e a observação final deste exemplo (ver a correção desses erros na observação 1 do presente artigo).

O presente trabalho tem um caráter didático. Não nos limitamos aos enunciados e exemplos. Apresentamos também as demonstrações dos resultados enunciados e, no apêndice, fornecemos as técnicas matemáticas necessárias para o seu entendimento. O nosso intuito é o de fornecer uma base teórica acessível ao leitor que deseja lançar-se na pesquisa na Teoria de Leilões. As demonstrações existentes na literatura são de difícil acompanhamento pelo leitor que não está familiarizado com as técnicas matemáticas usadas nessa Teoria. Por isso, embora as demonstrações apresentadas aqui sigam as linhas das demonstrações de Milgrom (1985) para os teoremas e Lema 1, e de Wolfstetter (1996) para o Lema 3, são diferentes das apresentadas nesses artigos, não somente por estarem mais detalhadas como também por usarem, algumas vezes, um enfoque diferente visando facilitar o seu entendimento. Um exemplo disso é a introdução dos Lemas 2 e 3 que não estão em Milgrom (1985).

Aqui, sob as hipóteses de valores privados e independentes, caracterizamos (a) os equilíbrios simétricos para cada uma das quatro formas padrões de leilão: simultâneo uniforme e discriminatório e seqüencial de primeiro e de segundo preços, e (b) demonstramos o teorema de equivalência de receitas para uma família mais ampla de leilões, que inclui os quatro formatos de leilões padrões.

Esses resultados são obtidos aqui de duas maneiras diferentes. Na primeira abordagem demonstramos o Teorema de Equivalência de Receitas para os quatro tipos de jogos de leilão a partir dos equilíbrios simétricos. Restringimo-nos ao caso de valores uniformemente distribuídos, com três objetos e cinco licitantes. Porém, o procedimento usado pode ser aplicado a distribuições arbitrárias, não necessariamente uniformes, com qualquer número de objetos e licitantes. A finalidade dessa abordagem é fundamentar os resultados apresentados. As técnicas usadas nas suas demonstrações são distintas das existentes na literatura. Em Menezes (1998) as demonstrações são apenas esboçadas. Na outra abordagem demonstramos um Teorema de Equivalência de *Payoffs* para modelos mais gerais. A partir deste resultado derivamos os equilíbrios simétricos para os quatro jogos particulares.

Ambas as técnicas são úteis para o melhor entendimento desses leilões. As vantagens da segunda abordagem são: (a) os *payoffs* são determinados e a equivalência de receitas é estabelecida para uma família mais ampla de regras de leilão (isto nunca poderia ser alcançado resolvendo-se todos os leilões possíveis, um por um), e (2) sua simplicidade (não necessitamos lidar com condições de primeira ordem e resolver equações diferenciais não lineares). Esta abordagem complementa a usada por Menezes (1998) referente aos resultados comuns aos dois trabalhos.

Este artigo está dividido da seguinte forma. Na seção 2 resolvemos os quatro tipos de jogos de leilão para o caso de valores uniformemente distribuídos em $[0,1]$ com três objetos e cinco licitantes. Na seção 3 apresentamos o modelo de valores privados independentes, enunciamos e demonstramos os resultados principais. A seção 4 conclui o artigo. No Apêndice fornecemos alguns resultados sobre Teoria de Probabilidades que serão usados nas demonstrações dos Teoremas.

2 Soluções dos leilões padrões para o caso de valores distribuídos uniformemente

Usaremos as seguintes notações:

$V_l^m \equiv$ Estatística de ordem l da amostra aleatória $V_1, \ldots, V_m$, com valores em $[0,1]$, $m = 1,\ldots,5$,

com $V_l^m \geq V_2^m \geq \ldots \geq V_5^m$

$F(x) \equiv P(V_j \leq x)$ e $f(.)$ é a função densidade de probabilidade de V_j, $\forall j=1,\ldots,n$.

$Z_i^m \equiv$ Estatística de ordem i da amostra aleatória $Z_1,\ldots,Z_m$, com valores em $[0,v]$, onde

$$F_{Z_j}(x) = P(Z_j \leq x) = P(V_j \leq x \mid V_j \leq v) = \frac{F(x)}{F(v)} \text{ e } f_{Z_j}(x) = \frac{f(x)}{F(v)}$$

Exemplo: (*Existência e unicidade de equilíbrio simétrico e equivalência de receitas em leilões simultâneos e seqüenciais)* Existem cinco compradores potenciais (n=5) neutros ao risco e três objetos idênticos e indivisíveis (k=3). Cada comprador deseja comprar no máximo um objeto. Suponha que o preço de reserva do vendedor seja $r = 0$. Suponha também que cada licitante j atribui um valor monetário v_j aos objetos e não conheça o valor dos objetos para os demais compradores. As avaliações dos diferentes compradores são amostragens independentes de uma distribuição uniforme em $[0,1]$ e de conhecimento comum entre os agentes. O mecanismo de venda é um leilão de lance lacrado onde os objetos são vendidos simultaneamente ou seqüencialmente. Então o único equilíbrio simétrico é:

$b_U(v) = v$ (*Leilão simultâneo de preço uniforme).*

$b_D(v) = E[V_3^4 \mid V_3^4 < v]$ (*Leilão simultâneo de preço discriminatório).*

$b_{PP}(v) = (\frac{2v}{5}, \frac{v}{2}, \frac{2v}{3})$ *(Leilão seqüencial de primeiro preço e*

$b_{SP}(v) = (\frac{2v}{4}, \frac{2v}{3}, v)$ *(Leilão seqüencial de segundo preço), onde a i-ésima coordenada, para i =1,2,3, representa o lance ótimo na iésima rodada do leilão.*

A receita esperada do vendedor nos quatro tipos de leilão é:

$R^{*}=1.$

A seguir explicamos detalhadamente como chegamos a esses resultados. As demonstrações utilizam duas hipóteses preliminares cujas validades serão então confirmadas: a simetria do equilíbrio e a monotonicidade estrita das estratégias de equilíbrio.

1) Leilão simultâneo de preço uniforme

Considere este jogo sob a perspectiva do jogador 1. Se o jogador 1 fizer um lance menor do que o seu valor, então ele poderá não ganhar um objeto numa situação em que poderia ganhar, e não irá alterar o preço que irá pagar caso ganhe. Agora suponha que o jogador 1 considere fazer um lance maior do que o seu valor. Se isso é necessário para ganhar, então é porque o seu verdadeiro valor é menor do que o terceiro maior lance. Nesse caso, ele estará lançando um valor mais alto do que o terceiro maior lance. Conseqüentemente, ele ganhará, mas pagará o terceiro maior lance, que é maior que o seu verdadeiro valor. Isso significa dizer que lançar o verdadeiro valor é uma estratégia dominante para todo licitante. Então,

$b_U(v)=v$

é um equilíbrio simétrico, como afirmamos.

Vamos mostrar que $b(v)=v$ é o único equilíbrio simétrico. O *payoff* esperado do jogador 1, se ele joga b, tem avaliação v, e o terceiro máximo dos lances dos outros jogadores é B, com função densidade de probabilidade f_B, é dado por:

$$\Pi(b,v) = vP(B < b) - E(B|B < b)\,P(B < b) = \int_0^b (v-x)f_B(x)dx.$$

Então o *payoff* esperado será maximizado quando $\frac{\partial \Pi(b,v)}{\partial b} = (v-b)f_B(b) = 0$. Logo, $b = v$ para todo lance no suporte de f_B. Portanto, $b(v) = v$ é o único equilíbrio simétrico.

A receita esperada no leilão de preço uniforme é três vezes o valor esperado do maior lance perdedor, ou seja, três vezes a esperança da estatística de ordem 4 da amostra $V_1, \ldots, V_5$. Usando a expressão (B_5) do Apêndice:

$$EV_j^m = \frac{m-j+1}{m+1}, \forall j = 1,\ldots,m, \forall m = j,\ldots,n, \text{ obtemos}$$

$$R^* = 3EV_4^5 = 3(\frac{2}{6}) = 1$$

2) Leilão simultâneo de preço discriminatório

Sob a perspectiva do licitante 1 e considerando que os lances são funções crescentes dos valores, de tal forma que os três licitantes com os maiores valores recebem um objeto, ele será um dos ganhadores quando sua avaliação for maior do que a estatística de ordem 3 da amostra $\{V_2,\ldots,V_5\}$ Logo, o lance ótimo deve ser o valor esperado de V_3^4 condicionado a ganhar um objeto. Ou seja, um licitante com valor v faz um lance, num equilíbrio simétrico, de acordo com a seguinte função:

$$b_D(v) = E\left[V_3^4 \mid V_3^4 < v\right]$$

A justificativa para o argumento acima é a seguinte: o comprador 1 ganha um objeto se e somente se pelo menos dois de seus rivais têm avaliações abaixo de $\sigma(b)$, onde $\sigma \equiv (b_D)^{-1}$ ou ainda se e somente se $\sigma(b) > V_3^4$ Desta forma:

P (ganhar jogando b contra $b_D(v)$ dos rivais) = $P(V_3^4 < \sigma(b)) \equiv F_W(\sigma(b))$, *onde* $W \equiv V_3^4$

No equilíbrio, b deve maximizar o *payoff* esperado:

$\Pi(b,v) = (v-b)\, F_W(\sigma(b))$. Então,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b}(b,v) = (v-b) f_W(\sigma(b)) \frac{1}{b'_D(b_D^{-1}(b))} - F_W(\sigma(b)) = (v-b) f_W(v) \frac{1}{b'_D(v)} - F_W(v) = 0.$$

Ou ainda,

$$v f_W(v) - b_D(v) f_w(v) - b'_D(v)\, F_w(v) = 0.$$

$$[b_D(v)\, F_w(v)]' = v f_W(v).$$

$b_D(v) = \int_0^v s \frac{f_W(s)}{F_W(v)} ds$ Logo, $b_D(v) = E[W|W<v] = E[V_3^4 \,|\, V_3^4 < v]$, como queríamos demonstrar.[5]

O vendedor vai receber o lance de cada ganhador. Os ganhadores têm as três mais altas avaliações. O vendedor espera que cada ganhador lance o terceiro maior valor entre as outras quatro avaliações. Assim, ele espera que cada ganhador lance a quarta mais alta avaliação, isto é, EV_4^5. A receita esperada é a soma dos valores esperados dos lances dos ganhadores. Logo,

$$R^* = 3E(V_4^5) = 3\left(\frac{2}{6}\right) = 1$$

5 O fato de que π tem um máximo segue do seguinte argumento. Temos que $\frac{\partial^2 \Pi(b,v)}{\partial b \partial v} = F'_W(\sigma(b))\sigma'(b) > 0$, desde que σ é estritamente crescente por hipótese. Logo, $\frac{\partial \Pi(b,v)}{\partial b}$ é estritamente crescente como função de v. Tome $b<b_D(v)$, *perto de* $b_D(v)$. Então existe $v' \in [0,1]$ tal que $b_D(v')=b$. Então $b_D(v')=b<b_D(v)$. Como $b_D(.)$ é estritamente crescente, temos que $v'<v$. Assim $\frac{\partial \Pi(b,v)}{\partial b} > \frac{\partial \Pi(b,v')}{\partial b} = \frac{\partial \Pi(b_D(v'),v')}{\partial b} = 0$. Então $\pi(.,v)$ é crescente para $b<b_D(v)$. Similarmente mostramos que $\pi(.,v)$ é decrescente para $b>b_D(v)$. Desta forma, $b_D(v)$ é um maximante global.

Observação. No caso de dois objetos e três compradores o lance ótimo será:

$$b_D(v) = E(V_2^2 \mid V_2^2 < v) = \frac{v(3-2v)}{3(2-v)}$$

Isto corrige o engano em Menezes (1998, p. 321), que afirma que $b_D(v)$ = $E(V_3^3 \mid V_3^3 < v) = \frac{2v}{5}$ Neste exemplo a receita esperada será R* = $2E(V_3^3) = \frac{1}{2}$ e o pagamento esperado será, segundo o Teorema 1 (Milgrom e Weber, 1982 e Myerson, 1981,

$$E(V_2^2 \mid V_2^2 < v)P(V_2^2 < v) = \frac{v^2(3-2v)}{3},$$

que é o mesmo que no leilão de preço uniforme, contrariando a afirmação de Menezes (1998, p. 321) de que os pagamentos esperados dos licitantes nos leilões de preço uniforme e discriminatório são distintos.

3) Leilão seqüencial de 1° Preço

Resolveremos este jogo de trás para frente.

3ª Rodada do leilão: ao fim da penúltima rodada há três compradores potenciais e um único objeto. Este é apenas um leilão de 1° preço de um único objeto. Consideramos que os lances são crescentes em termos dos valores, tal que o licitante com o maior valor em cada rodada ganhe um objeto. Então, sob a perspectiva do licitante 1, ele ganha na terceira rodada se não ganhou nas duas primeiras e se sua avaliação v for maior do que as dos outros dois licitantes presentes nesta rodada. Isto equivale a requerer que v seja maior do que o terceiro e quarto maiores valores em $\{V_2, \ldots, V_5\}$ e menor do que o segundo maior valor desta amostra. Ou seja, o licitante 1 ganha um objeto se

$$V_3^4 < v < V_2^4$$

O jogador 1 ganha na terceira rodada se o seu lance for maior do que o lance dos outros dois jogadores presentes nesta rodada. Sejam W_2, e W_3 as avaliações dos outros dois jogadores presentes na terceira rodada. Denote $b^* \equiv b^3_{PP}$ (lance ótimo na terceira rodada do leilão seqüencial de primeiro preço), $\sigma \equiv b^{*-1}$, $F_j(x)=P(W_j \leq x), j=2,3$ e $f_j(x)=F'_j(x)$.

Então a probabilidade de 1 ganhar na terceira rodada é

$\rho(b)=P(b>b^*(W_j), j=2,3)=P(W_j<\sigma(b))^2=F^2_j(\sigma(b))$. No equilíbrio, b deve maximizar o *pay-off* esperado:

$P(b,v)=(v-b)\rho(b)$. Então,

$$\frac{\partial\Pi(b,v)}{\partial b}=(v-b)r'(b)-\rho(b)=0.$$

Temos que $\rho'(b)=2F_j(\sigma(b)).f_j((\sigma(b)).\sigma'(b)$.

Logo, $(v-b)\, 2F_j(\sigma(b))\, f_j(\sigma(b)).\dfrac{1}{b^{*\prime}(v)}-F^2_j(\sigma(b))=0$, donde

$$2F_j(v)vf_j(v)-2b^*(v)f(v)F_j(v)-b^{*\prime}(v)F^2_j(v)=0$$

$$[b^*(v)\,F^2_j(v)]'=2vF_j(v)f_j(v)$$

$$b^*(v)\,F^2_j(v)=\int_0^v 2x\,F_j(x)f_j(x)dx$$

$$b^*(v)=\int_0^v 2x\frac{F_j(x)}{F_j(v)}\frac{f_j(x)}{F_j(v)}dx=E[W_2^3\,|\,W_1^3=v]$$ [6] (Ver Apêndice).

Ou seja, o lance ótimo num leilão de primeiro preço de 1 objeto e 3 compradores é o valor esperado do segundo valor mais alto condicionado a ganhar. Dessa forma, o lance ótimo para o licitante 1 na terceira rodada deve ser o valor esperado do terceiro maior valor dentre os demais licitantes, condicionado a ganhar nesta rodada. Ou seja, um licitante com valor v faz um lance na terceira rodada, num equilíbrio simétrico, de acordo com a seguinte função:

---

6 Que $b^*(v)$ é um maximante segue do mesmo argumento usado na nota anterior.

$$b^3_{PP}(v) = E\left[V^4_3 \mid V^4_3 < v < V^4_2\right]$$

Usando as expressões (B_4), (B_3) e (B_6) do Apêndice B temos:

$$b^3_{pp}(v) = E[V^4_3 \mid V^4_2 = v] = E[V^5_4 \mid V^5_3 = v] = E[Z^2_1] = \frac{2}{3}v.$$

2ª Rodada do leilão: na segunda rodada do leilão há quatro licitantes e dois objetos à venda. Além disso, os licitantes que participam nesta rodada sabem que se eles perderem a possibilidade de comprar o segundo objeto colocado à venda, então dadas as estratégias que eles utilizariam na última rodada do leilão, o licitante perdedor da segunda rodada que tenha o maior valor irá ganhar o terceiro objeto. Para que um comprador seja indiferente entre ganhar um dos dois objetos idênticos, o preço que ele pagaria por qualquer um deles tem que ser a mesma variável aleatória. Isto é, sob a perspectiva do licitante 1, ele quererá pagar na segunda rodada, caso ganhe nesta rodada, o mesmo que pagaria na terceira rodada caso não ganhasse na segunda. Logo, se ele tem valor v, ele lançará o valor esperado da estatística de ordem 3 de $\{V_2,\ldots,V_5\}$ condicionada a ganhar um objeto na segunda rodada. Ele ganha na segunda rodada se não ganhou na primeira e sua avaliação v for maior que as avaliações dos outros três licitantes presentes nesta rodada. Isto é, sob a perspectiva do licitante 1, ele ganha na segunda rodada se dentre as avaliações dos outros quatro licitantes, v for maior do que a segunda mais alta e menor do que a primeira mais alta. Isto significa dizer que:

$$V^4_2 < v < V^4_1$$

Assim,um licitante com valor v faz um lance na segunda rodada do leilão da seguinte forma:

$$b^2_{PP}(v) = E\left[V^4_3 \mid V^4_2 < v < V^4_1\right].$$

Usando as expressões (B_4), (B_3) e (B_6) do Apêndice B temos:

$$b^2_{pp}(v) = E[V^4_3 \mid V^4_1 = v] = E[V^5_4 \mid V^5_2 = v] = E[Z^3_2] = \frac{2}{4}v.$$

1ª Rodada do leilão: o licitante 1 ganha na primeira rodada se sua avaliação for maior do que as avaliações dos outros quatro licitantes, isto é, se $V_1^4 < v$. Com um argumento análogo ao usado acima, podemos concluir que o seu lance ótimo será

$$b_{PP}^1(v) = E\left[V_3^4 \mid V_1^4 < v\right] = E[V_4^5 \mid V_1^5 = v] = E[Z_3^4] = \frac{2}{5}v$$

Assim,

$$b_{PP}(v) = \left(\frac{2v}{5} . \frac{v}{2} . \frac{2v}{3}\right)$$

é a estratégia de equilíbrio para um licitante com valor v, como afirmado.

Resumindo a discussão acima, um comprador tem a garantia de ganhar um dos três objetos se o seu valor se encontra dentre os três maiores valores. Se o seu valor for o maior, tal licitante ganhará na primeira rodada do leilão. Se o seu valor for o segundo maior, tal licitante irá ganhar na segunda rodada do leilão e se for o terceiro maior ele ganhará na terceira rodada do leilão. A receita esperada na primeira rodada do leilão é o valor esperado do lance do ganhador na primeira rodada, que é o valor esperado do lance, na primeira rodada, do licitante com a maior avaliação:

$$E(b_{pp}^1(V_1^5)) = E\{E[V_4^5 \mid V_1^5]\} = E[V_4^5] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

A receita esperada na segunda rodada do leilão é o valor esperado do lance ganhador na segunda rodada, ou seja, é o valor esperado do lance, na segunda rodada, do licitante com a segunda maior avaliação:

$$E(b_{pp}^2(V_2^5)) = E\{E[V_4^5 \mid V_2^5]\} = E[V_4^5] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

A receita esperada na terceira rodada do leilão é o valor esperado do lance ganhador na terceira rodada, ou seja, é o valor esperado do lance, na terceira rodada, do licitante com a terceira maior avaliação:

$$E(b^3_{pp}(V^5_3)) = E\{E[V^5_4 \mid V^5_3]\} = E[V^5_4] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Como vemos, as receitas esperadas nas três rodadas do leilão seqüencial de 1° preço são iguais. A receita esperada do vendedor é:

$$R^* = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

4) Leilão seqüencial de 2° Preço

Também resolveremos este jogo de trás para frente.

3ª Rodada do leilão: na última rodada há três licitantes e um único objeto. Então temos um leilão de 2° preço de um único objeto. Cada um dos três licitantes remanescentes faz como lance o seu verdadeiro valor, ou seja,

$$b^3_{SP}(v) = v \,,$$

lembrando que denotamos por b^3_{SP} o lance ótimo na terceira rodada do leilão de primeiro preço.

2ª Rodada do leilão: na terceira rodada o jogador paga o segundo maior lance feito pelos licitantes presentes, caso ganhe. Como o lance é igual ao valor nesta rodada, sob a perspectiva do jogador 1, ele paga, na terceira rodada, o terceiro maior valor de $\{V_2, \ldots, V_5\}$ caso ganhe. Como no equilíbrio ele deve ser indiferente entre ganhar um objeto na segunda rodada e ganhar um objeto na terceira rodada, ele quer pagar V^4_3 caso ganhe na segunda rodada. Assim, se $V_1 = v$ e o licitante 1 ganha na segunda rodada ele espera pagar $E[V^4_3 \mid V^4_2 < v < V^4_1]$, que é o mesmo que $E[V^5_4 \mid V^5_2 = v]$, por (B_4) do Apêndice B. Sob a perspectiva do jogador 1, o seu pagamento na segunda rodada, se ele ganha nesta rodada, deve ser igual ao segundo maior lance nesta rodada, que é o lance do licitante de segundo maior valor dentre os quatro jogadores presentes nesta rodada, considerando que os lances são crescentes em termos dos valores. Ou seja, se o jogador 1 é do tipo v,

$$E\left[V_4^5 \mid V_2^5 = v\right] = E\left[b_{SP}^2(V_2^4) \mid V_2^4 < v < V_1^4\right] = E\left[b_{SP}^2(V_3^5) \mid V_2^5 = v\right].$$

Então $b_{SP}^2(V_3^5) = E(V_4^5 \mid V_3^5) = E(Z_1^2) = \frac{2V_3^5}{3}$, pois

$$E(E(V_4^5 \mid V_3^5) \mid V_2^5 = v) = E(\frac{2}{3}V_3^5 \mid V_2^5 = v) = \frac{2}{3}E(Z_1^3) = \frac{v}{2} \quad \text{e}$$

$$E(V_4^5 \mid V_2^5 = v) = E(Z_2^3) = \frac{v}{2}.$$

1ª Rodada do leilão: na primeira rodada do leilão o licitante 1 ganha se sua avaliação for maior do que as avaliações dos outros quatro licitantes, isto é, se $V_1^4 < v$ Como no equilíbrio ele deve ser indiferente entre ganhar um objeto na segunda rodada e ganhar um objeto na primeira rodada, ele quer pagar V_3^4 caso ganhe na primeira rodada. Assim, se $V_1 = $ v e o licitante 1 ganha na primeira rodada, ele espera pagar $E[V_3^4 \mid V_1^4 < v]$, que é o mesmo que $E[V_4^5 \mid V_1^5 = v]$. Com um argumento análogo ao usado acima, podemos concluir que

$$E\left[V_4^5 \mid V_1^5 = v\right] = E[b_{SP}^1(V_1^4) \mid V_1^4 < v] = E\left[b_{SP}^1(V_2^5) \mid V_1^5 = v\right].$$

Então $b_{SP}^1(V_2^5) = E(V_4^5 \mid V_2^5) = E(Z_2^3) = \frac{v}{2}$, pois

$$E\{E[V_4^5 \mid V_2^5] \mid V_1^5 = v\} = \frac{1}{2}E(V_2^5 \mid V_1^5) = \frac{1}{2}E(Z_1^4) = \frac{1}{2}(\frac{4v}{5}) = \frac{2v}{5} \quad \text{e}$$

$$E(V_4^5 \mid V_1^5 = v) = E(Z_3^4) = \frac{2v}{5}$$

Assim,

$$b_{SP}(v) = (\frac{2v}{4}, \frac{2v}{3}, v)$$

é a estratégia de equilíbrio para um licitante com valor v, como afirmado.

A receita esperada na primeira rodada do leilão é o valor esperado do segundo maior lance, que é o valor esperado do lance do licitante de segunda maior avaliação, i.e.,

$$E(b_{sp}^{1}(V_2^5)) = E\frac{2V_2^5}{4} = \frac{2}{4} \bullet \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$$

De forma similar, na segunda rodada do leilão, a receita esperada é o valor esperado do segundo maior lance, que é o valor esperado do lance do licitante de segundo maior valor nesta rodada. Como o segundo maior valor da segunda rodada é o terceiro maior valor, a receita esperada na segunda rodada do leilão é:

$$E(b_{sp}^{2}(V_3^5)) = \frac{2}{3} EV_3^5 = \frac{2}{3}\frac{3}{6} = \frac{1}{3}$$

Como o segundo maior valor da terceira rodada é o quarto maior valor, a receita esperada na segunda rodada do leilão é:

$$E(b_{SP}^{3}(V_4^5)) = EV_4^5 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Poderíamos também ter calculado diretamente:

$$Eb_{SP}^{1}(V_2^5) = E[E(V_4^5 \mid V_2^5)] = EV_4^5 = \frac{1}{3}$$

$$Eb_{SP}^{2}(V_3^5) = E[E(V_4^5 \mid V_3^5)] = EV_4^5 = \frac{1}{3}$$

$$Eb_{SP}^{3}(V_4^5) = EV_4^5 = \frac{1}{3}$$

Assim, a receita total esperada do vendedor é

$$R^* = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

As quatro formas de leilão geram a mesma receita esperada. Para os leilões seqüenciais a receita esperada obtida em diferentes rodadas é a mesma. Este fato não é acidental, como veremos na próxima seção.

3 O modelo Simétrico de Valores Privados Independentes (SVPI)

Um lote de k objetos idênticos está para ser vendido. O vendedor valoriza cada objeto em zero. Existem n compradores neutros ao risco, cada um dos quais deseja comprar, no máximo, um objeto. Cada comprador i conhece o seu próprio valor v_i dos objetos (esta é a hipótese de valor privado) e não conhece as avaliações dos seus oponentes. Os valores dos diferentes licitantes são observações independentes de uma variável aleatória não negativa V com uma distribuição contínua de conhecimento comum entre os agentes. Sejam $F(v)$ e $f(v)$ a função de distribuição e a função densidade de V, respectivamente. O suporte de f é $\left[0, \bar{v}\right]$. Assim, todos os agentes concordam que a probabilidade de que o valor do licitante i seja menor do que v seja dado por $F(v)$, todo mundo sabe que todo mundo sabe isto, todo mundo sabe que todo mundo sabe que todo mundo sabe isto, *ad infinitum*.

Sejam $V_1,\ldots, V_n$ os valores dos licitantes. Em prol de uma notação mais simples, mas sem perda de generalidade, restringimo-nos ao caso $k < n$. Como na seção anterior, denotamos por V_l^m as estatísticas de ordem l da amostra aleatória $V_1,\ldots,V_m$, $m = 1,\ldots,n$, com $V_1^m \geq V_2^m \geq \ldots$

Todas as formas de leilão que consideramos induzem um jogo com informação incompleta sobre os *payoffs* dos jogadores. Embora os jogos induzidos pelos leilões seqüenciais sejam jogos dinâmicos, as hipóteses que impomos nos permitem considerá-los como jogos estáticos. Desta forma a noção de equilíbrio adequada é a de equilíbrio de Nash-Bayesiano. Porque as regras desses leilões tratam os compradores simetricamente e porque temos hipóteses simétricas sobre os compradores, procuramos por equilíbrios de Nash simétricos. Desta forma, cada licitante escolhe a mesma função de lance.

3.1 Resultados principais

Dadas as hipóteses do modelo, a escolha de lances para um dado comprador afeta seu *payoff* somente à medida que afeta a sua probabilidade de ganhar uma unidade ou a quantia que ele espera pagar caso ganhe um dos objetos.

Segundo a abordagem de Harris e Raviv (1981), Myerson (1981) e Riley e Samuelson (1981), o problema de decisão de um licitante (quando as estratégias dos outros licitantes estão fixas) é o de escolher uma probabilidade p de ganhar um objeto e um correspondente pagamento esperado $g(p)$, associado ao lance que ganha algum objeto com probabilidade p. Dada a hipótese de independência no modelo, o conjunto de pares $(p,g(p))$ disponíveis para o licitante depende somente das regras do leilão e das estratégias dos outros jogadores, e não de seu valor privado para os objetos. Assim sendo, se o comprador 1 valoriza uma unidade em v, o seu *payoff* esperado para um ponto $(p,g(p))$ é

$$\Pi_1(p)=v.p-g(p).$$

Seja $p^*(v)$ a escolha de p que maximiza π_1 quando o comprador 1 tem valor v. Isto é, $p^*(v)$ é a probabilidade do comprador 1 de ganhar um objeto quando tem avaliação v e todos jogam em equilíbrio. Assumimos que $g(.)$ é diferenciável em $p^*(v)$. Então:

$$\frac{\partial}{\partial p}\pi_1(p^*(v))=v-g'(p^*(v))=0.$$

Então

$$g'(p^*(v))=v \qquad \text{A1.}$$

Supondo que $p^*(v)$ é diferenciável, temos:

$$\frac{dg\left(p^*(v)\right)}{dv}=g'\left(p^*(v)\right).\frac{dp^*(v)}{dv}=v.\frac{dp^*(v)}{dv}$$

Assim obtemos:

$$g\left(p^{*}(v)\right)=g(p^{*}(0))+\int_{0}^{v} dg(p^{*}(s))=g(p^{*}(0))+\int_{0}^{v} s.dp^{*}(s)$$

Temos assim demonstrado o seguinte resultado:

Lema 1 (Myerson (1981), Riley e Samuelson (1981): *Sejam p*(v) e g(p*(v)) a probabilidade de um licitante ganhar algum objeto e o pagamento esperado, respectivamente, quando o seu valor é v e todos jogam em equilíbrio.Se p*(.) e g(.) são diferenciáveis, então*[7]

$$g\left(p^{*}(v)\right)=g(p^{*}(0))+\int_{0}^{v} s.dp^{*}(s)$$

O nosso primeiro teorema é o seguinte:

Teorema 1 (Princípio da Equivalência de *Payoffs*) (Milgrom e Weber, 1982; Myerson, 1981).

Consideremos o modelo de leilão de valores privados independentes simétricos com n licitantes neutros ao risco e k objetos. Assumamos que um perfil de estratégias de equilíbrio é tal que os licitantes com os k mais altos valores têm certeza de receber um objeto, e um licitante com valor zero tem um pagamento esperado de zero. Então: (a) o pagamento esperado de um comprador com valor v é igual a

$$E(V_{k}^{n-1} \mid V_{k}^{n-1} \leq v).P\left(V_{k}^{n-1} \leq v\right),$$

(b) a receita esperada do vendedor neste equilíbrio é

$$k.E\left(V_{k+1}^{n}\right) \text{ e}$$

(c) o lucro esperado de cada licitante é $\Pi_1 = \left[v - E\left(V_{k}^{n-1} \mid V_{k}^{n-1} \leq v\right)\right] P(V_{k}^{n=1} \leq v)$

7 Esta fórmula vale mesmo se g(.) não é diferenciável.

Demonstração: por hipótese, se todos jogam em equilíbrio, um comprador ganha um objeto se a sua avaliação é uma das k mais altas avaliações. Isto significa dizer que um comprador ganha um objeto se as avaliações de pelo menos n-k dos outros n-1 compradores são menores ou iguais à sua avaliação. Então, sob a perspectiva do comprador 1, a probabilidade do comprador 1 ganhar um objeto, dado que o seu valor do objeto é *v*, é

$$p^*(v) = P\left(V_k^{n-1} \leq v\right) = F_{V_k^{n-1}}(v),$$

onde V_k^{n-1} é a estatística de ordem k da amostra $\{V_2,\ldots,V_n\}$.

Então,

$$dp^*(v) = f_{V_k^{n-1}}(v).dv$$

Usando o Lema 1 temos que, levando em conta que $g(p^*(0))=0$,

$$g(p^*(v)) = \int_0^v s f_{V_k^{n-1}}(s)ds.$$

Por outro lado, se $x \leq v$,

$$f_{V_k^{n-1}|V_k^{n-1}\leq v}(x) = \frac{f_{V_k^{n-1}}(x)}{F_{V_k^{n-1}}(v)}.$$

Então:

$$E(V_k^{n-1} \mid V_k^{n-1} \leq v).P\left(V_k^{n-1} \leq v\right) = F_{V_k^{n-1}}(v)\int_0^v s\frac{f_{V_k^{n-1}}(s)}{F_{V_k^{n-1}}(v)}ds = = \int_0^v s f_{V_k^{n-1}}(s)ds.$$

Logo,

$$g(p^*(v)) = E(V_k^{n-1} \mid V_k^{n-1} \leq v).P\left(V_k^{n-1} \leq v\right),$$

o que demonstra a parte (a).

Para a parte (b), observe que a receita esperada do vendedor é a soma do que cada um dos k ganhadores pagará. Cada ganhador tem avaliação V_j^n para algum $j=1,\ldots,k$. Temos que a estatística de ordem k da amostra $\{V_2,\ldots,V_n\}$, quando $V_1=V_j^n$ para algum $j=1,\ldots,k$, é a estatística de ordem k+1 da amostra $\{V_1,\ldots,V_n\}$. Desta forma, sob a perspectiva do jogador 1, se ele tem avaliação $V_1=V_j^n$ para algum $j=1,\ldots,k$, o seu pagamento esperado é $E(V_{k+1}^n)$. Logo, o vendedor espera receber $k.E\left(V_{k+1}^n\right)$.

Para a parte (c) temos que o lucro esperado de cada comprador é dado por: $\Pi_1=\Pi_1(p^*(v))=v.p^*(v)-g(p^*(v))$

Portanto, $\Pi_1=v.P(V_k^{n-1}\leq v)-E\left(V_k^{n-1}\mid V_k^{n-1}\leq v\right).P(V_k^{n-1}\leq v)$, donde

$$\Pi_1=\left[v-E\left(V_k^{n-1}\mid V_k^{n-1}\leq v\right)\right]\bullet P(V_k^{n=1}\leq v)$$

e a demonstração está completa.■

Nos leilões simultâneos de Vickrey (ou uniforme) e discriminatório, uma estratégia para um licitante é uma função $b(.)$, que associa cada um de seus possíveis valores v a um lance $b(v)\geq 0$. No leilão de Vickrey, é uma estratégia dominante submeter o próprio valor. Então $b(v)=v$ é um equilíbrio. Um jogador típico, digamos o jogador 1, ganha algum objeto se seu lance for maior que o k-ésimo lance mais alto dos restantes n-1 licitantes. Isto significa dizer que ele ganha um objeto se o seu valor for um dos k valores mais altos. Então o Teorema 1 aplica e temos provado o seguinte resultado:

Teorema 2 (Vickrey, 1962; Ortega-Reichert, 1968).

No modelo SVPI com n licitantes neutros ao risco, k objetos (n>k) vale o seguinte:

(a) Seja $b_j(v)=v=E\left[V_k^{n-1}\mid V_k^{n-1}=v\right]$, *para* $j=1,\ldots,n$. *Então* $(b_1(.),\ldots,b_n(.))$ *é o único equilíbrio simétrico do leilão simultâneo de preço uniforme.*

(b) O lucro esperado de um licitante com valor v no leilão de preço uniforme é:

$$\Pi_1=\left[v-E\left(V_k^{n-1}\mid V_k^{n-1}\leq v\right)\right]\bullet P(V_k^{n-1}\leq v)$$

(c) O pagamento esperado de um comprador com valor v é igual a

$$E(V_k^{n-1} \mid V_k^{n-1} \leq v).P\left(V_k^{n-1} \leq v\right),$$

(d) A receita total esperada do vendedor no leilão de preço uniforme é $k.E\left(V_{k+1}^{n}\right)$.

Os seguintes lemas serão de utilidade:

Lema 2: *seja $p^*(v)$ a probabilidade de um licitante ganhar algum objeto quando o seu valor é v e todos jogam em equilíbrio. Então $p^*(v)$ é crescente.*

Demonstração: o *payoff* esperado de um comprador com avaliação v e probabilidade de ganhar algum objeto igual a $p^*(v)$ pode ser escrito como uma função de v:

$$\Pi_l(v)=v.p^*(v)-g(p^*(v)).$$

Então, $\Pi'_l(v)=v.[p^*(v)]' + p^*(v)-g'(p^*(v)).[p^*(v)]' = [v-g'(p^*(v))][p^*(v)]' + p^*(v)$. Por A1 temos que

$$\Pi'_l(v)=p^*(v). \qquad \text{A2}$$

Por outro lado, a função $\Pi_1(v)$ é convexa. De fato, sejam v_1, v_2 e $v^*=\lambda v_1+(l\text{-}l)v_2$. Então, $\Pi_1(v_j)=v_j p^*(v_j)-g(p^*(v_j)) \geq p.v_j - g(p)$, $\forall j=1,2$ e $\forall p$. Em particular para $p=p^*(v^*)$. Então, $\Pi_1(v_j)\geq p^*(v^*)v_j - g(p^*(v^*))$, $\forall j=1,2$, donde $\lambda\Pi_1(v_1) + (1-\lambda)\Pi_1(v_2) \geq \lambda p^*(v^*)v_1 - \lambda g(p^*(v^*)) + (1-\lambda)p^*(v^*)v_2 - (1-\lambda)g(p^*(v^*)) = p^*(v^*)(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) - g(p^*(v^*)) = p^*(v^*)v^* - g(p^*(v^*)) = \Pi_1(v^*) = \Pi_1(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2)$. Portanto, $\lambda\Pi_1(v_1) + (1-\lambda)\Pi_1(v_2) \geq \Pi_1(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2)$, como afirmamos.

Desta forma, $\Pi_1'(v)$ é crescente em v, o que implica que $p^*(v)$ é crescente em v, como queríamos demonstrar. ■

Assumiremos por enquanto que no leilão discriminatório a função de distribuição de $b(V_j)$ é estritamente crescente em $[0,\bar{v}]$, para todo comprador j. Isso implica que $p^*(b)$, a probabilidade de ganhar lançando b, quando todos os outros jogam em equilíbrio, é estritamente crescente. De fato, se $b_1>b_2$, então $p^*(b_1)=P(b(V_j)<b_1$, para pelo menos (n-k) compradores j dentre os (n-1) restantes$)=P(b_2<b(V_j)<b_1$, para pelo menos (n-k) compradores j dentre os (n-1) restantes$)+P(b(V_j)<b_2$, para pelo menos (n-k) compradores

j dentre os (n-1) restantes)> P(b(V_j)<b_2 para pelo menos (n-k) compradores j dentre os (n-1) restantes) =p*(b_2), usando-se que P(b_2<b(V_j)<b_1, para pelo menos (n-k) compradores j dentre os (n-1) restantes)>0, pelo fato da função de distribuição de b(V_j) ser estritamente crescente.

Agora podemos provar o seguinte resultado:

Lema 3: *No leilão simultâneo discriminatório, b(v) é estritamente crescente em* $[0,\bar{v}]$.

Demonstração: Estamos assumindo que *p(b)* é estritamente crescente em *b*. Seja *p(b(v))=p*(v)*. Pelo Lema 2 *p*(v)* é crescente em *v*. Logo, *b(v)* é crescente em *v*. Para ver que *b(v)* é estritamente crescente use o fato de que caso contrário, se digamos $v_1<v_2$ e $b(v_1)=b(v_2)$, $b(v)$ não seria ótima resposta para um licitante com avaliação $v' \in (v_1, v_2)$ nas situações em que a mais alta avaliação está em (v_1, v_2). De fato, nestas situações, lançando $b(v')+\varepsilon$, para $\varepsilon>0$, e suficientemente pequeno, o licitante sempre ganha o leilão. Desta forma, ele pode aumentar o seu *payoff* esperado e lucrar com o desvio. Portanto, *b*(.) é estritamente crescente, como queríamos demonstrar.■

A demonstração do lema acima corrige a demonstração apresentada por Wolfstetter (1996), onde o autor incorretamente conclui que se p*(v) é crescente em v e p*(b) é crescente, então b(v) é crescente.

Para verificar que a função de distribuição de $b(V_j)$ é estritamente crescente em $[0,\bar{v}]$, use que $P(b(V_j) \leq b_1)=P(V_j) \leq b^{-1}(b_1))=F(b^{-1}(b_1))$, F é estritamente crescente e b^{-1} é estritamente crescente por ser a inversa de uma função estritamente crescente.

O Lema 3 implica que a probabilidade do licitante 1 ganhar, se ele é do tipo *v*, é:

$p^*(v) = P(ganhar \mid valor = v) = P\,(b(V_j) \leq b(v)$, para pelo menos (n-k) compradores j dentre os (n-1) restantes)

$= P\ (V_j \leq v$, para pelo menos (n-k) compradores j dentre os (n-1) restantes) $= P\left(V_k^{n-1} \leq v\right)$, como no leilão de Vickrey.

Logo, para este leilão o Teorema 1 também se aplica. Assim, $g\big(p\ (v)\big) = E\left(V_k^{n-1} \mid V_k^{n-1} \leq v\right) \bullet P\left(V_k^{n-1} \leq v\right)$.

Então, como neste leilão um comprador paga o seu lance *b(v)* se ele ganha um objeto, temos que:

$$g\left(p^*(v)\right) = b(v).P\left(V_k^{n-1} \leq v\right).$$

Segue então que:

$$b(v) = E\left[V_k^{n-1} \mid V_k^{n-1} \leq v\right].$$

Temos, dessa forma, demonstrado o seguinte resultado:

Teorema 3: (Vickrey, 1962; Ortega-Rechert. 1968).

No modelo SVPI com n licitantes neutros ao risco, k objetos, n>k, vale o seguinte:

(a) Seja $b_j(v) = E\left[V_k^{n-1} \mid V_k^{n-1} \leq v\right]$ *para j=1,...,n. Então* $(b_1(.),...,b_n(.))$ *é o único equilíbrio simétrico do leilão simultâneo discriminatório.*

(b) O lucro esperado de um licitante com valor v no leilão discriminatório é:

$$\Pi_1 = \left[v - E\left(V_k^{n-1} \mid V_k^{n-1} \leq v\right)\right] \bullet P(V_k^{n-1} \leq v)$$

(c) O pagamento esperado de um comprador com valor v é igual a

$$E(V_k^{n-1} \mid V_k^{n-1} \leq v).P\left(V_k^{n-1} \leq v\right),$$

(d) A receita total esperada do vendedor no leilão discriminatório é $k.E\left(V_{k+1}^n\right)$.

Dos Teoremas 2 e 3 obtemos o seguinte corolário:

Corolário 1: *A receita total esperada do vendedor e o payoff esperado dos compradores são os mesmos em ambos os leilões simultâneos, de preço uniforme e discriminatório.*

Nos leilões seqüenciais de primeiro e segundo preços, *k* objetos estão à venda por meio de uma seqüência de *k* leilões. Sejam $b_1, b_2,..., b_k$ os lances ganhadores. Uma estratégia é uma coleção de funções $\beta_1(.), \beta_2(.;b_1),..., \beta_k(.;b_1,....,b_{k-1})$, onde $\beta_j(.;b_1,....,b_{j-1})$ é o lance de um jogador de valor v na j-ésima rodada, dado que $b_1,...,b_{j-1}$ são os lances ganhadores das rodadas anteriores. Suporemos que cada função $\beta_j(.;b_1,....,b_{j-1})$ é estritamente crescente.

Teorema 4 (Weber, 1983; Milgrom, 1985). *No modelo SVPI com n licitantes neutros ao risco, k objetos (n > k), o seguinte segue:*

(i) Nos leilões seqüenciais de primeiro e segundo preços o lucro esperado de um licitante com valor v é:

$$\Pi_1 = \left[v - E\left(V_k^{n-1} \mid V_k^{n-1} \leq v\right)\right] \bullet P(V_k^{n-1} \leq v),$$

O pagamento esperado é

$$g\left(p^*(v)\right) = P(V_k^{n-1} \leq v).E(V_k^{n-1} \mid V_k^{n-1} \leq v)$$

e a receita esperada é

$$k.E\left[V_{k+1}^n\right].$$

(ii) Seja $b_{pp}^l(v) = E\left[V_k^{n-1} \mid V_l^{n-1} < v < V_{l-1}^{n-1}\right] = E\left[V_{k+1}^n \mid V_l^n = v\right]$ *para* $l = 1,.....,k$ *e seja* $b_{PP}(.) = \left(b_{PP}^1(.),....,b_{PP}^k(.)\right)$. *Então,* $b_{PP}(.)$ *é o único equilíbrio simétrico do leilão seqüencial de 1º preço.*

(iii) Seja $b_{SP}^l(v) = E[V_k^{n-1} \mid V_l^{n-1} = v] = E\left[V_{k+1}^n \mid V_{l+1}^n = v\right]$, *para* $l = 1,.....,k$ *e seja* $b_{SP}(.) = \left(b_{SP}^1(.),....,b_{SP}^k(.)\right)$. *Então,* $b_{SP}(.)$ *é o único equilíbrio simétrico do leilão seqüencial do 2º preço.*

Demonstração: Como a função $\beta_j(.;b_1,....,b_{j-1})$ é estritamente crescente, para todo $j=1,...,k$, o ganhador na rodada j será o comprador com o j-ésimo mais alto valor. É claro, então, que os ganhadores serão aqueles que tiverem valores entre os k mais altos valores. Desta forma, o Teorema 1 aplica para ambos os tipos de leilões e temos demonstrado a parte (i).

Sob a perspectiva do comprador 1, a probabilidade de ele ganhar algum objeto em alguma rodada, quando tem um valor v é:

$$p^*(v) = P\left(V_k^{n-1} \leq v\right).$$

Sabemos que o pagamento esperado de um jogador do tipo v é:

$$P\left(V_k^{n-1} \leq v\right) \bullet E\left(V_k^{n-1} \mid V_k^{n-1} \leq v\right).$$

A probabilidade de ele ganhar um objeto exatamente na rodada k é a probabilidade dele ganhar algum objeto e não ganhar nas k-1 primeiras rodadas. Isto é,

P(jogador 1 ganhar na rodada $k|V_1=v$)=P(v ser maior do que exatamente n-k V_j's e menor do que exatamente k-1 V_j's do conjunto $\{V_2,\ldots,V_n\}$)=

$$P(V_k^{n-1} < v < V_{k-1}^{n-1})$$

Assim, o pagamento esperado de um jogador do tipo v na rodada k é:

$$P(V_k^{n-1} < v < V_{k-1}^{n-1}) \quad .E\left(V_k^{n-1} \mid V_k^{n-1} < v < V_{k-1}^{n-1}\right)$$

A probabilidade de ele ganhar algum objeto exatamente na rodada k-1 é:

P(jogador 1 ganhar na rodada k-1$|V_1=v$)=P(v ser maior do que exatamente n-k+1 V_j's e menor do que exatamente k-2 V_j's do conjunto $\{V_2,\ldots,V_n\}$)=

$$P(V_{k-1}^{n-1} < v < V_{k-2}^{n-1})$$

Então, o pagamento esperado de um jogador do tipo v, na rodada k-1, é:

$$P(V_{k-1}^{n-1} < v < V_{k-2}^{n-1}) \, .E\left(V_k^{n-1} \mid V_{k-1}^{n-1} < v < V_{k-2}^{n-1}\right).$$

Continuando com este procedimento podemos deduzir que o pagamento esperado de um jogador do tipo v na rodada l é dado por:

$$P(V_l^{n-1} < v < V_{l-1}^{n-1}) \, .E\left(V_k^{n-1} \mid V_l^{n-1} < v < V_{l-1}^{n-1}\right).$$

Logo, o pagamento esperado do jogador 1 na rodada l se ele ganha um objeto exatamente na rodada l é, usando (B_3) e (B_4) do Apêndice B:

$$E\left(V_k^{n-1} \mid V_l^{n-1} < v < V_{l-1}^{n-1}\right) = E\left(V_k^{n-1} \mid V_{l-1}^{n-1} = v\right) = E\left(V_{k+1}^{n} \mid V_l^{n} = v\right).$$

No leilão de primeiro preço o comprador paga o seu lance, se ganhar. Logo, o lance do comprador nesse leilão será, quando tiver avaliação v,

$$b_{PP}^{l}(v) = E\left(V_{k+1}^{n} \mid V_l^{n} = v\right) \forall l : 1,\ldots,k,$$

e temos demonstrado a parte (ii).

Num leilão seqüencial de 2° preço temos que a estratégia dominante de um licitante qualquer na última rodada ($l = k$) é submeter um lance com o seu verdadeiro valor $\beta_k(v; b_1,\ldots, b_{k-1}) = v$ Se o jogador ganha na k-ésima rodada, ele espera pagar $E\left(V_{k+1}^{n} \mid V_k^{n} = v\right)$, e se ganha na rodada k-1, ele espera pagar $E\left(V_k^{n-1} \mid V_{k-1}^{n-1} < v < V_{k-2}^{n-1}\right)$. Sob a perspectiva do jogador 1, o seu pagamento na rodada k-1, dado que ele ganha nesta rodada, deve ser igual ao segundo maior lance nesta rodada, que é o lance do licitante de maior valor dentre os n-k+1 jogadores restantes, ou seja, é o lance do licitante com o k-1-ésimo maior valor em $\{V_2,\ldots,V_n\}$ Dado que $\left(V_{k-1}^{n-1} < v = V_1 < V_{k-2}^{n-1}\right)$, o licitante com o k-1-ésimo maior valor em $\{V_2,\ldots,V_n\}$ é o licitante com o k-ésimo maior valor em $\{V_1,\ldots,V_n\}$. Então, se o jogador 1 é do tipo v,

$$E\left(V_k^{n-1} \mid V_{k-1}^{n-1} < v < V_{k-2}^{n-1}\right) = E\left(V_{k+1}^{n} \mid V_{k-1}^{n} = v\right)$$

$$E\left(\beta_{k-1}(V_{k-1}^{n-1}) \mid V_{k-1}^{n-1} < v < V_{k-2}^{n-1}\right) = E\left(\beta_{k-1}(V_k^{n}) \mid V_{k-1}^{n} = v\right).$$

Logo,

$$E(V_{k+1}^{n} \mid V_{k-1}^{n} = v) = E\left(\beta_{k-1}(V_k^{n}) \mid V_{k-1}^{n} = v\right) \qquad (*)$$

É claro que $\beta_{k-1}(v) = E\left(V_{k+1}^n \mid V_k^n = v\right)$. De fato, basta ver que

$\beta_{k-1}(V_k^n) = E\left(V_{k+1}^n \mid V_k^n\right)$ é solução da equação (*).

Argumentando indutivamente provamos que $\beta_l(v) = E\left(V_{k+1}^n \mid V_{l+1}^n = v\right)$, o que demonstra a parte (iii) e conclui a demonstração. ■

4 Conclusão

O propósito deste trabalho foi oferecer uma introdução à teoria de leilões de múltiplos objetos onde cada comprador está interessado em comprar somente um objeto. A análise desenvolvida teve por base o modelo simétrico de valores privados e independentes, onde os itens eram vendidos simultaneamente ou seqüencialmente. Ilustramos a equivalência de *payoffs* dos leilões simultâneos de preço uniforme e discriminatório e dos leilões seqüenciais de primeiro e segundo preços. Estabelecemos, então, um resultado mais geral: todos os leilões que contemplam com um objeto cada um dos licitantes, com os k mais altos valores e com o mesmo valor crítico, são *payoff* equivalentes.

A teoria dos leilões encontra-se entre os ramos mais bem-sucedidos da Economia. É crescente o número de consultores, especialistas nesta área, que têm oferecido seus conhecimentos teóricos para desenhos de mecanismos de leilão realizados na prática. Testar a teoria dos leilões tem sido o foco de inúmeros trabalhos em Economia Experimental. Muitas pesquisas têm sido feitas e muito resta ainda para ser aprendido. Mas a recente explosão de interesse em leilões promete que nossos conhecimentos crescerão substancialmente num futuro próximo.

Referências

Cassady, R. Jr. Auctions and auctioneering. *University of California Press*, 1967

Engelbrecht-Wiggans, R. Optimal reservation prices in auctions. *Management Science,* 33, p. 763-70, 1987

_______ Revenue equivalence in multi-object auctions. *Economic Letters* 26, p. 15-19, 1988.

Harris, M., Raviv, A. Allocation mechanisms and the design of auctions. *Econometrica*, 49, p. 1477-1499, 1981.

Harsanyi, J. Games with incomplete information. *American Economic Review*, 85, p. 291-303, 1995.

Jürgen Eichberger. *Game theory for economists*. Academic Press Inc., 1993.

Maskin E., Riley, John. Asymmetric auctions. *Working Paper*, Harvard University and UCLA, 1993.

Menezes, F. Auctions of identical objects with single-unit demands: a survey. *Revista Brasileira de Econometria*, v. 18, n. 2, p. 309-340, 1998.

Milgrom, P.; Weber, R. A theory of auctions and competitive bidding. *Econometrica*, 50, p. 1089-1122, 1982.

Milgrom, P. The economics of competitive bidding: a selective survey. *In*: Hurwicz, L., Schmeidler, D., Sonneschein H. (eds.), *Social goal and social organization: essays in memory of Elisha Pazner.* Cambridge University Press, 1985.

Myerson, R. Optimal auction design. *Mathematics of Operation Research,* 6, p. 58-73, 1981.

Ortega-Reichert, A. Models for competitive bidding under uncertainty. *Technical Report* n. 103, Department of Operations Research, Stanford University, 1968.

Riley, J., Samuelson, W. Optimal auctions. *American Economic Review,* 71, p. 381-92, 1981.

Stark, R., Rothkopf, M. Competitive bidding: a comprehensive bibliography. *Operations Research,* 27, p. 364-90, 1979

Vickrey, W. Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *Journal of Finance* 16, p. 9-37, 1961.

_______ Auctions and bidding games. *Recent Advances in Game Theory* (conference proceedings). Princeton University, 1962, p.15-27.

Weber, R. Multi-object auctions. *In*: Engelbrecht-Wiggans, R.; Shubik, M., Stark, R. (eds.), *Auctions, bidding and contracting: uses and theory*. New York: New York University Press, 1983.

Wolfstetter, E. Auctions: an introduction. *Journal of Economic Surveys*, 10, p. 367-420, 1996.

Apêndice: estatísticas de ordem

Sejam $V_1, V_2, \ldots, V_n$, $n > 1$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição comum $F = F_{V_j}$ e f.d.p. $f = f_{V_j}$ com suporte em $[0, \bar{v}]$. Dizemos que as V_j formam uma amostra aleatória de tamanho n tirada de F, ou tirada da população com distribuição F.

Para cada ω no espaço amostral, $(V_1^n(\omega), V_2^n(\omega), \ldots\ldots, V_n^n(\omega))$ é a permutação de $(V_1(\omega), \ldots\ldots, V_n(\omega))$ que satisfaz $V_1^n(\omega) \geq V_2^n(\omega) \geq \ldots \geq V_n^n(\omega)$

Assim, $V_1^n = \max(V_1, \ldots., V_n)$ e $V_n^n = \min(V_1, \ldots., V_n)$. Para cada j=1,2,...,n, a variável V_j^n é chamada a *estatística de ordem j da amostra* $V_1, V_2, \ldots, V_n$.

A função de distribuição das estatísticas de ordem é dada por:

$$F_{V_1^n}(x) = [P(V_j \leq x)]^n = F^n(x)$$

Para $j > 1$,

$F_{V_j^n}(x) = P(V_j^n \leq x) = P($no mínimo $(n\text{-}j+1)$ dos V_k são $\leq x) = P$ exatamente $(n\text{-}j+1)$ dos V_k são $\leq x$ e $(j\text{-}1)$ dos V_k são $> x) + P$ (no mínimo $(n\text{-}j)$ dos V_k são $\leq x$). Logo,

$$F_{V_j^n}(x) = \frac{n!}{(n-j+1)!(j-1)!} F^{n-j+1}(x)(1-F(x))^{j-1} + F_{V_{j-1}^n}(x) \qquad (B_1)$$

Logo, a f.d.p. de V_j^n, para todo j=1,...,n, é

$$f_{V_j^n}(\mathrm{x}) = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} F(x)^{n-j}(1-F(x))^{j-1} f(x) \qquad (B_2)$$

Para todo $s < k$ $[V_k^n \mid V_s^n = v]$ é precisamente Z_{k-s}^{n-s}, a estatística de ordem *k-s* da amostra aleatória $z_1, \ldots, z_{n-s}$, *de* tamanho *n-s,* onde $F_{Z_j}(x) = P\,(Z_j \leq x) = P(V_j \leq x \mid V_j \leq v) = \dfrac{F(x)}{F(v)}$ e

$f_{Z_j}(x) = \dfrac{f(x)}{F(v)}$, para $x \geq v$. Portanto,

$$E\left(V_k^n \mid V_s^n = v\right) = E(Z_{k-s}^{n-s})$$

Logo, podemos escrever também

$$E(V_k^m \mid V_s^m = v) = E(V_{k+t}^{m+t} \mid V_{s+t}^{m+t} = v), \forall t = 0, \ldots, n-m, \forall m \leq n. \qquad (B_3)$$

Por (B_1) e (B_2) temos:

$$F_{Z_j^m}(x) = \frac{m!}{(m-j+1)!(j-1)!}[\frac{F(x)}{F(v)}]^{m-j+1}(1-\frac{F(x)}{F(v)})^{j-1} + F_{Z_{j-1}^m}(x)$$

$$f_{Z_j^m}(x) = \frac{m!}{(m-j)!(j-1)!}[\frac{F(x)}{F(v)}]^{m-j}(1-\frac{F(x)}{F(v)})^{j-1}\frac{f(x)}{F(v)}$$

Podemos escrever também

$$E\left(V_k^n \mid V_s^n = v\right) = E\left(V_k^n \mid V_{s+1}^n < v \leq V_s^n\right), \forall s < k \qquad (B_4)$$

Se $V_1, \ldots, V_n$ são i.i.d com distribuição uniforme em $[0,1]$, sabemos que $F(x)=x$ e $f(x)=1$. Então,

$$EV_1^m = \frac{m}{m+1}. \forall m = 1, \ldots, n$$

$$EV_j^m = \frac{m-j+1}{m-j+2} EV_{j-1}^m, \forall j = 1, \ldots, n, \forall m = j, \ldots, n$$

Logo,

$$EV_j^m = \frac{m-j+1}{m+1}.\ \forall j = 1,\ldots,m, \forall m = j,\ldots,n. \qquad (B_5)$$

Quando as variáveis V_j têm distribuição uniforme em $[0,1]$, as z_j, acima definidas, têm distribuição uniforme em $[0,v]$. Então, $F_{Z_j}(x) = \frac{x}{v}$ e $f_{Z_j}(x) = \frac{1}{v}$. Assim,

$$f_{Z_m^j}(x) = \frac{m!}{(m-j)!(j-1)!}\left(\frac{x}{v}\right)^{m-j}\left(1-\frac{x}{v}\right)^{j-1}\frac{1}{v}$$

Desta forma $E[Z_j^m] = \int_0^v x f_{Z_j^m}(x)dx$

Procedendo à mudança da variável x por zv obtemos

$E[Z_j^m] = v\int_0^1 z f_{V_j^m}(z)dz = vE[V_j^m]$, donde

$$E[Z_j^m] = \frac{m-j+1}{m+1}v, \forall j = 1,\ldots,m \qquad (B_6)$$

De B_3 e B_6 podemos escrever:

$$E[V_j^n \mid V_s^n = v] = E[Z_{j-s}^{n-s}] = \frac{n-j+1}{n-s+1}v.\ \forall s < j, \forall j = 2,\ldots,n. \qquad (B_7)$$

Em particular,

$$E[V_2^n \mid V_1^n = v] = E[Z_1^{n-1}] = \frac{n-1}{n}v. \qquad (B_8)$$