

Projetos Com Mais de Duas Variações de Sinal e o Critério da Taxa Interna de Retorno

Clovis de Faro
Paula de Faro

Escola de Pós-Graduação em Economia da F.G.V.
BARRA Inc.

RESUMO

Para o caso de projetos com mais de duas variações de sinal, nem sempre é aplicável o critério de avaliação segundo a taxa interna de retorno (TIR). Em tais situações, é necessário assegurar a unicidade da TIR; o que pode ser feito, de uma maneira que envolve somente adições, através de procedimentos como o baseado nas chamadas diagonais de Vincent e nas bordas de Pratt-Hammond. No presente trabalho, apresentando uma justificativa formal para o procedimento que se fundamenta na construção da diagonal de Vincent e de suas extensões, mostra-se também como fazer uma integração com as correspondentes bordas de Pratt-Hammond

PALAVRAS-CHAVE

Critério da taxa interna de retorno – condições de suficiência

ABSTRACT

For the case of an investment project of which the cash flow presents more than two changes of sign, the internal rate of return (IRR) criterion is not always applicable. It is necessary to assure the uniqueness of the IRR. Making use of additions only, this can be efficiently accomplished via the construction of the so called Vincent's diagonals or Pratt-Hammond's borders. In this paper, presenting a formal justification for the procedure based on the Vincent's diagonals, it is proposed an integration with the Pratt-Hammond's borders.

KEY WORDS

Internal rate of return criterion-sufficient conditions

JEL Classification

D92, G31, O22

INTRODUÇÃO

Como explicitado no prefácio do hoje clássico texto de Hirshleifer (1970), a teoria do capital representa uma extensão da análise econômica ao domínio temporal. Ou seja, sua preocupação central é a de analisar situações onde decisões de alocação de capital implicam consequências econômicas que se manifestam no futuro. No que se segue, abstraindo-se do fato de ao futuro estar intimamente ligado o conceito de incerteza, iremos concentrar atenção nas condições de aplicabilidade de um dos mais populares critérios de avaliação econômica de oportunidades de alocação de capital. Especificamente, caracterizando uma oportunidade de investimento, genericamente chamada de projeto, pela seqüência temporal de resultados financeiros a ela associados, trataremos, admitindo a ausência de restrições orçamentárias, do critério da taxa interna de retorno (cunhado por KEYNES, 1935 como eficiência marginal do capital).

Formalmente, dado o que se denomina de projeto de investimento, caracterizado pela seqüência de números reais $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, chamada de fluxo de caixa e onde $a_0 < 0$ denota o investimento inicial, a_j é a receita líquida no j -ésimo período da vida econômica n , para $j = 1, 2, \dots, n$, com $a_n \neq 0$, sendo i uma taxa de juros cujo período coincida com o do fluxo de caixa, a correspondente função valor atual é definida como:

$$V(i) = \sum_{j=0}^n a_j (1+i)^{-j}, \quad i > -1 \quad (1)$$

Nestas condições, diz-se que i^* é uma taxa interna de retorno do projeto, se anular a função valor atual; isto é, se $V(i^*) = 0$.

Por outro lado, sendo ρ uma taxa de juros exogenamente fornecida, tomada como de comparação e que costuma ser chamada de taxa (mínima) de atratividade (cf. BIERMAN & SMIDT, 1993 e GRANT & IRESON, 1964) ou de custo de capital (cf. BODIE & MERTON, 1998 e LUENBERGER, 1998), textos, por exemplo Bierman e Smidt (1993) e Luenberger (1998), costumam apresentar a seguinte regra de avaliação: implemente o projeto se sua taxa interna de retorno for superior à ρ .

Ora, e isto nem sempre é devidamente observado, a correta aplicação da regra acima, dita critério da taxa interna de retorno, requer que três condições sejam verificadas: existência de taxa interna; unicidade; e um resultado de avaliação que seja consistente com o obtido segundo o mais bem conceitualmente

fundamentado (vide, por exemplo, ROSS, WESTERFIELD & JAFFE, 1993), método do valor atual (à mesma taxa ρ e que prescreve a implementação do projeto se $V(\rho) > 0$).

Provavelmente, a razão pela qual as condições apontadas não são usualmente abordadas deve-se ao fato de que a maioria dos projetos de investimento que são encontrados na prática são do que se denomina do tipo convencional; isto é, caracterizam-se pela presença de exatamente uma mudança de sinal no correspondente fluxo de caixa. Em tal situação, típica de empreendimentos em que a etapa de desembolsos líquidos (fase de investimento) é seguida somente da etapa de resultados positivos (fase de retorno), a regra de avaliação mencionada pode ser aplicada sem sobressaltos. Isto é, pode-se demonstrar (cf. DE FARO, 1974) que, para a classe de projetos convencionais, as três condições de aplicabilidade do critério da taxa interna de retorno são trivialmente verificadas.

Entretanto, como apontado nos trabalhos pioneiros de Lorie e Savage (1955) e de Hirshleifer (1958), existem várias situações onde os projetos são não-convencionais; isto é, apresentam mais de uma variação de sinal nos respectivos fluxos de caixa. Em tais casos, que ocorrem trivialmente, por exemplo, em projetos de exploração de minas a céu aberto e em investimentos em usinas nucleares, onde a fase de retorno é respectivamente seguida de gastos com reposição do meio ambiente e eliminação de resíduos radioativos, e que podem também surgir quando da comparação entre projetos ditos mutuamente exclusivos, via o emprego da extensão do conceito de taxa interna denominada de taxa fisheriana de retorno sobre os custos (cf. ALCHIAN, 1955), as condições necessárias nem sempre são atendidas. Em particular, projetos de investimento com múltiplas variações de sinal em seus respectivos fluxos de caixa são comuns na análise social de projetos de irrigação. Isto ocorre porque, dado que a vida útil da barragem é muito longa (da ordem de 50 anos), tem que se considerar a renovação periódica dos equipamentos hidráulicos (bombas e tubulações), cujas respectivas vidas úteis são bem mais curtas (vide-se, por exemplo, BRANDÃO & DE FARO, 1987).

A possibilidade de colapso do critério da taxa interna de retorno provocou uma intensa busca de condições de suficiência para sua aplicabilidade. Assim, começando com Soper (1959), podemos destacar as contribuições de Kaplan (1965), Teichroew, Robichek e Montalbano (1965), Bernhard (1967), Jean (1968), Norstrom (1972), Hammond (1974), Aucamp e Eckardt (1976), de Faro (1975 e 1978), de Faro e Soares (1978), Bernhard (1979 e 1980), Pratt e Hammond (1979), Dybvig (1983) e Bezza (1984, posteriormente discutida em JEGERS, 1986 e LONZI, 1988). Dentre estas, por suas respectivas

simplicidades, já que fazem uso tão-somente de adições dos fluxos de caixa, sobressaem as que se baseiam nas chamadas funções de Polya, caso dos trabalhos de Hammond (1974) e de Pratt e Hammond (1979, alternativamente fundamentado em PRATT, 1979), e as que podem ser explicadas a partir de um teorema devido a Vincent (originalmente publicado em 1836 e cuja demonstração pode ser encontrada em USPENSKY, 1948), como as de de Faro (1978) e de Bernhard (1979 e 1980).¹

No que se segue, buscando formalizar e estender o anteriormente apresentado em de Faro (1983 e 1985), iremos nos deter no exame da vertente derivada da aplicação do Teorema de Vincent. No processo, iremos também buscar uma comparação com o procedimento de Pratt e Hammond, mostrando como, analogamente ao caso das chamadas diagonais de Vincent, podemos considerar extensões de sua aplicação. Como contribuições básicas, além da integração com o procedimento de Pratt e Hammond, ressaltamos os Lemas 3 e 4, bem como o Corolário 1, que provêem uma demonstração, que se presume elegante e facilmente replicável nos demais níveis de extensão, para o Teorema apresentado na seção 2 do trabalho.

1. PROPRIEDADES DA FUNÇÃO VALOR FUTURO

Define-se a chamada função valor futuro associada a um projeto de investimento como:

$$F(i) = (1+i)^n V(i) = \sum_{j=0}^n a_j (1+i)^{n-j}, i > -1 \quad (2)$$

Logo, alternativamente, podemos dizer que um particular valor de i , que denotamos por i^* , é uma taxa interna de retorno do projeto se anular sua função valor futuro. Como veremos, a razão de se trabalhar com a função valor futuro é que, sendo positivos os expoentes da soma $1+i$, é tarefa trivial, embora tediosa, reescrevê-la como um polinômio em i . Isto permite com que seja facilmente limitado, via aplicação da tradicional Regra de Sinais de Descartes, o número de taxas internas positivas do projeto em questão.

1 Na verdade, o trabalho original de BERNHARD (1979), que apresentou uma condição de suficiência idêntica à proposta por DE FARO (1978), foi independentemente desenvolvido por um caminho alternativo em que se fez uso da condição de SOPER (1959).

Regra geral, ao menos antes de levar em conta, *ex post*, efeitos de eventual inflação, só se trabalha com taxas de juros positivas. Ora, limitando a análise a este campo de interesse prático, a condição de que se tenha lucro contábil positivo, isto é, $\sum_{j=0}^n a_j > 0$, passa a ser necessária, mas ainda não suficiente, para que se possa aplicar o critério de avaliação segundo a taxa interna de retorno.² No que se segue, supondo que tal condição esteja presente, teremos a bonificação de que fica assegurada a existência de taxa interna de retorno positiva. Ainda mais, uma vez assegurada sua unicidade, fica automaticamente garantida a questão de consistência com o critério do valor atual.

Como mencionado, a razão de se trabalhar com a função valor futuro, e não com a função valor atual, é que a primeira pode ser facilmente escrita como um polinômio em i , cujos coeficientes são os termos do que se denomina de (primeira) diagonal de Vincent. Deste modo, analogamente à justificativa para a unicidade da taxa interna de retorno no caso de projetos convencionais, com base na bem conhecida Regra de Sinais de Descartes, conclui-se que também haverá unicidade da taxa interna se houver exatamente uma variação de sinal na (primeira) diagonal de Vincent.

Denotando-se por D_d a (primeira) diagonal de Vincent, também chamada de primeira diagonal à direita, temos que esta é formada pela seguinte seqüência de acumulações do fluxo de caixa:

$$D_d : \{A_0^{(n+1)}, A_1^{(n)}, \dots, A_{n-1}^{(2)}, A_n^{(1)}\} \quad (3)$$

onde $A_k^{(\ell)}$ é o termo de ordem k ($k = 0, 1, \dots, n$) da ℓ -ésima acumulação ($\ell = 1, 2, \dots$), construído de modo que ³

$$A_k^{(\ell)} = \begin{cases} a_0, k = 0 \text{ e } \ell = 1, 2, \dots \\ \sum_{j=0}^k a_j, k = 1, 2, \dots, n \text{ e } \ell = 1 \\ A_{k-1}^{(\ell)} + A_k^{(\ell-1)}, k = 1, 2, \dots, n \text{ e } \ell = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4)$$

2 Caso contrário, desprezando o caso limite de lucro contábil nulo, se $\sum_{j=0}^n a_j < 0$, como $\lim_{i \rightarrow \infty} V(i) = a_0 < 0$, ter-se-ia ou ausência de taxa interna ou mais de uma, ou ainda, no caso extremo de unicidade, a questão de inconsistência.

3 Procedendo-se por indução, é fácil verificar que $A_k^{(\ell)} = \sum_{j=0}^k \binom{\ell+k-j-1}{k-j} a_j, k = 0, 1, \dots, n \text{ e } \ell = 1, 2, \dots$

A justificativa para o fato de que a presença de exatamente uma variação de sinal em D_d garante a unicidade de uma taxa interna de retorno positiva, para um projeto de investimento com lucro contábil positivo, pode ser encontrada em um método de separação das raízes de polinômios, que foi originalmente proposto por Vincent (cf. USPENSKY, 1948). No que se segue, buscando tornar a apresentação autocontida, consideraremos aqui uma variante, mais simples, da demonstração desenvolvida por Bernhard (1979).

Lema 1

A função valor futuro pode ser escrita como:

$$F(i) = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{(k+1)} i^k \quad (5)$$

Demonstração

Fazendo-se uso do binômio de Newton, tem-se que:

$$F(i) = \sum_{j=0}^n a_j (1+i)^{n-j} = \sum_{j=0}^n a_j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} i^k$$

Logo, promovendo a (algo tediosa mas trivial) coleta dos termos que sejam coeficientes de cada uma das potências de i , decorre que:

$$\begin{aligned} F(i) = & \left\{ \sum_{j=0}^n a_j \right\} i^0 + \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-j}{1} a_j \right\} i^1 + \left\{ \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-j}{2} a_j \right\} i^2 \\ & + \dots + \left\{ \sum_{j=0}^1 \binom{n-j}{n-1} a_j \right\} i^{n-1} + \left\{ \sum_{j=0}^0 \binom{n-j}{n} a_j \right\} i^n \end{aligned}$$

Portanto, observando-se que

$$A_{n-k}^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-j}{n-k-j} a_j = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-j}{k} a_j, \quad k=0, 1, \dots, n$$

tem-se:

$$F(i) = A_n^{(1)} + A_{n-1}^{(2)} i + A_{n-2}^{(3)} i^2 + \dots + A_1^{(n)} i^{n-1} + A_0^{(n+1)} i^n$$

c.q.d.

Ou seja, como anteriormente mencionado, a função valor futuro pode ser escrita como um polinômio em i , cujos coeficientes são exatamente os termos da (primeira) diagonal de Vincent, D_d . Deste modo, fazendo-se uso da Regra de Sinais de Descartes (cf. USPENSKY, 1948), segue-se que o projeto em questão apresentará exatamente uma taxa interna de retorno positiva se tivermos não mais do que uma variação de sinal em D_d .⁴

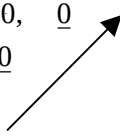
Como ilustração, tanto do resultado acima como do processo de construção de D_d , consideremos o seguinte projeto de investimento:

$$A : \{-10, 20, 20, -80, 50, 100\}$$

Notando que o projeto denominado A apresenta 3 variações de sinal em seu fluxo de caixa, os termos da correspondente (primeira) diagonal de Vincent podem ser facilmente obtidos por acumulações sucessivas, tal como indicado na Tabela I.

TABELA I - CONSTRUÇÃO DE D_d PARA O PROJETO A

	{ -10, 20, 20, -80, 50, 100 }
$\ell = 1 :$	-10, 10, 30, -50, 0, <u>100</u>
$\ell = 2 :$	-10, 0, 30, -20, - <u>20</u>
$\ell = 3 :$	-10, -10, 20, <u>0</u>
$\ell = 4 :$	-10, -20, <u>0</u>
$\ell = 5 :$	-10, - <u>30</u>
$\ell = 6 :$	- <u>10</u>



4 Observe-se que como $A_0^{(n-1)} = a_0 < 0$ e, por suposto, $A_n^{(1)} = \sum_{j=0}^n a_j > 0$, teremos sempre ao menos uma variação de sinal em D_d . Observe-se também que, nas condições consideradas, é fácil verificar que tanto projetos convencionais como aqueles com duas variações de sinal no fluxo de caixa, que são ditos do tipo Jean, apresentam exatamente uma variação de sinal em D_d .

Da Tabela I, considerando os elementos sublinhados, que formam efetivamente uma diagonal, e tendo em vista a orientação indicada pela seta, vemos que $D_a : \{-10, -30, 0, 0, -20, 100\}$. Como o número de variações de sinal em D_a , indicado por $\text{Sinal}\{D_a\}$, é igual a 1, conclui-se que ao projeto A, que é não-convencional e com 3 variações de sinal em seu fluxo de caixa, associa-se uma única taxa interna de retorno positiva (que é aproximadamente igual a 116, 49% por período).⁵

2. EXTENSÃO: RAMIFICAÇÃO DA (PRIMEIRA) DIAGONAL DE VINCENT

Como visto na seção precedente, a presença de exatamente uma variação de sinal em D_a , resultado conhecido na literatura como condição de Bernhard-de Faro (cf. BERNHARD, 1980; CLARKE, 1982; RUSSEL & RICKARD, 1982; HAJDASINSKI, 1983; e JEGERS, 1986), é condição suficiente para a correta avaliação de um projeto de investimento segundo o critério da taxa interna de retorno. No entanto, como ilustrado no caso do projeto B: $\{-10, 20, -50, 150, -200, 200\}$, que apresenta 5 variações de sinal, o fato de que $D_a: \{-10, -30, -70, 20, -20, 110\}$ possua 3 variações de sinal (ou seja, não é satisfeita a condição de Bernhard-de Faro) não implica que não se possa usar o critério da taxa interna de retorno.⁶ Isto porque, como iremos mostrar, ao projeto B corresponde uma única taxa interna de retorno (cujo valor exato é $i^* = 100\%$ por período). Ou seja, a condição de Bernhard-de Faro é suficiente; mas não necessária.

Dado que a condição é não necessária, torna-se relevante que, mantida a simplicidade computacional baseada em adições, seja buscado um refinamento do procedimento. Ora, como já anteriormente mencionado em de Faro (1978) e explicitado em trabalhos posteriores (cf. CLARKE, 1982; HAJDASINSKI, 1983; DE FARO, 1983; e RUSSELL & RICKARD, 1984), é suficiente fazer uso do que já havia sido prescrito pelo próprio Vincent. Isto é, como indicado em Uspensky (1948), basta construir, com base em mudanças sucessivas de variáveis, diagonais de Vincent da própria (primeira) diagonal D_a .

5 É interessante notar que, como anteriormente discutido em DE FARO (1978, 1983 e 1985), a presença de exatamente uma variação de sinal na primeira acumulação (o que caracteriza o resultado de NORSTROM, 1972) ou, o que é mais forte, de não mais do que uma variação na segunda acumulação (o que corresponde ao resultado dito da sequência ξ de DE FARO, 1978), implica exatamente uma variação de sinal em D_a .

6 Alternativamente, a unicidade pode ser comprovada, por exemplo, fazendo-se uso do algoritmo para aplicação do Teorema de Sturm (cf. KAPLAN, 1965), como apresentado em PANTON & VERDINI (1981) e, em uma linguagem computacional mais moderna, em P. DE FARO (1998).

No que se segue, apresentando uma justificativa formal e detalhada para o caso do primeiro nível de extensão,⁷ a qual pode ser facilmente aplicada aos níveis subseqüentes, iremos mostrar como isto pode ser feito de uma maneira eficiente.

Para a justificativa do procedimento, faremos uso dos seguintes resultados.

Lema 2 (HAJDASINSKI, 1983)

Qualquer condição de suficiência para a unicidade de taxas internas de retorno positivas de um projeto de investimento $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ é também válida para a unicidade de taxas internas de retorno negativas do correspondente projeto reverso $\{a_n, a_{n-1}, \dots, a_0\}$.

Demonstração

Se $i > -1$ uma taxa de juros, defina-se a variável y de modo que

$$i = (1+y)^{-1} - 1 = -y(1+y)^{-1} \Rightarrow y = -i(1+i)^{-1} \quad (6)$$

Tem-se que:

$$\lim_{i \rightarrow -1} y = \infty; \lim_{i \rightarrow \infty} y = -1; e \ y = 0 \Leftrightarrow i = 0$$

Ou seja, a variável y assume valores no mesmo campo de definição que i , podendo, pois, ser também interpretada como uma taxa de juros, sendo que a valores positivos de i correspondem valores negativos de y , e vice-versa.

Trabalhando-se com a variável y , a função valor atual do projeto em questão pode ser escrita como:

$$G(y) = \sum_{j=0}^n a_j (1+y)^j = \sum_{k=0}^n a_{n-k} (1+y)^{n-k}, \quad y > -1 \quad (7)$$

Por outro lado, considerando o projeto reverso e trabalhando-se ainda com a variável y , temos que sua correspondente função valor atual é:

⁷ Originalmente desenvolvida em P. DE FARO (1998), o correspondente procedimento é apresentado sob forma de programa computacional com o uso da planilha eletrônica EXCEL.

$$H(y) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} (1+y)^{-k}, \quad y > -1 \quad (8)$$

Comparando-se as expressões (7) e (8), segue-se que a função valor atual, em termos da taxa i , do projeto original, é tal que:

$$V(i) \equiv G(y) = (1+y)^n H(y), \quad i > -1 \quad \text{e} \quad y > -1 \quad (9)$$

Logo, como $V(i)$ somente se anula se $H(y)$ também for nula, e reciprocamente, e como $y > 0 \Rightarrow i \in (-1, 0)$, segue-se que o número de taxas internas de retorno negativas do projeto original coincide com o número de taxas internas de retorno positivas do projeto reverso; e vice-versa.

c.q.d.

Como corolário imediato dos Lemas 1 e 2, segue-se que a ausência de variações de sinal na (primeira) diagonal de Vincent do projeto reverso (que chamaremos de primeira diagonal à esquerda do projeto original, e que denotaremos por D_e), indica a inexistência de taxa interna de retorno negativa para o projeto original.

Assim, por exemplo, no caso do projeto A, como $\text{Sinal}(D_e) = 0$, segue-se que a unicidade da taxa interna $i^* \cong 116,49\%$ por período estende-se a todo campo de taxas de juros com significação econômica (definido por $i > -1$).⁸

Lema 3

Denote-se por D_{de} a diagonal de Vincent formada a partir do reverso de D_d (alternativamente, dizemos que D_{de} é a diagonal à esquerda da primeira diagonal à direita). O número de variações de sinal em D_{de} provê um limite superior para o número de taxas internas positivas inferiores a 100% por período, para o projeto de investimento original.

Demonstração

Partindo da expressão (5), determinada no Lema 1, e considerando a variável auxiliar $t > -1$ tal que $i = (1+t)^{-1}$, segue-se que:

$$F(i) = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{(k+1)} i^k = 0 \Leftrightarrow B(t) = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{(k+1)} (1+t)^{n-k} = 0 \quad (10)$$

8 Note-se que, na realidade, não há a necessidade da construção total de D_e . A ausência de variação de sinal, logo na primeira acumulação, indica que $\text{Sinal}(D_e) = 0$.

Ou seja, observando que $B(t)$ pode ser interpretada como a função valor futuro associada ao “projeto” (dito de financiamento pois que $A_n^{(1)} = \sum_{j=0}^n a_j > 0$) cuja seqüência de fluxos de caixa líquidos é formada pelo reverso de D_d , segue-se que $i^* > 0$ é uma taxa interna de retorno do projeto de investimento original, somente se $t^* = (1 - i^*)/i^*$ for “taxa interna de retorno” do reverso de D_d .

Ora, procedendo da mesma maneira que no caso da demonstração do Lema 1 (isto é, desenvolvendo $(1+t)^{n-k}$ segundo o binômio de Newton, e colecionando os coeficientes de termos de mesma potência de t), pode-se verificar que:

$$B(t) = \sum_{\ell=0}^n C_{n-\ell}^{(\ell+1)} t^\ell \quad (11)$$

onde

$$C_{n-\ell}^{(\ell+1)} = \sum_{j=0}^{n-\ell} \binom{n-j}{\ell} A_{n-j}^{(j+1)} \quad (12)$$

Ou seja, em face da Regra de Sinais de Descartes, o número de “taxas internas de retorno” *positivas* do “projeto” construído a partir do reverso de D_d não excede ao número de variações de sinal em sua correspondente (primeira) diagonal de Vincent; $D_{dc} : \{C_n^{(1)}, C_{n-1}^{(2)}, \dots, C_0^{(n+1)}\}$.

Ora, como $t = 0 \Rightarrow i = 1$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} i = 0$, decorre de (10) que o número de taxas internas de retorno no intervalo $(0,1)$, para o projeto de investimento original, não excede ao número de variações de sinal em D_{dc} .

c.q.d.

Corolário 1

Se for nula a soma dos termos da (primeira) diagonal de Vincent, D_d , temos que $i^* = 100\%$ por período é uma taxa interna de retorno do projeto de investimento original.⁹

9 Ainda mais, se for também nulo o termo $C_{n-1}^{(2)}$, a taxa interna $i^* = 1$ terá multiplicidade igual a 2. E, se além disso, $C_{n-2}^{(3)} = 0$, a multiplicidade será igual a 3; e assim por diante.

Demonstração

Tendo em vista (11), temos que $B(0) = 0$ se e somente se $C_n^{(1)} = \sum_{j=0}^n A_{n-j}^{(j+1)} = 0$.

c.q.d.

Por outro lado, trabalhando-se diretamente com D_d (ou seja, com o reverso do reverso de D_d), temos o seguinte resultado:

Lema 4

O número de taxas internas de retorno maiores do que 100% por período, para o projeto de investimento original, não excede ao número de variações de sinal em D_{dd} (que é a (primeira) diagonal de Vincent de D_d , também dita diagonal à direita da primeira diagonal à direita).

Demonstração

Lançando mão da variável auxiliar z tal que $i = 1+z$, o que implica que se tenha $i = 1$ para $z = 0$ e $i \rightarrow \infty$ quando $z \rightarrow \infty$, decorre da expressão (5) que:

$$F(i) = 0 \Leftrightarrow L(z) = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{(k+1)} (1+z)^k = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{(k+1)} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} z^\ell = 0 \quad (13)$$

Ora, colecionando os termos de mesma potência de z , temos que:

$$L(z) = \sum_{k=0}^n \left\{ \sum_{\ell=k}^n \binom{\ell}{k} A_{n-\ell}^{(\ell+1)} \right\} z^\ell \quad (14)$$

Como $F(i)$ se anula se, e somente se, $L(z)$ também for nula, segue-se da Regra de Sinais de Descartes que o número de taxas internas de retorno, maiores do que a unidade, do projeto de investimento original, não excede ao número de

variações de sinal na sequência $\left\{ A_0^{(n+1)}, nA_0^{(n+1)} + A_1^{(n)}, \dots, \sum_{\ell=1}^n \binom{\ell}{1} A_{n-\ell}^{(\ell+1)}, \sum_{\ell=0}^n A_{n-\ell}^{(\ell+1)} \right\}$,

cujos termos formam a diagonal à direita de D_d .

c.q.d.¹⁰

10 A demonstração apresentada objetivou justificar o procedimento baseado em mudanças de variável, originalmente proposto por Vincent (cf. USPENSKY, 1948). Alternativamente, o resultado decorre diretamente da aplicação do Lema 2 ao Lema 3.

Consolidando os Lemas 3 e 4, bem como o Corolário 1, temos, com demonstração trivial, o:

Teorema

Pode-se assegurar a correta aplicação do critério da taxa interna de retorno, para um projeto de investimento com lucro contábil positivo, se exatamente uma das três seguintes possibilidades for verificada:

- 1) $\text{Sinal}(D_{dc})=1$, $\text{Sinal}(D_{dd})=0$ e $\sum_{j=0}^n A_{n-j}^{(j+1)} \neq 0$, com a única (e simples) taxa interna de retorno positiva sendo inferior a 100% por período;
- 2) $\text{Sinal}(D_{dc})=0$, $\text{Sinal}(D_{dd})=1$ e $\sum_{j=0}^n A_{n-j}^{(j+1)} \neq 0$, com a única (e simples) taxa interna de retorno positiva sendo superior a 100% por período;
- 3) $\text{Sinal}(D_{dc})=\text{Sinal}(D_{dd})=0$ e $\sum_{j=0}^n A_{n-j}^{(j+1)}=0$, com a única (e simples se $\sum_{\ell=1}^n \binom{\ell}{1} A_{n-\ell}^{(\ell+1)}$, que é o penúltimo termo de D_{dd} , for diferente de zero) taxa interna de retorno positiva exatamente igual a 100% por período.

Como exemplo de aplicação do resultado acima, retomemos o caso do exemplo B, para o qual $D_d: \{-10, -30, -70, 20, -20, 110\}$.

Construindo, como indicado na Tabela II, a partir de acumulações para a frente e para trás, respectivamente as diagonais D_{dd} e D_{dc} , tem-se:¹¹

11 A rigor, no caso em questão, o processo poderia ser interrompido logo na primeira acumulação (tanto para trás, como para frente), já que não se tem variação de sinal.

É fácil verificar que $D_d: \{-1, 8, -23, 24\}$, $D_{de}: \{24, 49, 34, 8\}$ e $D_{dd}: \{-1, 5, -10, 8\}$. Logo, como $\text{Sinal}(D_{de}) = 0$, $\text{Sinal}(D_{dd}) = 3$ e não é nula a soma dos termos de D_d , a análise é inconclusiva, o que nos remete para o próximo nível de extensão.

3. EXTENSÕES ADICIONAIS

Chamando a atenção para o fato de que a justificativa formal, para cada nível de extensão, pode ser efetuada usando o mesmo caminho apresentado na seção precedente, iremos nos limitar aqui a apresentar, de uma maneira sucinta, como proceder na construção de níveis adicionais de extensão.

O princípio básico, tal como apresentado em Uspensky (1948, p. 127-36), é fazer sucessivas mudanças de variáveis. De uma maneira geral, sendo μ a variável associada a uma dada diagonal, construam-se as suas correspondentes diagonais à direita e à esquerda. À diagonal à direita associa-se a variável não-negativa φ tal que $\mu = 1 + \varphi$; por outro lado, para o caso da diagonal à esquerda, φ é tal que $\mu = 1 / (1 + \varphi)$. Para a determinação do intervalo que, em termos de taxas de juros, corresponde à diagonal em questão, basta, tendo presente a seqüência de transformações, fazer $\varphi = 0$ e $\varphi \rightarrow \infty$.

Partindo-se da expressão (10), que exprime a função valor futuro como um polinômio em i , cujos coeficientes são os termos da (primeira) diagonal de Vincent, D_d , a regra geral acima descrita implica que:

- a) diagonal à direita: D_{dd}
 $i = \mu = 1 + \varphi \Rightarrow i \in (1, \infty)$
- b) diagonal à esquerda: D_{de}
 $i = \mu = 1 / (1 + \varphi) \Rightarrow i \in (0, \infty)$

Por seu lado, partindo de D_{dd} , tem-se:

- a) diagonal à direita: D_{ddd}

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 + \mu \\ \mu = 1 + \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow i = 2 + \varphi \Rightarrow i \in (2, \infty)$$
- b) diagonal à esquerda: D_{dde}

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 + \mu \\ \mu = 1 / (1 + \varphi) \end{array} \right\} \Rightarrow i = 1 + 1 / (1 + \varphi) \Rightarrow i \in (1, 2)$$

Similarmente, partindo-se de D_{dc} , tem-se:

a) diagonal à direita: D_{dcd}

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 / (1 + \mu) \\ \mu = 1 + \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow i = 1 / (2 + \varphi) \Rightarrow i \in (0, 1/2)$$

b) diagonal à esquerda: D_{dcc}

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 / (1 + \mu) \\ \mu = 1 / (1 + \varphi) \end{array} \right\} \Rightarrow i = 1 / [1 + 1 / (1 + \varphi)] \Rightarrow i \in (1/2, 1)$$

Prosseguindo-se até o 4º nível de extensão,¹² são descritos nas Figuras I e II os intervalos respectivamente associados às ramificações de D_{dc} e D_{dd} .

Para o caso do projeto C, vimos que $Sinal(D_{dd}) = 3$, o que indica até 3 taxas internas de retorno superiores a 100% por período. Prosseguindo com a análise, a partir de D_{dd} , tem-se que $Sinal(D_{dde}) = Sinal(\{8, 14, 9, 2\}) = 0$, o que indica que não existe taxa interna de retorno no intervalo (1, 2). Além do mais, como não é nulo o último termo de D_{dde} , indicando não ser nula a soma dos termos de D_{dd} , temos que o ponto de fronteira, no caso $i = 2$, também não é taxa interna.¹³

Por outro lado, como $Sinal(D_{ddd}) = Sinal(\{-1, 2, -3, 2\}) = 3$, indicando-se até 3 taxas internas superiores a 200% por período, devemos prosseguir com a análise. Como $Sinal(D_{ddde}) = Sinal(\{2, 3, 2, 0\}) = 0$, conclui-se que não existe taxa interna no intervalo (2,3) e, ainda mais, por ser nulo o último termo de D_{ddde} , temos que 300% por período é taxa interna. Sendo que a taxa interna $i^* = 3$ é única, pois que, como $Sinal(D_{ddddd}) = Sinal(\{-1, -1, -2, 0\}) = 0$, não existe taxa interna superior a 300% por período.

Embora, do ponto de vista teórico, à exceção do caso onde a taxa interna de retorno é única, mas múltipla e irracional (quando teremos sempre diagonais com um número de variações de sinal não inferior à multiplicidade da taxa interna), o método possa ser estendido até que se conclua a existência de mais de uma taxa interna ou a existência de uma única taxa interna (cujo valor exato, sendo um número racional, pode ser precisamente determinado), não se recomenda, na prática, um número muito grande de níveis de extensão. Isto

12 Em DE FARO (1985) apresentam-se os correspondentes intervalos até o 5º nível de extensão.

13 Esta conclusão deriva do fato de que, analogamente ao visto no caso do primeiro nível de extensão, a função valor futuro, escrita a partir da variável φ tal que $i = 1 + 1/(1 + \varphi)$, apresenta como termo independente o último termo de D_{dde} .

devido ao fato de que as acumulações sucessivas podem atingir, rapidamente, valores muito grandes.

FIGURA I - ÁRVORE DE NÍVEIS DE EXTENSÃO A PARTIR DE D_{de}

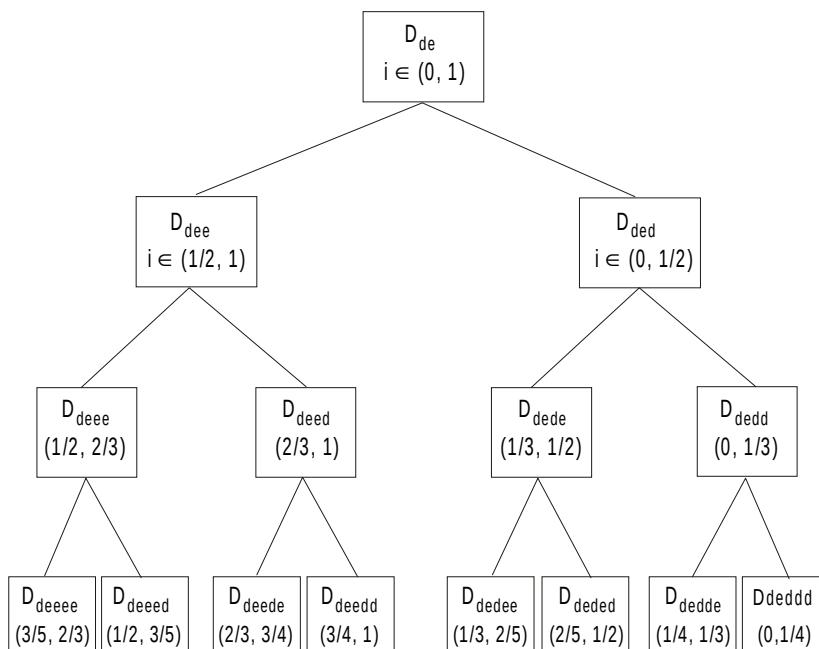
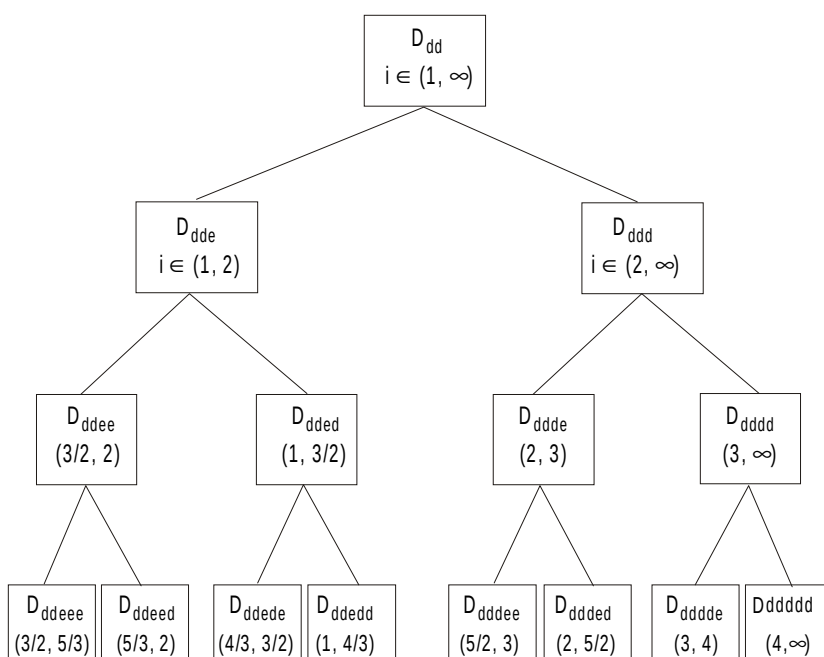


FIGURA II - ÁRVORE DE NÍVEIS DE EXTENSÃO A PARTIR DE D_{dd}



4. INTEGRAÇÃO COM O MÉTODO DE PRATT-HAMMOND

Com suporte em propriedades das chamadas funções do tipo Pólya (veja-se KARLIN, 1957), Hammond (1974) formulou uma condição de suficiência para a unicidade de taxas internas de retorno positivas (e simples), que consiste na determinação do número de variações de sinal em seqüências (ilimitadas) de acumulações. Mais tarde, com base em resultados apresentados em Pratt (1979), Pratt e Hammond (1979) refinaram o procedimento de modo a que, essencialmente, na sua versão finita¹⁴ prática e mais abrangente, são construídas as $n+1$ primeiras acumulações, de modo a gerar a seqüência $PH_d : \{A_0^{(n+1)}, A_1^{(n+1)}, \dots, A_n^{(n+1)}, A_n^{(n)}, A_n^{(n-1)}, \dots, A_n^{(1)}\}$. O principal resultado, que denominaremos de condição de Pratt-Hammond, é que o número de variações de sinal em PH_d , indicado por Sinal (PH_d), provê um limite superior para o número de taxas internas de retorno positivas do projeto de investimento em questão.

Remetendo o leitor ao trabalho de Pratt (1979) para sua comprovação formal, consideremos o projeto $D: \{-10, 20, -50, 200, -300, 300\}$ para fins de ilustrar a aplicação do procedimento, o que é feito na Tabela III.

TABELA III - CONSTRUÇÃO DE PH_d PARA O PROJETO D

	$\{-10, 20, -50, 200, -300, 300\}$
$\ell = 1 :$	$-10, 10, -40, 160, -140, \underline{160}$
$\ell = 2 :$	$-10, 0, -40, 120, -20, \underline{140}$
$\ell = 3 :$	$-10, -10, -50, 70, 50, \underline{190}$
$\ell = 4 :$	$-10, -20, -70, 0, 50, \underline{240}$
$\ell = 5 :$	$-10, -30, -100, -100, -50, \underline{190}$
$\ell = 6 :$	$-10, \underline{-40}, \underline{-140}, \underline{-240}, \underline{-290}, \underline{-100}$

Observando que $D_d : \{-10, -30, -70, 70, -20, 160\}$ apresenta 3 variações de sinal, temos somente uma variação de sinal em $PH_d : \{-10, -40, -140, -240, -290, -100, 190, 240, 190, 140, 160\}$, cujos termos aparecem sublinhados na

14 Além do fato de que o procedimento nunca será conclusivo no caso de taxas internas únicas, mas com multiplicidades superiores a um, o tratamento de seqüências com número ilimitado de termos é um poderoso óbice a aplicações práticas.

Tabela III.¹⁵ Deste modo, muito embora a análise de somente a primeira diagonal de Vincent seja inconclusiva, o fato de que $\text{Sinal}(\text{PH}_d) = 1$ é suficiente para concluir-se que o projeto D possui somente uma taxa interna de retorno positiva ($i^* \cong 125,73\%$ por período).

O ponto a ressaltar é que, como ilustrado no caso do exemplo D, e tendo em vista o Lema 5, adiante enunciado e de demonstração trivial, a condição de suficiência de Pratt-Hammond domina a baseada na primeira diagonal de Vincent.

Lema 5

Se $\text{Sinal}(D_d) = 1$, então $\text{Sinal}(\text{PH}_d) = 1$

Por outro lado, o fato de a condição de Pratt-Hammond não ser necessária (veja-se o caso do projeto C, para o qual $\text{Sinal}(\text{PH}_d) = \text{Sinal}(\{-1, 7, -8, -22, -14, 1, 24\}) = 3$) nos leva a buscar como estendê-la. Ora, tendo em vista que a extensão em termos das diagonais de Vincent é feita com base em mudanças de variáveis, e que, em cada caso, está sendo estabelecido um limite superior para o número de raízes positivas do correspondente polinômio, a aplicação sucessiva do Lema 5 nos leva a sugerir uma imediata integração com o que chamaremos de borda de Pratt-Hammond. A idéia é, a cada nível de extensão no processo de construção das diagonais de Vincent, construir também, se necessário, a correspondente borda de Pratt-Hammond. Isto porque, é fácil verificar, teremos sempre, a cada nível k , $\text{Sinal}(D_k) \geq \text{Sinal}(\text{PH}_k)$.

Como ilustração, considere-se o caso do projeto E : $\{-2, 9, -2, -37, 58\}$, também estudado em Hajdasinski (1983). Temos que $\text{Sinal}(D_d) = \text{Sinal}(\{-2, 1, 13, -22, 26\}) = 3$ e também $\text{Sinal}(\text{PH}_d) = \text{Sinal}(\{-2, -1, 13, 18, 18, 0, -5, 4, 26\}) = 3$. Logo, precisamos passar ao próximo nível, partindo de D_d .

Prosseguindo-se, é fácil verificar que $\text{Sinal}(D_{de}) = 0$, o que indica a inexistência de taxa interna positiva inferior a 100% por período. Também, como a soma dos termos de D_d é diferente de zero, temos que a taxa de 100% por período não é taxa interna de retorno. Como, todavia, $\text{Sinal}(D_{dd}) = \text{Sinal}(\{-2, -7, 4, -1, 16\}) = 3$, indicando a possibilidade de até três taxas internas de retorno

15 A rigor, do mesmo modo que se pode truncar a construção da diagonal de Vincent, também nem sempre é necessário fazer as $n+1$ acumulações. No caso, poderíamos parar na terceira acumulação, pois que se tem uma borda com somente uma variação de sinal.

superiores a 100% por período, a consideração somente do procedimento baseado nas diagonais de Vincent nos levaria a, partindo de D_{dd} , considerar o próximo nível de extensão. Tal, porém, não é necessário, pois que $Sinal(PH_{dd}) = Sinal(\{-2, -9, -12, -12, 6, 18, 18, 15, 16\}) = 1$, o que indica a existência de exatamente uma taxa interna superior a 100% por período. Logo, ao projeto E associa-se somente uma taxa interna de retorno positiva (que é aproximadamente igual a 230,83% por período).

CONCLUSÃO

Para o caso de projetos de investimento com lucro contábil positivo e mais de duas variações de sinal em seus respectivos fluxos de caixa, a aplicação do critério da taxa interna de retorno, mesmo que restrita ao campo das taxas de juro positivas, não é garantida *a priori*. Para esses casos, faz-se necessário assegurar a aplicabilidade do critério via a constatação da unicidade da taxa interna de retorno, o que pode ser feito, de uma maneira expedita e sem risco de instabilidades computacionais, mediante simples adições, por meio do procedimento baseado nas diagonais de Vincent ou na metodologia de Pratt-Hammond.

No presente trabalho, considerando-se inicialmente o procedimento que se fundamenta nas chamadas diagonais de Vincent, foi apresentada uma justificativa formal de sua validade. A seguir, examinando o que se denominou de borda de Pratt-Hammond, chamando atenção para o fato de que, a cada nível, tem-se completa dominância sobre a correspondente diagonal de Vincent, foi proposta a adoção de um procedimento misto, que integra as duas metodologias baseadas em simples adições.

REFERÊNCIAS

- ALCHIAN, Armen A. The rate of interest, Fisher's rate of return over costs and Keynes internal rate of return. *The American Economic Review* 15, p. 938-43, 1955.
- AUCAMP, Donald C. & ECKARDT JR., Walter L. A sufficient condition for a unique nonnegative internal rate of return - Comment. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 11, p. 329-32, 1976.
- BERNHARD, Richard H. On the inconsistency of the Soper and Sturm-Kaplan conditions for uniqueness of the internal rate of return. *The Journal of Industrial Engineering* 18, p. 499-500, 1967.

- _____. A more general sufficient condition for a unique nonnegative internal rate of return. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 14, p. 337-41, 1979.
- _____. A simplification and an extension of the Bernhard-de Faro sufficient condition for a unique nonnegative internal rate of return. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 15, p. 201-9, 1980.
- BEZZA, El Mostafa. Le concept d'intérêts cumulés: un algorithme pour dépasser le problème de multiplicité des T.I.R. *Economies et Sociétés* 18, p. 99-132, 1984.
- BIERMAN, Harold, Jr. & SMIDT, Seymour. *The capital budgeting decision*, 8th ed. New York: Macmillan Publishing Co., 1993.
- BODIE, Zvi & MERTON, Robert. *Finance*. (Preliminary Edition). New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1998.
- BRANDÃO, A. S. P. & DE FARO, C. *Avaliação econômico-financeira do Projeto Mirorós*. Relatório submetido à CODEVASE, para efeito de obtenção de financiamento do BID, 1987.
- CLARKE, Arthur C. M. *Complete extension of the Bernhard-de Faro test for a unique nonnegative internal rate of return*. Manuscrito não publicado, 1982.
- DE FARO, Clovis. On the internal rate of return criterion. *The Engineering Economist* 19, p. 165-94, 1974.
- _____. Sobre a unicidade de taxas internas de retorno positivas. *Revista Brasileira de Economia* 29, p. 57-66, 1975.
- _____. A sufficient condition for a unique nonnegative internal rate of return: further comments. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13, p. 557-64, 1978.
- _____. O Teorema de Vincent e o problema de multiplicidade de taxas internas de retorno. *Revista Brasileira de Economia* 37, p. 55-76, 1983.
- _____. *A eficiência marginal do capital como critério de avaliação econômica de projetos de investimentos*. Rio de Janeiro: IBMEC/PNPE, 1985.
- _____. & SOARES, Luiz. A flexible sufficient condition for a unique nonnegative internal rate of return. *The Engineering Economist* 23, p. 117-27, 1978.
- DE FARO, Paula M. L. D. *Projetos de investimento com mais de duas variações de sinal: sobre a aplicação do Teorema de Vincent e suas extensões*. Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro: EPGE/FGV, 1998.
- DYBVIG, Philip H. Duality, interest rates, and the theory of present value. *Journal of Economic Theory* 30, p. 98-114, 1983.
- GRANT, Eugene L. & IRESON, W. Grant. *Principles of engineering economy*. 4th ed. New York: The Ronald Press Co., 1964.

- HAMMOND, John S., III. *Bouding the numbers of rates of return of a project*. Trabalho apresentado no encontro nacional conjunto TIMS/ORSA, em Boston, 1974.
- HAJDASINSKI, Miroslav M. A complete method for separation of internal rates of return. *The Engineering Economist* 28, p. 207-50, 1983.
- HIRSHLEIFER, J. On the theory of optimal investment decision. *Journal of Political Economy* 66, p. 329-52, 1958.
- _____. *Investment, interest and capital*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1970.
- JEAN, W. H. On multiple rates of return. *The Journal of Finance* 23, p. 187-91, 1968.
- JEGERS, Marc. Le concept d'intérêts cumule's: nécessaire ou suffisant? *Economies et Sociétés* 20, p. 37-48, 1986.
- KAPLAN, Seymour. A note on a method for precisely determining the uniqueness or nonuniqueness of the internal rate of return for a proposed investment. *The Journal of Industrial Engineering* 16, p. 70-1, 1965.
- KARLIN, Samuel. Polya-type distributions, II. *Annals of Mathematical Statistics* 28, p. 281-308, 1957.
- KEYNES, J. M. *The general theory of employment, interest and money*. London: Harcourt, Brace & World, Inc., 1935.
- LONZI, Marco. Unicité du TIR et intérêts cumulés: un commentaire. *Economies et Sociétés* 22, p. 25-36, 1988.
- LORIE, J. H. & SAVAGE, L. J. Three problems in capital rationing. *Journal of Business* 28, p. 229-39, 1955.
- LUENBERGER, David G. *Investment science*. New York: Oxford University Press, 1998.
- NORSTROM, Carl J. A sufficient condition for a unique nonnegative internal rate of return. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 7, p. 1835-9, 1972.
- PANTON, Don B. & VERDINI, William A. A FORTRAN program for applying Sturm's Theorem in counting internal rates of return. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 16, p. 381-8, 1981.
- PRATT, John W. Finding how many roots a polynomial has in $(0,1)$ or $(0, \infty)$. *American Mathematical Monthly* 86, p. 630-7, 1979.
- _____. & HAMMOND, III, John S. Evaluating and comparing projects: simple detection of false alarms. *The Journal of Finance* 34, p. 1231-42, 1979.
- ROSS, S. A., WESTERFIELD, R. W. & JAFFE, J. F. *Corporate finance*. 3rd ed. Homewood: Richard D. Irwin, 1993.

- RUSSELL, Allen M. & RICKARD, John A. Uniqueness of non-negative internal rate of return. *Journal of the Institute of Actuaries* 109, p. 435-45, 1982.
- _____ & _____. An algorithm for determining unique nonnegative internal rates of return. *Journal of Business Finance & Accounting* 11, p. 355-65, 1984.
- SOPER, C. S. The marginal efficiency of capital: a further note. *The Economic Journal* 69, p. 174-7, 1959.
- TEICHROEW, Daniel, ROBICHEK, Alexander A. & MONTALBANO, Michael. Mathematical analysis of rates of return under certainty. *Management Science* 11, p. 395-403, 1965.
- USPENSKY, J. V. *Theory of equations*. New York: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1948.