

## **ANÁLISE DE SÉRIES DE TEMPO E MODELOS DE FORMAÇÃO DE EXPECTATIVAS (\*)**

**José L. Carvalho (\*\*)**

É fato comum na teoria econômica que os indivíduos reagem a valores correntes de variáveis e a seus valores esperados no futuro. Como as expectativas se formam ainda é matéria de debates. É improvável que exista um único mecanismo explicativo. Propomos como uma importante aplicação do estudo de séries de tempo a geração de modelos de formação de expectativas através de tais técnicas.

Neste trabalho descrevemos e discutimos os modelos de formação de expectativas mais usuais empregados em estudos econômicos passados.

Nas três primeiras seções são analisadas as teorias dos modelos da teia-de-aranha, extrapolativo e adaptativo, sendo discutidas as relações entre os modelos e comparadas as simplificações de cada teoria.

Na seção 4, é discutido o modelo de formação racional de expectativas de Muth <sup>(1)</sup>. Uma alternativa à teoria de Muth é apresentada na seção cinco; esta é a que nós denominamos mo-

---

(\*) Extraído de José L. Carvalho, "Production, Investment and Expectations: A Study of the United States Cattle Industry" — Dissertação de Doutorado não publicada — Universidade de Chicago, 1972, Capítulo IV.

(\*\*) Professor da Escola de Pós-Graduação em Economia do Instituto Brasileiro de Economia da Fundação Getúlio Vargas.

(1) J.F. Muth, "Rational Expectations and the Theory of Price Movements", *Econometrica*, XXXIX, (Julho, 1961), 315-35.

delo de formação quase racional de expectativas. Mostra-se esta teoria preferível à de Muth em aplicações empíricas, por sua simplicidade. Denominamos a teoria como de formação “quase-racional” de expectativas, porque, apesar de seguir a teoria racional de Muth nas estimações efetivas, certas restrições implícitas na teoria “integralmente racional” são ignoradas. A estimação de expectativas quase-rationais é possível através de técnicas de análises de séries de tempo tais como as apresentadas por Box e Jenkins e por Nerlove <sup>(2)</sup>.

### 1. A Teoria da Teia-de-Aranha

A teoria da teia-de-aranha foi desenvolvida para explicar possíveis relações dinâmicas em economia, apesar de em verdade ser uma simples adaptação da teoria estática existente. Estudo sobre a reação de fazendeiros a preços deu à teoria um sabor empiricista, abrindo uma nova avenida na pesquisa econômica <sup>(3)</sup>.

Uma boa evolução histórica e um resumo da teoria da teia-de-aranha podem ser encontrados no famoso trabalho de Ezekiel, “The Cobweb Theorem” <sup>(4)</sup>. A teoria, como foi apontado por Ezekiel, só pode ser aplicada se três condições são satisfeitas:

1. a produção é determinada pela reação dos produtores aos preços, sob condições de concorrência pura;
2. o tempo necessário para produzir requer pelo menos um período inteiro a fim de que a produção possa ser alterada;
3. o preço é determinado pela oferta disponível <sup>(5)</sup>.

---

(2) G.E.P. Box e G.M. Jenkins, *Time Series Analysis, Forecasting and Control* (San Francisco: Holden-Day, 1970).

M. Nerlove, “Analysis of Economic Time Series by Box-Jenkins and Related Techniques”, Report n.º 7156 of The Center of Mathematical Studies in Business and Economics, University of Chicago (Dezembro, 1971).

(3) Veja por exemplo L. A. Bean. “The Farmers Response to Price”, *Journal of Farm Economics*, XI (Julho, 1929), 368-85.

(4) M. Ezekiel, “The Cobweb Theorem”, *Quarterly Journal of Economics*, LII, (Fevereiro, 1938), 255-80.

(5) *Ibid.*, p 274.

A idéia básica da teoria da teia-de-aranha é fazer a oferta de um produto (geralmente um produto agrícola) função do seu preço passado, enquanto a demanda desse mesmo bem é uma função do preço corrente. Como as decisões quanto à produção devem ser feitas antecipadamente (o período de produção é de pelo menos um período), essas decisões devem ser baseadas nos preços esperados. O teorema da teia-de-aranha postula que esses preços esperados são os preços correntes na época das decisões quanto à produção. Na análise de estabilidade do sistema, três possíveis resultados podem ser classificados segundo as elasticidades da demanda e da oferta:

- a. flutuações cíclicas contínuas, quando a elasticidade da demanda é igual à elasticidade da oferta;
- b. flutuações explosivas divergentes, quando a elasticidade da demanda é menor que a elasticidade da oferta;
- c. flutuações amortecidas convergentes, quando a elasticidade da demanda é maior que a elasticidade da oferta <sup>(6)</sup>.

Numerosas qualificações foram feitas para adaptar a teoria da teia-de-aranha a formas mais compatíveis com as flutuações observadas no preço e na quantidade <sup>(7)</sup>. Apesar de tais esforços, o pobre suporte teórico e empírico da teoria e suas estranhas implicações foram frequentemente apresentadas como argumentos contrários a seu uso. Entre os primeiros estudos, os elaborados por Coase e Fowler e Buchanan são os mais relevantes <sup>(8)</sup>. Coase e Fowler mostram que o modelo da teia-de-aranha implica em um ciclo de preço mais curto do que o observado para o mercado de porcos na Grã-Bretanha. Essa observação é confirmada em estudos empíricos pos-

---

(6) "...Leontief mostrou que quando as curvas de oferta ou demanda são de forma errática, o mesmo conjunto de curvas pode produzir uma série convergente ou divergente", *Ibid.*, p. 257.

(7) Veja por exemplo Ezekiel, "The Cobweb Theorem", e Willard W. Cochrane, "Farm Price Gyration — An Aggregative Hypothesis", *Journal of Farm Economics*, XXIX (Maio, 1947), 383-408.

(8) R.H. Coase e R.F. Fowler, "The Pig-Cycle in Great Britain: An Explanation", *Econômica* IV, (Fevereiro, 1937), 55-82.  
N.S. Buchanan, "A Reconsideration of the Cobweb Theorem", *Journal of Political Economy* XLVII, (Fevereiro, 1939), 67-81.

teriores <sup>(9)</sup>. Buchanan conclui que a teoria da teia-de-aranha só é válida sob circunstâncias muito especiais mas, em geral envolve perdas constantes pelos produtores que as pessoas nunca aprenderiam da experiência <sup>(10)</sup>.

Alternativas à teoria da teia-de-aranha são discutidas nas seções seguintes.

É interessante notar que, quando a teoria da teia-de-aranha foi formulada, trabalhos já haviam sido realizados sobre a previsão de variáveis econômicas. Apesar desses trabalhos terem sido relativamente sofisticados <sup>(11)</sup>, o modelo de formação de expectativas incorporado na teoria da teia-de-aranha sempre foi o modelo ingênuo no qual o preço esperado no período t-1, para o período t,  $P_{t-1}^*$  é dado pelo preço observado no período t-1,  $P_{t-1}$ , isto é  $P_{t-1}^* = P_{t-1}$ .

## 2. Expectativas Extrapolativas

Supor que os preços esperados em períodos futuros são todos iguais ao preço observado no período t-1 não é uma hipótese muito plausível, a não ser que os preços sejam "random walk" <sup>(12)</sup>, de forma que a informação contida em outros preços passados seja nula.

---

(9) E.g., James H. Lorie, "Causes of Annual Fluctuations in the Production of Livestock and Livestock Products", *Studies in Business Administration*, XVII (Chicago: University of Chicago Press, 1947).

(10) "Sob a hipótese especial de que há sempre um grupo de novos produtores desejosos de entrar no mercado e dissipar seu capital a cada flutuação do ciclo, o teorema pode talvez ser válido. Esse caso especial precisa, entretanto, ser mais explícito e provavelmente requer hipóteses adicionais". Buchanan, "A Reconsideration of the Cobweb Theorem", p. 81.

(11) Veja por exemplo: M. Ezekiel, "Two Methods of Forecasting Hog Prices", *Journal of the American Statistical Association*, XXII (Março, 1927), 22-30.

H.L. Moore, *Forecasting the Yield and Price of Cotton*, (New York: The Macmillan Co., 1917).

B.B. Smith, "Forecasting the Acreage of Cotton", *Journal of American Statistical Association*, XX (Março, 1925), 31-47.

(12) Processo estocástico que não possui lei de formação.

Em um trabalho clássico, Metzler apresentou uma alternativa ao modelo ingênuo de expectativas da teia-de-aranha, definindo o que ele chamou “coeficiente de expectativa”; o modelo foi utilizado posteriormente por Goodwin <sup>(13)</sup>. Esse modelo de geração de expectativas foi subsequentemente analisado por Enthoven e Arrow <sup>(14)</sup>. Na teoria das expectativas extrapolativas, o preço esperado é definido:

$$(2.1) \quad P_t^* = P_{t-1} + \eta (P_{t-1} - P_{t-2}),$$

onde:  $P_t^*$  = preço esperado para o período t no período t-1,

$P_{t-1}$  = preço observado no período t-1

$P_{t-2}$  = preço observado no período t-2

$\eta$  = coeficiente de expectativa de Metzler.

O propósito do modelo das expectativas extrapolativas foi fazer a teoria da teia-de-aranha levar em consideração a tendência mais recente dos preços:

“É natural alegar que as expectativas de vendas futuras não dependam somente do nível de vendas do passado mas, também, da direção em que variam tais vendas” <sup>(15)</sup>.

Uma abordagem alternativa foi dada por Hicks em seu *Value and Capital* (1939). Metzler compara o seu coeficiente de expectativas à elasticidade de expectativas de Hicks e conclui que um mais o seu coeficiente de expectativas era exatamente a elasticidade de Hicks <sup>(16)</sup>.

Como foi ressaltado por Arrow e Nerlove, a propriedade extrapolativa desse modelo de formação de expectativas só é

---

(13) Lloyd A. Metzler, “The Nature and Stability of Inventory Cycles”, *The Review of Economic Statistics*, XXIII (Fevereiro, 1941) 113-29  
R. M. Goodwin, “Dynamical Coupling with Especial Reference to Markets Having Production Lags”, *Econometrica*, XV (Julho, 1947), 181-204.

(14) Alain C. Enthoven e K. J. Arrow, “A Theorem on Expectations and the Stability of Equilibrium”, *Econometrica*, XXIV (Julho, 1956), 288-93.

(15) Metzler, “The Nature and Stability of Inventory Cycles”, p. 119.

(16) *Ibid.* nota de rodapé 13, pp. 119-20.

consistente se  $\eta > 0$  em (2.1) Se  $\eta = 0$ , o modelo se torna o tradicional modelo da teia-de-aranha e as expectativas são ditas estáticas. Finalmente, se  $\eta < 0$ , o preço esperado será uma média ponderada dos dois preços passados com pesos  $(1 - |\eta|)$  e  $|\eta|$  para  $P_{t-1}$  e  $P_{t-2}$ <sup>(17)</sup>. Enthoven e Arrow mostraram que, sob certas circunstâncias, um modelo dinâmico estável pode incorporar o modelo de expectativas extrapolativas e se manter estável<sup>(18)</sup>.

A simplicidade do modelo de expectativas extrapolativas, seu fraco suporte teórico, em termos de sua relação com a elasticidade de expectativas de Hicks, e sua compatibilidade com um modelo dinâmico estável, bem como a sua incorporação da teoria da teia-de-aranha como um caso especial, tornaram o modelo popular por algum tempo.

### 3. Expectativas Adaptativas

Baseado na definição de Hicks de elasticidade de expectativas, o modelo de expectativas adaptativas foi sugerido por Cagan<sup>(19)</sup>.

Sob a hipótese da expectativa adaptativa, supõe-se que os indivíduos reformulem suas expectativas em função de sua experiência mais recente:

$$(3.1) \quad P_t^* - P_{t-1}^* = \gamma (P_{t-1} - P_{t-1}^*) \text{ para } |\gamma| < 1$$

onde:  $P_t^*$  = preço esperado para o período  $t$  no período  $t-1$

$P_{t-1}^*$  = preço esperado para o período  $t-1$  no período  $t-2$

(17) K.J. Arrow e M. Nerlove, "A Note on Expectations and Stability", *Econometrica*, XXVI, (Julho, 1958), 297-305.

(18) Enthoven e Arrow, "A Theorem on Expectations" p. 288-93.

(19) P. Cagan, "The Monetary Dynamics of Hyper — Inflation", em M. Friedman. ed., *Studies in the Quantity of Money*, (Chicago: Chicago University Press, 1956), pp. 25-117.  
A história da idéia não é clara. Supostamente foi sugerida a Friedman por A.W. Philips nos primeiros anos da década dos cinquenta.

$P_{t-1}$  = preço observado no período  $t-1$

$\gamma$  = coeficiente de expectativas.

Se os preços acima são os logaritmos dos níveis absolutos dos preços efetivos,  $\gamma$  é simplesmente a elasticidade de expectativa de Hicks. Note que se  $\gamma = 1$ , (3.1) se reduz a  $P_t^* = P_{t-1}$ , sendo portanto, o modelo simples da teia-de-aranha um caso especial.

A expansão de (3.1) gera uma expressão mais útil para  $P_t^*$ . Reunindo do lado esquerdo da equação os termos em preços esperados:

$$(3.2) \quad P_t^* - (1 - \gamma) P_{t-1}^* = \gamma P_{t-1}$$

Substituindo  $(1 - \gamma)$  por  $\beta$  e introduzindo um operador de defasagens (lag operator)  $B$ , tal que  $B^i x_t = x_{t-i}$ , obtemos:

$$(3.3) \quad (1 - \beta B) P_t^* = \gamma P_{t-1}, \text{ onde } \gamma = 1 - \beta, \text{ de forma que}$$

$$P_t^* = \frac{(1 - \beta)}{(1 - \beta B)} P_{t-1}$$

Como  $\beta$  está contido no intervalo  $[0,1)$ , podemos expandir  $\frac{1}{1 - \beta B}$  como  $1 + \beta B + \beta^2 B^2 + \beta^3 B^3 + \dots$ , e

$$(3.4) \quad P_t^* = (1 - \beta) \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i P_{t-1-i} \quad (20)$$

Sob a hipótese da expectativa, o preço esperado pode ser expresso por uma média ponderada infinita dos preços observados no passado com pesos decrescentes geometricamente com as defasagens.

---

(20) Se  $\beta$  está no intervalo  $(-1, +1)$ , isso implica que as raízes de  $(1 - \beta B) = 0$  estão fora do círculo unitário (condição de inversão como veremos abaixo). Como  $|\gamma| < 1$ ,  $\beta$  pode somente variar em  $[0,1)$  para que a representação infinita seja possível.

Dentro da expectativa adaptativa, Nerlove desenvolveu a idéia de um preço normal esperado <sup>(21)</sup>. Como o modelo de expectativas adaptativas prevê um só preço, pode ser conveniente para alguns propósitos, como ressaltaram Arrow e Nerlove, considerar esse preço como sendo a média de todos os preços futuros, ou seja, o preço normal esperado. Segundo Arrow e Nerlove, Hicks pode ter tido em mente a noção do preço normal esperado quando ele definiu a elasticidade de expectativa. Com a interpretação, Arrow e Nerlove provam que, desde que as condições normais de estabilidade são satisfeitas, um sistema com múltiplos mercados tem estabilidade dinâmica se as expectativas são geradas pela teoria adaptativa <sup>(22)</sup>.

Expectativas adaptativas têm sido comuns em virtude de sua simplicidade, porque estimativas de máxima verossimilhança podem ser obtidas para  $\beta$  e porque elas parecem operar bem em um grande número de estudos empíricos.

Diversos problemas sem solução tornam o conceito do preço normal esperado questionável. Primeiro, não existe qualquer justificativa teórica efetiva para ele, apesar de ser relacionado com a definição de elasticidade de expectativa de Hicks. Do ponto de vista econômico, ele é igual ao modelo extrapolativo. Segundo, existem pelo menos dois problemas técnicos na sua utilização. Um, é um problema de identificação. Como podemos ver em (3.4), o preço normal esperado pode ser representado por uma distribuição de defasagens (distributed lags) dos preços passados, com pesos declinando geometricamente; em consequência, quando o preço normal esperado é introduzido numa função de oferta, a nova forma dessa função incorporará uma distribuição de defasagens nos preços. Essa forma final pode ser obtida igualmente através de um modelo diferente, o qual não incorpora o preço normal esperado mas, ao invés, possui um modelo de distribuição de defasagens devido ao ajustamento defasado dos fatores de produção ao

---

(21) M. Nerlove, *The Dynamics of Supply: Estimation of Farmer's Response to Price* (Baltimore: The Johns Hopkins Press, 1958), pp. 46-59.

(22) K.J. Arrow e M. Nerlove, "A Note on Expectations and Stability", *Econometrica*, XXVI, (Julho, 1958), 297-305.



longo do tempo<sup>(23)</sup>. O segundo problema técnico se refere a propriedades dos valores estimados para  $\beta$  e  $\gamma$ . As estimativas do coeficiente de expectativas são particularmente sensíveis à omissão de variáveis relevantes nas funções ajustadas, como foi notado por Brandow e comprovado por Nerlove, com qualificações necessárias<sup>(24)</sup>. Grande parte da crítica à teoria das expectativas adaptativas tem a ver com sua implicação de distribuição de defasagens geometricamente decrescente. Não há outra explicação econômica para a distribuição de defasagens implicada pela teoria das expectativas adaptativas, além da forma do modelo de expectativas. Se de fato existe uma defasagem em relação às alterações de preço na formação de expectativas acerca de preços futuros, essa defasagem inicial sugere uma distribuição de ponderações em que, a princípio, os pesos aumentem e, a partir de algum ponto, diminuam. Se os pesos são transformados de uma maneira tal que a sua soma seja um, podemos associar uma função de distribuição a qualquer sistema de ponderação no qual os pesos correspondem a probabilidades, desde que todos os pesos sejam **não-negativos**. Desse modo, Solow obteve para os pesos um sistema mais geral de ponderação supondo uma distribuição de Pascal<sup>(25)</sup>. O Sistema de Pascal pode incorporar uma defasagem inicial através de uma estrutura de ponderações crescente e depois decrescente, pode ainda ser interpretado em termos de uma série em cascata de defasagens adaptativas.

O modelo adaptativo tem sido extensamente utilizado, apesar de suas limitações, pelas seguintes razões:

- a. modelos incluindo preços normais funcionam melhor quando aplicados a dados empíricos do que aqueles sem tais preços ou com qualquer outro substituto;
- b. expectativas adaptativas são compatíveis com a estabilidade dinâmica sob hipóteses não-restritivas;

(23) Veja por exemplo: Goodwin, "Dynamical Coupling..", pp. 197-204 e L.M. Koyck, **Distributed Lags and Investment Analysis**, (Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1954).

(24) G.E. Brandow, "A Note on the Nerlove Estimates of Supply Elasticity", **Journal of Farm Economics**, XL (Agosto, 1958), 719-22. M. Nerlove, "On the Nerlove Estimate of Supply Elasticity: A Reply", *ibid.*, 723-28.

(25) R.M. Solow, "On a Family of Lag Distributions", **Econometrica**, XXVIII (Abril, 1960), 393-406.

- c. não havia melhor alternativa para gerar expectativas até que Muth sugeriu as expectativas racionais;
- d. existe alguma evidência empírica sustentando o modelo das expectativas adaptativas: “ os respondedores tenderam a superestimar as vendas para períodos em que as vendas realmente caíram e a subestimá-las para os períodos em que as vendas aumentaram” <sup>(26)</sup>.

Devemos observar, entretanto, que os resultados de Modigliani — Sauerlender são compatíveis com outros modelos de formação de expectativas.

#### 4. Expectativas Racionais de Muth

Como podemos ver nas seções anteriores, os modelos de expectativas adaptativas e extrapolativas carecem de justificação teórica. Em “Rational Expectations and the Theory of Price Movements”, Muth desenvolveu um modelo de expectativas que elimina a debilidade teórica comum às teorias de formação de expectativas anteriores <sup>(27)</sup>

A teoria de Muth é baseada em três hipóteses sobre o comportamento humano: “(1) — As informações são escassas e o sistema econômico em geral não as desperdiça. (2) — O modo como as expectativas são formadas depende especificamente da estrutura do sistema relevante que descreve a economia. (3) — Uma previsão pública (public prediction), no sentido de Grunberg e Modigliani [14], não terá um efeito substancial na operação do sistema econômico (a não ser que seja baseada em informações internas)” <sup>(28)</sup>

A teoria implica em que o comportamento econômico está por trás da informação de expectativas. As expectativas são

---

(26) Franco Modigliani e O. H. Sauerlender, “Economic Expectations and Plans of Firms in Relation to Short — Term Forecasting”, in *Short-Term Economic Forecasting, Studies in Income and Wealth, XVI* (Princeton: National Bureau of Economic Research, 1955), 261-362.

(27) John F. Muth, “Rational Expectations and the Theory of Price Movements”, *Econometrica*, XXIX (Julho, 1961), 315-35.

(28) *Ibid.*, p. 316.

baseadas em informações que se assume, implicitamente, sejam gratuitas e são geradas de acordo com forças perceptíveis que afetam a atividade econômica a ser considerada, embora a teoria de Muth possa ser estendida para incorporar o custo de se gerarem previsões.

Se um produtor operando sob concorrência pura tem alguma idéia das condições de mercado, ele usará as informações, para ele disponíveis, sobre as condições de demanda e oferta na geração de suas expectativas sobre as variáveis relevantes para fim de decisão. Essa teoria parece concordar com a evidência apresentada por Heady e Kaldor, em seu estudo sobre expectativas de fazendeiros sobre preços:

“Para as suas previsões de 1948 e 1949, a maioria não estava usando simples modelos mecânicos, tais como a projeção do preço corrente ou da tendência recente do preço para o ano seguinte, porém, estava tentando analisar e prever as forças mais complexas da formação de preço. Um procedimento bastante comum parece ter iniciado o processo de projetar o preço esperado a partir dos preços correntes. O preço corrente era então ajustado em vista dos efeitos esperados de importantes forças de oferta e demanda. Quando os fazendeiros possuíam pouca informação sobre essas forças, havia uma tendência de projetar ou o preço corrente, ou a tendência recente do preço” (29)

Como os preços futuros são variáveis estocásticas e um modelo econômico pode ser representado em uma grande quantidade de modelos distintos, Muth introduz três hipóteses simplificadoras:

1. Os erros aleatórios são normais.
2. Existem equivalentes de certeza (certainty equivalents), para as variáveis a serem previstas.
3. As equações do sistema, inclusive as fórmulas de expectativas, são lineares.

---

(29) Earl D. Heady e Donald R. Kaldor, “Expectations and Errors in Forecasting Agricultural Prices”, *Journal of Political Economy*, LXII (Fevereiro, 1954), p. 35.

Qualquer uma das hipóteses acima subentende as outras duas<sup>(30)</sup>. Sob essas condições, as expectativas racionais implicam em que uma nova equação linear deve ser acrescentada ao sistema a fim de definir o processo de formação de expectativas. Muth sugeriu que o preço esperado para o período  $t + 1$ , no período  $t$ , deve ser igual ao valor esperado do preço de equilíbrio de mercado para o período  $t + 1$ , como esperado no período  $t$ :

$$P^*_{t+1} = E_t (P_{t+1});$$

ou seja, as expectativas são não-tendenciosas e o preço esperado é tratado como endógena ao sistema. Que os empresários tenham isso em mente, parece plausível:

“A idéia de uma possível distribuição de preços parece que era grosseiramente visualizada pelos fazendeiros. A maioria deles usava o conceito de distribuição de distribuições”<sup>(31)</sup>

Seja um simples exemplo dado por Muth:<sup>(32)</sup>

$$(4.1) \quad \begin{cases} C_t = -\beta p_t \text{ (demanda)} \\ P_t = \gamma p_t + u_t \text{ (oferta)} \\ P_t = C_t \text{ (equilíbrio do mercado)} \\ p^*_t = E_{t-1} (p_t) \text{ (função de expectativa)} \end{cases}$$

Supõe-se que:

$$(4.2) \quad u_t = \sum_{i=0}^{\infty} W_i \epsilon_{t-1}$$

$$E \begin{pmatrix} \epsilon_i & \epsilon_j \end{pmatrix} = \begin{matrix} \sigma^2 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{matrix} \quad (33)$$

(30) Muth, “Rational Expectations”, p. 317.

(31) Heady e Kaldor, “Expectations and Agricultural Price”, p. 35.

(32) Muth, “Rational Expectations”, p. 317.

(33) A importância das hipóteses (4.2) é que  $E_{t-1} (p_t)$  é o valor esperado para  $p_t$  condicionado a todas as observações até o período  $t-1$ . Se não há correlação serial entre os  $u_t$ , a função de expectativa degenera na previsão de um valor constante.

Todas as variáveis são tomadas como desvios dos valores de equilíbrio:

$$\begin{aligned} C_t &= \text{quantidade demandada no período } t. \\ P_t &= \text{quantidade ofertada no período } t. \\ p_t &= \text{preço de mercado no período } t. \\ p^*_t &= \text{preço esperado para o período } t \text{ no período } t-1. \end{aligned}$$

Nesse modelo há quatro variáveis endógenas:  $C_t$ ,  $P_t$ ,  $p_t$ ,  $p^*_t$ .

Resolvendo o sistema para  $p^*_t$ , obtemos:

$$(4.4) \quad p^*_t = \frac{\beta}{\gamma} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \right)^j p_{t-j}$$

O preço esperado pode ser reescrito como:

$$(4.4) \quad p^*_t = \frac{\beta}{\gamma} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{\beta}{\gamma}} \right)^j p_{t-j}$$

Em virtude do modelo (4.1) ser triangular, o parâmetro  $\beta$  pode ser estimado pelo Método dos Mínimos Quadrados (OLS). Visto que  $p^*_t$  é o mesmo que o preço esperado gerado pelo modelo de expectativas adaptativas,  $\beta/\gamma$  pode ser estimado por um método iterativo de máxima verossimilhança; portanto,  $\gamma$  pode ser identificado. Apesar de a formação de expectativa implicada por esse modelo ser igual à adaptativa, a interpretação é bastante diferente. Se compararmos (3.4) com (4.4), poderemos ver que na segunda expressão o coeficiente de expectativas é uma função dos parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$ . Por outro lado, o modelo de expectativas adaptativas define arbitrariamente um coeficiente de expectativa, enquanto a abordagem das expectativas racionais, sob a hipótese da não-tendenciosidade das expectativas, leva a uma formulação semelhante, na qual o coeficiente de expectativas é uma função de parâmetros da forma estrutural do modelo considerado [e.g. (4.1)]<sup>(34)</sup>.

(34) Para a relação explícita entre o coeficiente de expectativa e os parâmetros estruturais, veja M. Nerlove, "Time Series Analysis of the Supply of Agricultural Products", em Earl O. Heady et. al. eds., *Agricultural Supply Functions Estimating Techniques and Interpretation* (Ames: Iowa State University Press, 1961), pp. 31-60.

Quão melhor é a teoria das expectativas racionais em comparação a qualquer outra teoria, quando aplicada a um modelo econômico? Será verdade que as expectativas racionais são sempre melhores?

Do ponto de vista econômico, expectativas racionais são mais consistentes com a estrutura subjacente ao comportamento econômico considerado no modelo estudado, enquanto os outros modelos de formação de expectativas (teia-de-aranha, extrapolativo, adaptativo) não são necessariamente compatíveis com o comportamento econômico implicado pela estrutura econômica subjacente. Do ponto de vista técnico, as expectativas racionais são mais difíceis de serem estimadas do que as outras alternativas. Para obter expectativas racionais em nosso modelo, ele deve ser resolvido para os valores esperados das variáveis incertas. Apesar dessa solução ser linear nas variáveis exógenas, os coeficientes são combinações dos parâmetros estruturais que geralmente não são lineares. O que torna atraentes as expectativas racionais é que o comportamento econômico está diretamente incorporado em sua definição. Isso cria a possibilidade de os parâmetros do modelo afetarem a formação de expectativas. Desde que o modelo seja completo, podemos sempre derivar a relação entre as variáveis esperadas e os parâmetros estruturais, apesar de que, se o modelo não é identificado, não podemos obter estimativas para os parâmetros estruturais. Tais problemas de identificação, portanto, trazem uma dificuldade para uso de expectativas racionais. Mesmo nos casos de modelos não identificados, as expectativas racionais produzem as formas adequadas de relação entre as variáveis esperadas às variáveis exógenas. Se admitirmos que os parâmetros estruturais do modelo não variam, não há perda de generalidade no uso da versão reduzida das expectativas racionais quando o modelo é não identificado. Nesse caso, a relação entre as variáveis esperadas e as outras variáveis pode ser inferida. Se, entretanto, alguns parâmetros estruturais variam em valor, inferências empíricas não podem ser efetuadas no caso não identificado.

Outra fonte de possíveis dificuldades é a existência de correlação serial nas perturbações estruturais. As implicações da correlação serial no modelo (4.1) são analisadas por Nerlove e não precisam ser aqui repetidas <sup>(35)</sup>.

---

(35) Nerlove, "Time Series Analysis of the Supply of Agricultural Products", p. 53.

O modelo de formação de expectativas racionais é teoricamente satisfatório mas apresenta alguns problemas na sua utilização. Se o modelo considerado é linear e completo, pode ser obtida a forma explícita das variáveis esperadas com funções das variáveis exógenas. As séries esperadas podem então ser obtidas, construindo-se primeiro os valores esperados das variáveis exógenas e, em seguida, substituindo esses valores esperados das variáveis exógenas na expressão derivada da solução do modelo para as variáveis endógenas esperadas. Introduzindo essas variáveis esperadas no modelo, as relações implicadas pelo modelo podem então ser estimadas. Os valores esperados das variáveis exógenas devem também ser previsões não tendenciosas, como é suposto nas previsões das variáveis endógenas.

Em essência, a hipótese de expectativas racionais define uma função que especifica a expectativa como uma parte integrante do modelo econômico considerado. Isso é representado em (4.1) pela função de expectativa:

$$p_t^* = E_{t-1} (p_t)$$

Como o estudo de Modigliani e Sauerlender sugere, é possível que os indivíduos tenham expectativas tendenciosas sobre valores futuros das variáveis. Essa possibilidade pode ser incorporada na construção da expectativa racional pela introdução de uma função de expectativa específica que incorpore tal tendência. Funções de expectativas tendenciosas podem persistir sob a hipótese de racionalidade, se o custo de gerar expectativas é explicitamente considerado <sup>(36)</sup>.

## 5 Expectativas Quase-Racionais

Nesta seção apresentamos um método de geração de expectativas baseado em análise de séries de tempo, como desenvolvido por Box e Jenkins, que contém a maior parte das propriedades racionais e é mais simples de empregar empiricamente. Todas as hipóteses e suposições feitas por Muth são mantidas. A fim de tornar o processo mais facilmente com-

---

(36) Para mais detalhes a respeito de formação de expectativas tendenciosas, veja B. Peter Pashigian, "Rational Expectations and the Cobweb Theory", *Journal of Political Economy*, LXXVIII (Março, 1970), 338-52.

preensível, usamos um modelo específico para explicar como as expectativas são geradas<sup>(37)</sup>. O modelo é tomado emprestado de Pashigian<sup>(38)</sup>:

$$(5.1) \quad q_t^d = a + bP_t + c I_t + v_t \quad (\text{demanda})$$

$$(5.2) \quad q_t^s = c + dP_t^* + fC_t + u_t \quad (\text{oferta})$$

$$(5.3) \quad B(p_t) = P_t^* \quad (\text{função de expectativa})$$

$$(5.4) \quad q_t^d = q_t^s \quad (\text{equilíbrio de mercado})$$

onde

$q_t^d$  = quantidade demandada no período t.

$q_t^s$  = quantidade oferecida no período t.

$P_t$  = preço observado no período t.

$P_t^*$  = preço esperado para o período t no período t-1.

$I_t$  = renda esperada para o período t no período t-1.

$C_t$  = custos esperados para o período t no período t-2.

a, b, c, d, e e f, são parâmetros estruturais tais que  $b < 0$ ;  $e < 0$ ;  $d > 0$ ;  $f < 0$  e  $a > c$ .

A fim de proceder como Muth sugeriu, o sistema deve ser resolvido para  $P_t^*$ . Tomando as esperanças matemáticas, substituindo  $E(P_t)$  por  $P_t^*$  e igualando demanda e oferta, obtemos  $P_t^*$  (veja Pashigian, p. 340).

---

(37) Em debates com o Professor Zellner, ele mostrou-nos que os resultados obtidos com este modelo específico podem ser obtidos para qualquer sistema de equações completo, desde que as variáveis exógenas possam ser representadas em uma forma auto-regressiva e/ou médias móveis.

(38) Pashigian, "Rational Expectations and the Cobweb Theory", pp. 339-40.



$$(5.5) \quad P^*_t = \frac{c-a}{b-d} + \frac{f}{b-d} C_t - \frac{e}{b-d} I_t + \\ + \frac{1}{b-d} E(u_t) - \frac{1}{b-d} E(v_t),$$

que é a expectativa racional de Muth para o preço do mercado. Para obter  $P^*_t$  é necessário fazer suposições especiais acerca dos erros  $u_t$  e  $v_t$  e a determinação estocástica das variáveis exógenas,  $C_t$  e  $I_t$ . Supõe-se que todas as variáveis exógenas possam ser representadas por um modelo ARIMA <sup>(39)</sup>. Logo:

$$(5.6) \quad \psi_c(B) C_t = \theta_c(B) \varepsilon_{ct}$$

$$(5.7) \quad \psi_i(B) I_t = \theta_i(B) \varepsilon_{it}$$

onde  $\psi_c(B)$ ,  $\psi_i(B)$ ,  $\theta_c(B)$  e  $\theta_i(B)$  são polinômios em  $B$ , satisfazendo as condições de estabilidade e de inversibilidade <sup>(40)</sup>.  $C_t$  e  $I_t$  podem ser escritos:

$$(5.8) \quad C_t = \frac{\theta_c(B)}{\psi_c(B)} \varepsilon_{ct}$$

$$(5.9) \quad I_t = \frac{\theta_i(B)}{\psi_i(B)} \varepsilon_{it}$$

Se supomos adicionalmente que:

$$(5.10) \quad E(u_t) = E(v_t) = 0$$

(39) ARIMA — Processo estocástico misto do tipo Auto-regressivo-Médias Móveis (Auto-regressive-Moving Average). Supõe-se que, se as variáveis exógenas são não-estacionárias, o modelo é transformado de tal modo que essas variáveis transformadas são estacionárias. Transformações do tipo de primeiras diferenças são, em geral suficientes para a maior parte das séries econômicas. Box e Jenkins, *Time Series Analysis*, p. 74.

(40) *Ibid.*, pp. 49-51.

Substituindo (5.8) e (5.9) em (5.5), obtemos:

$$(5.11) \quad P_t^* = \frac{c-a}{b-d} + \left(\frac{f}{b-d}\right) \frac{\theta_c(B)}{\psi_c(B)} \varepsilon'_{ct} - \\ - \left(\frac{e}{b-d}\right) \frac{\theta_i(B)}{\psi_i(B)} \varepsilon_{it}$$

A expressão  $P_t^*$  em (5.11) pode ser reescrita como:

$$(5.12) \quad P_t^* = \theta_0 + \frac{\theta(B)}{\Phi(B)} \xi_x \quad (41)$$

onde

$$(5.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = \frac{c-a}{b-d}, e \\ \frac{\theta(B)}{\Phi(B)} \xi_t \text{ tem a mesma distribuição que:} \\ \left(\frac{f}{b-d}\right) \frac{\theta_c(B)}{\psi_c(B)} \varepsilon_{ct} - \left(\frac{e}{b-d}\right) \frac{\theta_i(B)}{\psi_i(B)} \varepsilon_{it} \end{array} \right.$$

Uma representação de  $P_t^*$  como em (5.12), satisfazendo

(41) Note que, se as variáveis exógenas podem ser representadas por modelos ARIMA, as observações feitas por Pashigian, "Rational Expectations and the Cobweb Theory", pp. 342-47, sobre a relação entre a distribuição de defasagens nos preços passados, implicada por  $P_t^*$ , e as hipóteses acerca dos erros na demanda e na oferta não são válidas.

(5.13), é a expectativa racional <sup>(42)</sup>. A estimação de  $P_t^*$  é possível através de uma análise de série de tempo na linha sugerida pelas técnicas de Box e Jenkins, incorporando entretanto, a condição restritiva (5.13). O problema é de minimizar o erro quadrático médio (m.s.e) com as restrições de estabilidade e inversibilidade e sujeito a (5.13).

Parte dessas restrições pode ser substituída por uma hipótese mais fraca, qual seja, a média e a matriz de variância-covariância das duas variáveis devem ser iguais.

O que nós propomos como expectativas quase-rationais é a representação de  $P_t^*$  como em (5.12), porém sem impor as restrições implicadas por (5.13). No modelo de expectativas quase-rationais, substituímos as expectativas sobre variáveis endógenas e exógenas em (5.1) e (5.2) pelas suas previsões de erro quadrático médio mínimo (m.s.e.) correspondentes. Essas previsões podem ser geradas, aplicando o processo de estimação sugerido por Box e Jenkins, individualmente, a cada uma das variáveis <sup>(43)</sup>.

Se relaxarmos a hipótese de que as perturbações na demanda e na oferta não são independentes serialmente, de modo que:

$$(5.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \varepsilon_{t-i}, \quad E(\varepsilon_t) = 0 \\ v_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i n_{t-i}, \quad E(n_t) = 0 \end{array} \right.$$

$P_t^*$  é agora definido como:

(42) Para um ponto de vista contrário, veja Charles Nelson. "Rational Expectations and the Predictive Efficiency of Economic Models", Report n.º 7209 of the Center for Mathematical Studies in Business and Economics, University of Chicago. (Março, 1972).

(43) Box e Jenkins, *Time Series Analysis*, pp. 208-50.

$$(5.15) \quad P^*_t = \left(\frac{c-a}{b-d}\right) + \frac{f}{b-d} C_t - \frac{c}{b-d} I_t \frac{1}{b-d} \sum_{t=1}^{\infty} w_i \varepsilon_{t-i} - \\ - \frac{1}{b-d} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_{t-i}. \quad (44)$$

Podemos definir somas infinitas em termos de polinômios no operador de defasagens:

$$(5.16) \quad \sum_{i=1}^{\infty} w_i \varepsilon_{t-i} = \theta \frac{(B)}{\gamma} \gamma_{t-1}, \\ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_{t-i} = \theta \frac{(B)}{\mu} \mu_{t-1}. \quad (45)$$

Substituindo (5.8) e (5.16) em (5.15), obtemos:

$$(5.17) \quad P^*_t = \frac{c-a}{b-d} + \frac{f}{b-d} \frac{\theta_c (B)}{\psi_c (B)} \varepsilon_{ct} - \frac{e}{b-d} \frac{\theta_i (B)}{\psi_i (B)} \varepsilon_{it} + \\ + \theta \frac{(B)}{\gamma} \gamma_{t-1} - \theta \frac{(B)}{\mu} \mu_{t-1}$$

Como antes, desde que as condições de estacionariedade e inversibilidade sejam satisfeitas,  $P^*_t$  pode ser reescrito:

$$(5.18) \quad p^*_t = \Theta_0 + \frac{\Theta (B)}{\Phi (B)} \alpha_t$$

---

(44) Poderíamos supor que  $u_t$  e  $v_t$  têm representação ARIMA. (5.14) é usado porque esta é uma hipótese frequente mas, como mostramos acima, é um tipo especial de representação ARIMA.

(45) Desde que as condições de estacionariedade sejam satisfeitas, pode-se representar um modelo auto-regressivo de ordem infinita por um processo de médias móveis. Box e Jenkins, **Time Series Analysis**, p. 72.

onde

$$(5.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = \left( \frac{c-a}{b-d} \right) e \\ \frac{\theta(B)}{\Phi(B)} \alpha_t \text{ tem a mesma distribuição que} \\ \left( \frac{f}{b-d} \right) \frac{\theta_c(B)}{\psi_c(B)} \varepsilon_{ct} - \left( \frac{e}{b-d} \right) \frac{\theta_i(B)}{\psi_i(B)} + \theta_\gamma(B) \gamma_{t-1} \\ + \theta_\mu(B) \mu_{t-1} \end{array} \right.$$

Mantendo todas as hipóteses, exceto aquelas sobre as perturbações, as quais podem ser praticamente de qualquer natureza, e, supondo que todas as variáveis exógenas podem ser representadas por modelos ARIMA, o modelo de expectativa quase-razional implica em que as variáveis esperadas podem ser substituídas por suas previsões de erro quadrático médio mínimo. As restrições implicadas por (5.13) e (5.19) são desprezadas nessa formulação.

As expectativas quase-rationais não podem ser obtidas de um modo muito simples. Análises de séries de tempo são necessárias para todas as variáveis endógenas cujos valores esperados entram no modelo e, por isso, todas as dificuldades comuns a tais análises são encontradas. Aplicando-se expectativas quase-rationais, o problema de resolver o sistema é evitado, e nem é necessário prever todas as variáveis exógenas cujas expectativas entram no modelo. Além disso, não é necessário especificar a estrutura de dependência serial nas perturbações. Não há procedimento para se gerarem expectativas racionais independentemente das suposições sobre a estrutura da dependência serial nas perturbações; todavia, expectativas quase-rationais podem ser geradas por métodos de máxima verossimilhança pela estimação de modelos ARIMA, supondo-os representativos de cada variável esperada do modelo. Como sugerido por Nerlove em uma discussão genérica sobre análise

de séries de tempo <sup>(46)</sup>, o uso de expectativas quase-rationais vai corresponder à estimação da forma reduzida sem restrições quando o modelo é super-identificado: expectativas integralmente racionais geram preços esperados como funções das variáveis exógenas do sistema e incorporam a estrutura econômica inteira do modelo considerado. Elas correspondem, portanto, a estimativas das equações reduzidas, do tipo “full-information”, incorporando todas as restrições da super-identificação. As expectativas quase-rationais correspondem a uma forma reduzida das expectativas totalmente racionais, as quais não especificam todas as restrições adequadas e, em consequência, não permitem a identificação dos parâmetros estruturais. Supõe-se que os parâmetros estruturais não variam ou, se o modelo considerado não é identificado, o ganho da utilização de expectativas totalmente racionais sobre expectativas quase-rationais é nulo. No primeiro caso, não é necessário conhecer os efeitos de variações nos parâmetros estruturais sobre a formação de expectativas, já que os parâmetros estruturais são supostos constantes. No segundo caso, os parâmetros estruturais que entram na formação de expectativas não podem ser identificados sob qualquer circunstância.

Um modelo alternativo para gerar expectativas quase-rationais é através da teoria das componentes-não-observadas desenvolvida por Nerlove <sup>(47)</sup>. Sem dúvida, como podemos ver em (5.11) e (5.17), expectativas racionais implicam na representação do preço esperado como a soma de diversas componentes não observadas. O número de componentes depende do número de variáveis exógenas e do modo como elas podem ser representadas. Em (5.12) e (5.18), por exemplo, há uma componente não observada. O número de componentes depende também das hipóteses sobre as perturbações nas equações estruturais do modelo. A formulação das componentes

---

(46) M. Nerlove, “On the Structure of Serial Dependence in Some US. Price Series”, Report n.º 7102 of the Center for Mathematical Studies in Business and Economics, University of Chicago, (Janeiro, 1971), p. 2.

(47) M. Nerlove, “Distributed Lags and Unobserved Components in Economic Time Series” em W. Föllmer, et. al., **Ten Economic Studies in Tradition of Irving Fisher** (New York: John Wiley and Sons, 1967), p. 127-69. “Analysis of Economic Time Series by Box and Jenkins and Related Techniques”, Report n.º 7156 of the Center for Mathematical Studies in Business and Economics, University of Chicago, (Dezembro, 1971).

não observadas pode ser implementada empiricamente (veja Nerlove, "Analysis of Economic Time Series. "). Todavia, a técnica desenvolvida por Box e Jenkins para computar as estimativas relevantes, é sugerida aqui pela sua maior simplicidade. É interessante notar que todos os modelos de formação de expectativas analisados neste trabalho podem ser encarados como casos particulares da versão quase-racional, em que o modelo de séries de tempo é imposto aos dados, ao invés de ser obtido da análise das informações disponíveis.