AVALIAÇÃO DE UM CAPITAL COM CORREÇÃO MONETÁRIA

Antonio Pereira do Amaral*

A correção monetária, surgida na atual conjuntura econômico-financeira do Brasil, modificou substancialmente o problema da avaliação de capitais.

É um novo componente que não pode deixar de ser considerado na solução de problemas de avaliação de valores atuais, montantes ou amortizações.

Neste trabalho procuraremos expor e resolver alguns destes problemas relativos a um capital.

Quando avaliamos um capital no regime de correção monetária, três casos principais podem ocorrer:

1.º) a correção monetária verifica-se em intervalos de tempo iguais ao período da taxa de juros, isto é, se a taxa de juros é anual a correção é anual; se a taxa de juros é semestral a correção é semestral, etc.;

2.º) a correção monetária ocorre em intervalos de tempo que são múltiplos do período da taxa de juros;

3.º) a correção monetária ocorre em intervalos de tempo que são submúltiplos do período da taxa de juros.

---

* Professor Adjunto da Faculdade de Economia e Administração da Universidade de São Paulo.

1.º Caso

I — SISTEMA DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

Montante

Chamemos M_t o montante de um capital C, colocado a juros simples, antes de efetuada a t.ª correção monetária e $\overline{M}_t$ o mesmo montante após a correção.

Na capitalização simples a taxa de juros incide apenas sobre o capital inicial e a respectiva correção monetária. Não incide sobre os juros acumulados, nem sobre a correção monetária dos juros.

Chamemos α_t a taxa de correção monetária correspondente à t.ª correção.

Nestas condições, temos:

M_0 = C = capital inicial.
M_1 = montante no fim do primeiro período, antes de efetuada a primeira correção monetária.
$M_1 = C + Ci = C\ (1+i)$ (i é a taxa de juros)
$\overline{M}_1$ = montante no fim do primeiro período após a correção monetária.

$$\overline{M}_1 = M_1 + M_1\,\alpha_1 = M_1\ (1 + \alpha_1)$$

ou

$$\overline{M}_1 = C\ (1 + i)\ (1 + \alpha_1)$$

Para o cálculo de M_2 e $\overline{M}_2$, como estamos tratando de capitalização simples, devemos decompor M_1 em duas partes: uma correspondente ao capital inicial corrigido e a outra correspondente aos juros do primeiro período também corrigidos.

Assim:

$$\overline{M}_1 = C\ (1 + \alpha_1) + Ci\ (1 + \alpha_1)$$

A taxa de juros incide apenas sobre a primeira parcela do 2.º membro. Temos, então:

$$M_2 = C\ (1 + \alpha_1) + C\ (1 + \alpha_1)\ i + Ci\ (1 + \alpha_1)$$

ou

$$M_2 = C\ (1 + \alpha_1) + 2\ Ci\ (1 + \alpha_1)$$

Sobre M_2 incide a taxa de correção α_2

Então:

$$\overline{M}_2 = M_2 + M_2\,\alpha_2 = M_2\ (1 + \alpha_2)$$

$$\overline{M}_2 = \{\ C\ (1 + \alpha_1) + 2\ Ci\ (1 + \alpha_1)\ \}\ (1 + \alpha_2)$$

$$\overline{M}_2 = C\ (1 + \alpha_1)\ (1 + \alpha_2) + 2\ Ci\ (1 + \alpha_1)\ (1 + \alpha_2)$$

Para o cálculo de M_3 a taxa de juros incide apenas sobre a 1.ª parcela do 2.º membro.

$$M_3 = C\ (1 + \alpha_1)\ (1 + \alpha_2) + C\ (1 + \alpha_1)\ (1 + \alpha_2)\ i +$$
$$+ Ci\ (1 + \alpha_1)\ (1 + \alpha_2)$$

ou

$$M_3 = C\ (1 + \alpha_1)\ (1 + \alpha_2) + 3\ Ci\ 1(+ \alpha_1)\ (1 + \alpha_2)$$

$$\overline{M}_3 = M_3 + M_3\,\alpha_3 = M_3\ (1 + \alpha_3)$$

$$\overline{M}_3 = \{\ C\ (1 + \alpha_1)\ (1 + \alpha_2) +$$
$$+ 3\ Ci\ (1 + \alpha_1)\ (1 + \alpha_2)\ \}\ (1 + \alpha_3)$$

$$\overline{M}_3 = C\ (1 + \alpha_1)\ (1 + \alpha_2)\ (1 + \alpha_3) +$$
$$+ 3\ Ci\ (1 + \alpha_1)\ (1 + \alpha_2)\ (1 + \alpha_3)$$

Generalizando para $\overline{n}$ períodos, temos:

$$\overline{M}_n = C \prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j) + Ci\,n \prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j)$$

ou

$$\boxed{\overline{M}_n = C\,(1 + i\,n) \prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j) \qquad (1)}$$

Se $\alpha_j = \alpha$ qualquer que seja j, j = 1, 2, 3, n, temos:

$$\boxed{\overline{M}_n = C\,(1 + i\,n)\,(1 + \alpha)^n \qquad (1')}$$

VALOR ATUAL

Como sabemos, o valor atual de um capital, no sistema de capitalização simples, pode ser calculado adotando-se o desconto comercial ou por fora, ou adotando-se o desconto racional ou por dentro.

Neste trabalho estudaremos apenas o valor atual adotando o desconto racional porque o desconto comercial, para prazos longos, pode apresentar graves distorções, mesmo sem considerarmos a correção monetária e, para prazos curtos, o problema da correção monetária não apresenta interesse.

No sistema de desconto racional a taxa de desconto confunde-se com a taxa de juros. Neste sistema podemos definir o valor atual de um capital $\overline{C}$ com prazo $\overline{n}$ como sendo um capital $\overline{A}$ tal que, se investirmos $\overline{A}$ no mesmo prazo $\overline{n}$ obteremos o montante $\underline{C}$.

Então, pelo que vimos no estudo do montante, temos:

$$C = \overline{A}\,(1 + i\,n) \prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j), \text{ donde:}$$

$$\bar{A} = \frac{C}{(1 + i\,n) \prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j)} \qquad (2')$$

Se $\alpha_j = \alpha$ quaquer que seja j, j = 1, 2, 3 n, temos:

$$\bar{A} = \frac{C}{(1 + i\,n) \quad (1 + \alpha)^n} \qquad (2')$$

2 — SISTEMA DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

Montante

Na capitalização composta a taxa de juros incide sobre o capital inicial e sobre os juros acumulados.

Então, adotando a mesma simbologia que adotamos para a capitalização simples, temos:

$M_0 = C =$ capital inicial.

$M_1 =$ montante no fim do 1.º período antes de efetuada a primeira correção monetária.

$M_1 = C + Ci = C\ (1 + i)$

$\overline{M}_1 = M_1 + M_1\ \alpha_1 = M_1\ (1 + \alpha_1)$

ou

$\overline{M}_1 = C\ (1 + i)\quad (1 + \alpha_1)$

Para calcular M_2, como a taxa de juros incide sobre o capital inicial e sobre os juros acumulados, temos:

$M_2 = \overline{M}_1 + \overline{M}_1\ i = \overline{M}_1\ (1 + i)$

ou

$M_2 = C\ (1 + \alpha_1)\ (1 + i)^2$

e

$$\overline{M}_2 = M_2 + M_2\, a_2 = M_2\,(1 + a_2) =$$

$$= C\,(1 + a_1)\,(1 + a_2)\,(1 + i)^2$$

$$M_3 = \overline{M}_2 + \overline{M}_2\, i = \overline{M}_2\,(1 + i)$$

$$M_3 = C\,(1 + a_1)\,(1 + a_2)\,(1 + i)^3$$

e

$$\overline{M}_3 = M_3 + M_3\, a_3 = M_3\,(1 + a_3)$$

ou

$$\overline{M}_3 = C\,(1 + a_1)\,(1 + a_2)\,(1 + a_3)\,(1 + i)^3$$

Generalizando para n períodos, temos:

$$\boxed{\overline{M}_n = C\,(1 + i)^n \prod_{j=1}^{n} (1 + a_j) \qquad (3)}$$

Se $a_j = a$ qualquer que seja j, j = 1, 2, 3, n. temos:

$$\boxed{\overline{M} = C\,(1 + i)^n\,(1 + a)^n \qquad (3')}$$

VALOR ATUAL

Pela definição de valor atual dada à página 4, que também pode ser adotada no sistema de capitalização composta, temos:

$$C = \overline{A}\,(1 + i)^n \prod_{j=1}^{n} (i + a_j),\ \text{donde:}$$

$$\boxed{\overline{A} = \frac{C}{(1 +)^n \prod_{j=1}^{n} (1 + a_j)} \qquad (4)}$$

Se $\alpha_j = \alpha$ qualquer que seja j, j = 1, 2, 3, ..., temos:

$$\boxed{\overline{A} = \frac{C}{(1+i)^n \quad (1+\alpha)^n} \qquad (4')}$$

2º Caso

Neste caso, a correção monetária verifica-se em intervalos de tempo que são múltiplos do período da taxa. Desejamos assim, se a taxa de juros for, por exemplo, mensal, a correção monetária poderá ser bimensal, trimestral etc.

Suponhamos que a correção monetária ocorre em cada k períodos da taxa de juros e que o início do primeiro período de capitalização coincide com o início do período de correção monetária.

3 — SISTEMA DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

Montante

Como fizemos para o primeiro caso, M_t será o montante do capital $\overline{C}$ no fim do tº período de capitalização. Então, M_k será o montante no fim do kº período de capitalização antes de efetuarmos a 1.ª correção monetária e $\overline{M}_k$ o mesmo montante após a correção. M_{2k} será o montante antes de efetuada a segunda correção e $\overline{M}_{2k}$ o montante após a correção. E assim por diante.

Nestas condições, na capitalização simples, temos:

$$M_k = C + Cki$$

e

$$\overline{M}_k = M_k + M_k \alpha_1 = M_k (1 + \alpha_1)$$

ou

$$\overline{M}_k = (C + C\ k\ i)\ (1 + \alpha_1)$$

ou

$$\overline{M}_k = (C + \alpha_1) + C\ k\ i\ (1 + \alpha_1)$$

$$M_{2k} = C\ (1 + \alpha_1) + C\ (1 + \alpha_1)\ i\ k + C\ i\ k\ (1 + \alpha_1)$$

$$M_{2k} = C\ (1 + \alpha_1) + C\ (1 + \alpha_1)\ i\ 2\ k$$

$$\overline{M}_{2k} = M_{2k} + M_{2k}\ \alpha_2 = M_{2k}\ (1 + \alpha_2)$$

$$\overline{M}_{2k} = C\ (1 + \alpha_1)\ (1 + \alpha_2) + C\ (1 + \alpha_1)\ (1 + \alpha_2)\ i\ 2\ k \quad (A)$$

Seja $n = pK$.

Então, generalizando a fórmula acima, temos:

$$\overline{M}_n = C \prod_{j=1}^{p} (1 + \alpha_j) + C\ i\ n \prod_{j=1}^{p} (1 + \alpha_j)$$

ou

$$\boxed{\overline{M}_n = C\ (1 + i\ n) \prod_{j=1}^{p} (1 + \alpha_j) \qquad (5)}$$

Se $\alpha_j = \alpha$ qualquer que seja j, $j = 1, 2, \ldots p$, temos:

$$\boxed{\overline{M}_n = C\ (1 + i\ n)\ (1 + \alpha)^p \qquad (5')}$$

Se $n = p\,k + r$ com $r < k$, temos, generalizando novamente a fórmula (A):

$$\overline{M}_{pk} = C \prod_{j=1}^{p} (1 + \alpha_j) + C\ p\ k\ i \prod_{j=1}^{p} (1 + \alpha_j)$$

$$M_{pk+r} = C \prod_{j=1}^{p} (1 + \alpha_j) + C \prod_{j=1}^{p} (1 + \alpha_j)\ r\ i +$$

$$+ C\, p\, k\, i \prod_{j=1}^{p} (1 + \alpha_j)$$

$$M_{pk+r} = C \prod_{j=1}^{p} (1 + \alpha_j) + C\, i\, (pk + r) \prod_{j=1}^{p} (1 + \alpha_j)$$

Como $pk + r = n$ vemos que ainda neste caso valem as fórmulas (5) e (5').

VALOR ATUAL

Novamente adotando a definição de valor atual, dada na página 4, vem:

$$C = \overline{A}\, (1 + i\,n) \prod_{j=1}^{p} (1 + \alpha_j)\ (1 + \alpha_j) \quad \text{donde:}$$

$$\boxed{\overline{A} = \frac{C}{(1 + i\,n) \prod_{j=1}^{p} (1 + \alpha_j)} \qquad (6)}$$

Se $\alpha_j = \alpha$ qualquer que seja j, $j = 1, 2, \quad p$, temos:

$$\boxed{\overline{A} = \frac{C}{(1 + i\,n)\ (1 + \alpha)^p} \qquad (6')}$$

4 — SISTEMA DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

Montante

Na capitalização composta, o montante do capital C no fim de k períodos de capitalização é, como sabemos:

$$M_k = C\,(1 + i)^k$$

Portanto,

$$\overline{M}_k = C\,(1 + i)^k + C\,(1 + i)^k\,\alpha_1$$

ou

$$\overline{M}_k = C\,(1 + i)^k\,(1 + \alpha_1)$$

No fim de 2k períodos devemos ter:

$$M_{2k} = \overline{M}_k\,(1 + i)^k = C\,(1 + i)^{2k}\,(1 + \alpha_1)$$

e

$$\overline{M}_{2k} = M_{2k}\,\alpha_2 = M_{2k}\,(1 + \alpha_2)$$

ou

$$\overline{M}_{2k} = C\,(1 + i)^{2k}\,(1 + \alpha_1)\,(1 + \alpha_2) \qquad \text{(B)}$$

Se n = pk, generalizando a fórmula (B), temos:

$$\boxed{\overline{M}_n = C\,(1 + i)^n \prod_{j=1}^{p} (1 + \alpha_j)} \qquad (7)$$

Se $\alpha_j = \alpha$ qualquer que seja j, j = 1, 2, 3,. p, vem:

$$\boxed{\overline{M}_n = C\,(1 + i)^n\,(1 + \alpha)^p} \qquad (7')$$

Também aqui, se n = p k + r, como ocorreu na capitalização simples, valem as fórmulas (7) e (7').

VALOR ATUAL

Temos que:

$$C = \overline{A}\ (1 + i)^n \prod_{j=1}^{p} (1 + a_j)$$

ou

$$\boxed{\overline{A} = \frac{C}{(1 + i)^n \prod_{j=1}^{p} (1 + a_j)}} \qquad (8)$$

Se $a_j = a$ qualquer que seja j, j = 1, 2, p, temos:

$$\boxed{\overline{A} = \frac{C}{(1 + i)^n\ (1 + a)^p}} \qquad (8')$$

No caso em que n = p k + r, não levamos em conta nas fórmulas (5), (5'), (6), (6'), (7), (7'), (8) e (8') a correção monetária correspondente ao período de tempo r. Podemos fazer a correção monetária relativa a esse tempo, proporcionalmente.

O coeficiente de correção seria, então:

$$(1 + \frac{r}{k}\ a_{p+1})$$

As fórmulas (5), (5'), (6), (6'), (7), (7'), (8) e (8') transformam-se, respectivamente, nas seguintes:

$$\overline{M}_n = C\ (1 + i\,n)\ (1 + \frac{r}{k}\ a_{p+1}) \prod_{j=1}^{p} (1 + a_j)$$

$$\overline{M}_n = C\ (1 + i\,n)\ (1 + \frac{r}{k}\ a)\ \ (1 + a)^p$$

$$\bar{A} = \frac{C}{(1 + i\,n)\ (1 + \frac{k}{r}\,\alpha_{p+1})\ \prod_{j=1}^{p} (1 + \alpha_j)}$$

$$\bar{A} = \frac{C}{(1 + i\,n)\ (1 + \frac{r}{k}\,\alpha)\ (1 + \alpha)^p}$$

$$\bar{M}_n = C\ (1 + i)^n\ (1 + \frac{r}{k}\,\alpha_{p+1})\ \prod_{j=1}^{p} (1 + \alpha_j)$$

$$\bar{M}_n = C\ (1 + i)^n\ (1 + \frac{r}{k}\,\alpha)\ (1 + \alpha)^p$$

$$\bar{A} = \frac{C}{(1 + i)^n\ (1 + \frac{r}{k}\,\alpha_{p+1})\ \prod_{j=1}^{p} (1 + \alpha_j)}$$

$$\bar{A} = \frac{C}{(1 + i)^n\ (1 + \frac{r}{k}\,\alpha)\ (1 + \alpha)^p}$$

Neste segundo caso, para facilitar a compreensão e as deduções, fizemos a suposição de que o início do período de correção monetária coincidia com o início do primeiro período da taxa de juros.

Suponhamos, agora, que isso não ocorra e que temos $\underline{r}$ capitalizações antes que se verifique a 1.ª correção monetária e após a última correção o prazo se estenda ainda por $\underline{s}$ períodos de capitalização.

Se se tratar de capitalização simples, depois de decorridos $\underline{r}$ períodos de capitalização, $(r < k)$ o montante sobre o qual se faz a 1.ª correção monetária é:

$$M_r = C\ (1 + i\,r)$$

Como r é apenas uma fração de período de correção monetária esta deverá ser feita proporcionalmente.

Então, o montante, corrigido após a 1.ª correção monetária será:

$$\overline{M}_r = (1 + i\,r)\left(1 + \frac{r}{k}\,\alpha_1\right)$$

Suponhamos que o prazo compreenda p períodos inteiros de correção monetária. No fim desses p períodos terão ocorrido mais p correções de taxas $\alpha_2\ \alpha_3 \quad \alpha_{p+1}$ e os períodos de capitalização correspondentes serão em número de p k.

Então, o montante, já corrigido no fim desses p períodos, será:

$$\overline{M}_{pk+r} = C\left[1 = i\,(r + p\,k\,)\right]\left(1 + \frac{r}{k}\,\alpha_1\right)\prod_{j=2}^{p+1}(1 + \alpha_j)$$

Após o último período inteiro de correção monetária teremos, ainda, um intervalo de tempo com s capitalizações (<k). Faremos, também, para esse período s a correção monetária proporcional e teremos, então, o montante no fim do prazo que é:

$$\overline{M}_{pk+r+s} = C\left[1 + i\,(r + pk + s)\right]\left(1 + \frac{r}{k}\,\alpha_1\right)$$

$$\left(1 + \frac{s}{k}\,\alpha_{p+2}\right)\prod_{j=2}^{p+1}(1\ \alpha_j)$$

Se se tratar de capitalização composta a fórmula acima como é fácil ver, transforma-se na seguinte:

$$\overline{M}_{pk+r+s} = C\,(1 + i)^{r+pk+s}\left(1 + \frac{r}{k}\,\alpha_1\right)$$

$$\left(1 + \frac{s}{k}\,\alpha_{p+2}\right) \prod_{j=2}^{p+1} (1 + \alpha_j)$$

3.º Caso

Neste caso, como é fácil de ver, as taxas de correção monetária e de juros são aplicadas de maneira inversa à do 2.º Caso. Então, as fórmulas finais também se invertem. Assim, temos:

$$\boxed{\overline{M}_n = C\,(1 + ip) \prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j)} \qquad (9)$$

Se $\alpha_j = \alpha$ qualquer que seja j, j = 1, 2. n

$$\boxed{\overline{M}_n = C\,(1 + ip)\,(1 + \alpha)^n} \qquad (9')$$

e

$$\boxed{\overline{A} = \frac{C}{(1 + ip) \prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j)}} \qquad (10)$$

Se $\alpha_j = \alpha$ qualquer que seja j, j = 1, 2. n

$$\boxed{\overline{A} = \frac{C}{(1 + ip)\,(1 + \alpha)^n}} \qquad (10')$$

Para capitalização composta:

$$\boxed{\overline{M}_n = C\,(1 + i)^p \prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j)} \qquad (11)$$

$$\boxed{\overline{M}_n = C\,(1+i)^p\,(1+a)^n} \qquad (11')$$

$$\boxed{\overline{A} = \frac{C}{(1+i)^p \prod_{j=1}^{n} (1+a_j)}} \qquad (12)$$

Se $a_j = a$ qualquer que seja j, j = 1, 2. n

$$\boxed{\overline{A} = \frac{C}{(1+i)^p\,(1+a)^n}} \qquad (12')$$

Se n = p k + r com r < k e quisermos considerar os juros relativos ao período r, poderemos adotar a convenção linear ou convenção exponencial.

Para a convenção linear teremos:

$$\overline{M}_n\ C\,(1+i)^p\,\left(1+\frac{r}{k}\,i\right)\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)$$

Para a convenção exponencial teremos:

$$\overline{M}_n = C\,(1+i)^{\frac{n}{k}}\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)$$