Da Demanda Individual à Demanda Coletiva:

Uma Solução Geral para o Problema de Agregação de Demandas Individuais (*)

Adriano Batista Dias(**)

1. INTRODUÇÃO

Este artigo apresenta uma solução geral para o problema de agregação de demandas individuais, enfatizando o papel desempenhado pela distribuição pessoal da renda na determinação da demanda de mercado ou demanda coletiva[1].

(*) A exposição aqui feita está baseada em «Market Demand and Income Distribution», dissertação doutoral defendida pelo autor na Universidade de Vanderbilt, em maio de 1976, a ser publicada na íntegra pelo PIMES-UFPe, sob número 1 da série Estudos. Apresentado no IV Encontro Anual da ANPEC.

(**) O Autor é professor do Departamento de Economia da Universidade Federal do Pernambuco — CME-PIMES.

(1) As expressões «demanda de mercado», «demanda coletiva» e «macrodemanda" são usadas como sinônimos e expressam soma de demandas individuais de um mesmo bem ou grupo de bens.

O papel desempenhado pela distribuição pessoal da renda é universalmente aceito como fundamental na determinação da composição da demanda agregada. E sua importância na determinação do nível da demanda agregada tem sido objeto de intensa discussão acadêmica. Há mesmo plena possibilidade de formular teorias negando ou exaltando a importância da distribuição pessoal da renda na determinação da demanda agregada, desde que se parta de hipóteses de comportamento agregado. A situação se dificulta, porém, se a demanda agregada for obtida a partir de hipóteses sobre o comportamento das unidades de consumo. Na literatura econômica há abundância de trabalhos onde há derivação de curvas de demanda de mercado, obtidas com base em hipóteses sobre o comportamento das unidades de consumo. Com poucas exceções, porém, esses trabalhos usam duas formas alternativas de contornar a necessidade de expor a distribuição pessoal de renda como variável importante. Uma dessas formas de se evadir ao problema consiste em estudar a demanda de mercado de um bem supondo dada a distribuição da renda monetária. Os leitores são então entretidos com explanações sobre os problemas oriundos da variação dos preços e nunca se voltam a discutir com profundidade os efeitos provenientes de variação da distribuição de renda. A outra forma de não incluir a distribuição de renda como variável explícita é assumir que as funções demandas das unidades de consumo sejam lineares em relação à renda. As funções de demanda coletivas resultantes são também lineares e independentes da distribuição da renda. Mas a elegância da linearidade tem sido consistentemente refutada nos testes dessa hipótese.

A necessidade de fundamentar as demandas coletivas, tanto as de bens isolados quanto a agregada, em hipóteses de comportamento das unidades de consumo, surgiu com a passagem das teorias clássicas e o aparecimento das teorias neoclássicas. Naquelas, a unidade de análise correspondia à classe social, e a demanda coletiva era gerada por agregação das demandas das classes sociais. Nas teorias neoclássicas, a unidade de análise passou a ser o indivíduo, surgindo então o problema de agregar funções demanda individuais.

É interessante observar que, no princípio, havia por parte dos autores neoclássicos uma grande preocupação em relacionar as funções-demanda coletivas, ou funções-demanda de mercado, à distribuição pessoal da renda. Cournot, por exemplo, declarou explicitamente em seu tratado matemático de economia, que

> "   la demande annuelle D est, pour chaque denrée, une foction particulière F (p) du prix de cette denrée. Elle dépend évidemment   de la richesse moyenne et de l'échelle suivant laquelle la richesse est répartie"(2).

O próprio Pareto, grande impulsionador das idéias neoclássicas, declarava explícitamente que "   la répartition des revenus est une des circonstances principales dont il faut tenir compte pour connaître les lois qui régissent réellement l'offre et la demande"(3). E, mais importante ainda, os leitores eram claramente avisados da ilegitimidade de aplicar diretamente à comunidade as deduções aplicáveis ao comportamento de indivíduos isolados:

> "   nous avons dû commencer par faire une étude d' economie individuelle. Les lois de la demande et de l' offre que l' on obtient en ce cas, ne sont pas du tout celles que l'on a quand on considere une société entière, où existe une répartition donnée des révenus"(4).

As observações dos fundadores da escola neoclássica no tocante aos problemas existentes na passagem das demandas individuais para as coletivas não foram levadas em conta por seus seguidores. É fato comum hoje fazer inferências sobre a demanda de mercado fundamentadas puramente em características das demandas individuais. E, já em 1939, Staehle dizia:

> "most writers insist that the factors which rule the functions of the individuals are relatively stable and deeprooted enough to assume that they do not vary in the short period. They take this as a sufficient justification to use their market curves as if the characteristics of the individual curves applied without modification to the curve of the market"(5).

Talvez, em parte o uso de demandas individuais como demandas de mercado seja impelido pela quase ausência na literatura econômica de trabalhos estabelecendo expressões de deman-

---

(2) COURNOT [1], p. 50.

(3) PARETO [8], p. 331.

(4) Id. — Ibid, p. 332.

(5) Staehle [9], p. 133.

das de mercado que respeitem a necessidade de coerência dessas expressões com as respectivas demandas individuais.

Aparentemente, a primeira expressão de uma demanda coletiva determinada analiticamente a partir de funções demanda individuais e explicitando a distribuição de renda como variável foi feita por Jacob Marschak em meados de 1939[6]. Recentemente o assunto foi retomado por Muellbauer[7], derivando funções-demanda individuais para o caso específico de funções-demanda individuais que sejam parte de um sistema de equações de demanda. Muellbauer, entretanto, limitou-se a estudar a agregação de sistemas de equações de demanda individuais que usam expressão analítica única[8]. Sua solução consiste em determinar um nível de renda único que leva a demanda individual a tomar o mesmo valor que toma a demanda **per capita** gerada por uma dada distribuição de renda.

A solução desenvolvida neste artigo provém de uma abordagem diferente da seguida por Muellbauer, expondo os efeitos da distribuição de renda como elemento aditivo às quantidades demandadas que seriam geradas por distribuições igualitárias, e se aplica a sistemas de equações de demanda de qualquer tipo[9].

A seção 2 apresenta as hipóteses sobre o comportamento dos consumidores, derivando-se suas implicações imediatas. A seção 3 mostra como a demanda coletiva pode ser expressa como função de medidas de distribuição de renda, dado um determinado vetor de preços. A solução aqui desenvolvida permite uma separação entre os efeitos sobre a demanda coletiva oriundos de uma mudança na forma da distribuição da renda e os efeitos causados por variação da renda **per capita.** Esta separação é usada para redefinir os conceitos de propensão marginal coletiva a consumir um bem e de elasticidade-renda de demanda coletiva.

---

(6) Jacob MARSCHAK — [5], pp. 161-70

(7) John MUELLBAUER [6].

(8) Por sistema de equação com expressão analítica única, consideramos os sistemas representáveis pela expressão (23) apresentada adiante.

(9) Estamos nos referindo ao sistema de equação representado pela expressão (22), a seguir, que pode representar todas as expressões analíticas imagináveis para um sistema de equações de microdemanda que tenha como variáveis o vetor de preços e a renda da unidade de consumo. O sistema representado por (27), estudado por Muellbauer, é um caso particular do sistema (22).

A seguir, a seção 4 aborda o problema geral da agregação de demandas individuais, quando os preços também são variáveis, em adição às variações da distribuição da renda monetária. Na seção 5 a solução é estudada à luz de sua utilização na agregação de funções-demanda individuais que são parte de um sistema de equações. Finalmente a seção 6 apresenta as conclusões.

2. UM MODELO BÁSICO DE CONDUTA DO CONSUMIDOR

Consideremos uma população de m unidades de consumo com diferentes níveis de renda monetária. Seja r_i a renda monetária da unidade de consumo i, R o conjunto de todos os r_i 's, P o vetor de preços, e n o número de tipos diferentes de bens homogêneos disponíveis. Supor-se-á então que:

A — cada unidade de consumo tem uma função de preferência estável, permitindo coerência na escolha dos bens;

B — todas as unidades de consumo se defrontam com o mesmo vetor de preços P

Denominando q_{ij} a quantidade demandada do bem j pela unidade de consumo i, a suposição A implica na existência de funções de demanda individuais

$$q_{ij} = q_{ij}\ (r_i\ P)\ ; \qquad \begin{matrix} (i = 1, & m) \\ (j = 1, & n) \end{matrix} \qquad (1)$$

A suposição B, por outro lado, serve como primeira condição para a existência de funções demanda de mercado e permite escrever:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{m} q_{ij}\ (r_i,\ P) = Q_j\ (r_1, \quad ., r_m,\ P) \qquad (2)$$

onde Q_j é a demanda total de mercado do bem j.

As suposições A e B são tradicionais em modelos neoclássicos. Todavia, deixam tantos graus de liberdade no modelo, que é impossível extrair conclusões significativas sobre a demanda de mercado. Mesmo que os preços e a frequência absoluta da distribuição de renda sejam mantidos constantes, a quantidade demandada pode sofrer alterações. Por exemplo, suponha-se que as rendas diferentes de duas unidades de consumo são trocadas. Obviamente, a distribuição de renda R se manterá inalterada mas o decréscimo em quantidade demandada por uma unidade de consumo pode não coincidir com o aumento da quantidade demandada pela outra, se as duas unidades de consumo tiverem funções de preferência diferentes. Então, a quantidade demandada no mercado pode se alterar. Daí se conclui que as suposições A e B não permitem representar a demanda de mercado como uma função do vetor de preços P e da distribuição de renda R.

O raciocínio previamente exposto traz como implicação a necessidade de adicionar restrições ainda não impostas pelas suposições A e B. Para que a quantidade demandada permaneça constante quando a renda de quaisquer dois consumidores é trocada, o decréscimo em quantidade demandada por um deve coincidir exatamente com o acréscimo em quantidade demandada pelo outro, qualquer que seja P. Isso implica que quaisquer duas funções demanda individuais q_{ij}'s são iguais para o mesmo bem j ou, no máximo, diferem de acordo com uma variável que é independente da renda.

Supor-se-á então que:

C — as funções de preferência dos consumidores são tais que as funções demanda de cada bem, delas derivadas, possuem um componente aditivo que independe da renda, e só esse componente aditivo pode variar entre diferentes unidades de consumo.

Considerando as suposições A, B e C, as funções de demanda das unidades de consumo para um dado bem podem ser representadas por

$$q_{ij} = a_{ij}(P) + V_j(r_j\ P) \qquad \begin{matrix} (i = 1, \quad ., m) \\ (j = 1, \quad ., n) \end{matrix} \qquad (3)$$

onde,

a é uma função real, definida em uma região do espaço de preços, e caracterizando a unidade de consumo i;

v é uma função real, comum a todas as unidades de consumo, e definida em uma região do espaço de preços e rendas, que contém a pré-citada região do espaço de preços como uma sub-região.

Antes de iniciar nosso exercício de agregação das funções demanda individuais para obter a demanda de mercado, observar-se-á que nossos resultados devem ser válidos para qualquer vetor de preços para o qual as funções de microdemanda estejam definidas, inclusive, portanto, para um vetor de preços fixo. Por outro lado, poder-se-á observar que uma mudança de quantidade demandada de um bem num mercado, causada por uma variação simultânea de renda monetária e preços, pode ser repartida entre um efeito causado por variações de P, com R constante, e os efeitos causados por variações de R, a preços constantes.

O efeito preço, quando a distribuição da renda monetária é dada e é considerada fixa, gera as funções demanda de mercado já extensivamente estudadas na teoria econômica. Mas os efeitos causados por variações R, quando os preços são dados e considerados fixos, não foi objeto de estudo analítico tão intenso. Dessa forma, o estudo da agregação de microfunções demanda, sob a condição particular de preços fixos, não só facilita o estabelecimento de uma relação funcional entre quantidade demandada num mercado e medidas da distribuição de renda, como constitui uma etapa do caso geral onde ambos, o vetor P e a distribuição R, variam. Para facilitar a exposição, e concentrar a atenção na distribuição da renda, vamos supor adicionalmente que:

D — o vetor de preços P é constante.

A suposição D se enquadra bem em nosso objetivo de alcançar resultados aplicáveis às conclusões de investigações empíricas sobre o padrão de comportamento dos consumidores, visto que os dados usados em estimações dos padrões de consumo são tais que o vetor de preços é tomado como constante. Isto se deve a que geralmente as pesquisas sobre orçamento familiar são investigações não periódicas que buscam informação relativa ao consumo de grupos homogêneos de famílias em um curto período de tempo, no qual o vetor de preços não sofre alteração significativa.

Por conseguinte, embora por razões diferentes, esta primeira parte do estudo analítico da relação entre demanda individual e demanda coletiva, bem como o grande número dos estudos empíricos realizados sobre comportamento do consumidor, se apoiam na suposição de um vetor de preços constante. Então, em ambos os casos, as funções de microdemanda são funções de Engel. Dessa forma, ao estabelecer a demanda coletiva de um bem a partir das curvas de Engel das unidades de consumo, válida para qualquer expressão analítica dessas curvas, está-se possibilitando o estabelecimento de demandas coletivas de bens, como uma extensão de resultados de pesquisas cujo produto foi a estimação de curvas de Engel dos consumidores. A suposição de preços constantes, todavia, embora relevante por permitir uma aplicação direta de nosso modelo ao resultado de pesquisas empíricas, estabelece uma forte restrição a um modelo teórico. Assim, depois de explorar analiticamente os principais aspectos do relacionamento entre as curvas de Engel de um bem e sua função de macrodemanda, sob a condição estabelecida pela suposição D, passar-se-á ao caso geral, relaxando a suposição D.

3. A DEMANDA COLETIVA, DADOS OS PREÇOS

3.1. A Demanda de Mercado como Função de Medidas da Distribuição de Renda

Iniciar-se-á o estudo de agregação das funções de demanda de unidades de consumo por um bem isolado observando que as suposições A a D podem ser expressas por

$$q_i = a_i + v(r_j) \qquad (i = 1, \quad ., m) \qquad (4)$$

onde q representa quantidades demandadas, a representa um número real, e v é uma função real de r[10]

(10) Nesta seção, e sempre que se estiver lidando com funções demanda referentes a um só bem, o subscrito j torna-se ocioso e será, portanto, omitido.

A demanda de mercado do bem em consideração é então dada por

$$\sum_{i=1}^{m} q_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=1}^{m} v(r_i) \qquad (5)$$

Como a análise se torna facilitada lidando com quantidades demandadas por unidade de consumo, em vez de trabalhar com as quantidades totais, pode-se reescrever a expressão (5) em termos de demanda por unidade consumidora, chamada doravante demanda coletiva média. Usando uma barra sobre variáveis e constantes para caracterizar seus valores médios no conjunto de unidades de consumo, pode-se reescrever (5) como

$$\overline{q} = \overline{a} + \overline{v}(R) \qquad (6)$$

onde

$$\overline{v}(R) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} v(r_i) \qquad (7)$$

A expressão (6) é similar a uma expressão anteriormente desenvolvida por Jacob Marschak [11]. que, para sua dedução, ademais das suposições A a D, assumiu continuidade da função densidade de distribuição pessoal da renda, assim como impôs a todas as unidades de consumo a mesma curva de Engel para um dado bem. A expressão (6), embora já exprima a demanda coletiva média como uma função do conjunto de rendas pessoais R, não permite separar os efeitos sobre $\overline{q}$ oriundos de variação da distribuição de renda e da variação da renda média, ao passar de uma distribuição R_0 com renda média $\overline{r}_0$ para outra distribuição R_1 com renda média $\overline{r}_1$. Para isso é preciso desdobrar a expressão (6) em dois componentes.

Vamos, por conseguinte, definir como "curva de Engel típica" para o bem em consideração a função

$$q = \overline{a} + v(r) \qquad (8)$$

(11) Marschak [5], p. 165.

que representa a curva de Engel de uma unidade de consumo cuja demanda exógena em relação à renda é a média das demandas exógenas para o conjunto de unidades de consumo. E se definirá como "unidade de consumo típica" uma que possua curva de Engel típica e receba a renda média. Então, a função demanda da unidade de consumo típica é

$$q^* = \bar{a} + v(\bar{r}) \tag{9}$$

onde $\bar{r}$ é a renda média no conjunto de rendas R. Esta quantidade demanda q^* representa a quantidade média demandada gerada por uma distribuição igualitária com renda média $\bar{r}$, a qual é em geral diferente da quantidade demandada média $\bar{q}$ dada pela expressão (6).

Todavia, a quantidade demandada pela unidade de consumo típica q^* vem sendo tradicionalmente usada para representar a quantidade demandada média q. De fato, ao procurar inferir quantidades demandadas no mercado de um bem a partir de estudos de orçamentos familiares, é prática corrente estimar um valor para a quantidade exogenamente demandada $\bar{a}$ e estabelecer uma forma funcional para v(r) e, em continuação, tomar como quantidade típica demandada o valor que se obtém ao atribuir à variável renda seu valor médio. Este procedimento é correto quando a distribuição de renda é igualitária, e a renda média é a renda de cada unidade de consumo. Mas quando a renda não é distribuída igualmente, como nos casos de aplicação prática relevante, há uma diferença entre a quantidade média demandada, expressa por (6), e a quantidade demandada pela unidade de consumo típica, expressa por (9). A quantidade demandada pela unidade de consumo típica pode ser usada, de forma correta, para determinar a quantidade média demandada, desde que seja corrigida para incorporar os efeitos distribucionais. Para realizar esta correção, simultaneamente adicionamos e subtraímos, na expressão (6), o componente v(r) tomado em seu valor na renda média obtendo

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \bar{q}(\bar{r}, M_v) = \bar{a} + v(\bar{r}) + [\bar{v}(R)) - v(\bar{r})] = \\ &= q^* \quad M_v(R) \end{aligned} \tag{10}$$

onde

$$M_v = M_v(R) = \bar{v}(R) - v(\bar{r}) \tag{11}$$

A expressão (11) mostra que M_v é a diferença entre $\bar{v}(R)$ e $v(\bar{r})$. M_v é então a diferença entre a quantidade demandada média induzida pela renda e quantidade demandada induzida pela renda média. Como a quantidade demandada média é função da renda de cada uma das m unidades de consumo, assim como a renda média também o é, conclui-se que M_v é uma medida da distribuição de renda R.

A expressão (10) mostra que a função demanda coletiva média tem como variáveis a renda média $\bar{r}$, única variável da função demanda da unidade de consumo típica q^*, e a medida da distribuição de renda aqui representada por $M_v = M_v(R)$. Consequentemente, todas as distribuições com igual renda média e igual valor da medida $M_v(R)$ geram igual quantidade demandada média do bem em questão. A expressão (10) traz, por outro lado, uma função demanda agregada com a conveniente propriedade de separar os efeitos de renda média dos efeitos de distribuição de renda medidos por M_v, como se pode ver na proposição que segue.

Proposição I: Ao passar de uma distribuição R_0 para uma distribuição R_1, o incremento na quantidade demandada média é igual ao incremento da quantidade demandada pela "unidade de consumo típica" adicionado ao incremento no efeito distribuição.

Prova: De acordo com a expressão (10),

$$q_0 = q_0^* + M_v(R_0)$$

e

$$\bar{q}_1 = q_1^* + M_v(R_1)$$

Então,

$$\bar{q}_1 - \bar{q}_0 = [q^*_1 - q^*_0] + [M_v(R_1) - M_v(R_0)]$$

C.Q.D.

O primeiro colchete do lado direito da última expressão depende só da renda média, não contendo nenhum efeito distribucional. O segundo colchete traz o incremento do efeito distribuição de renda.

Deve-se observar que o valor numérico da medida M_v depende não só da distribuição de renda R, mas também da expressão analítica do componente induzido v(r)(12). Consequentemente, a passagem de uma distribuição de renda R_0 para uma distribuição R_1 pode produzir diferentes incrementos no efeito distribucional de acordo com diferentes expressões analíticas de v(r). Há, entretanto, uma família de funções v(r) que geram idênticas funções $M_v(R)$, desde que nenhum componente linear de curvas de Engel contribui para o valor de $M_v(R)$, como se demonstra em seguida.

Proposição II: A medida $M_v(R)$ depende só do componente não linear c(r) de v(r) ou, sendo $v(r) = \alpha + \beta + c(r)$, temos,

$$M_{\alpha + \beta r + c(r)} = M_{c(r)}(R)$$

Prova: Tome-se v(r) como

$$v(r) = \alpha + \beta r + c(r)$$

onde α e β são duas constantes reais.

Então, de acordo com (11), tem-se:

$$M_v(R) = \overline{\alpha + \beta r + c(r)} - [\alpha + \beta \bar{r} + c(\bar{r})]$$

Todavia,

$$\overline{\alpha + \beta r + c(r)} = \alpha + \beta \bar{r} + \bar{c}(R),$$

(12) Quando as unidades de consumo têm curvas de Engel quadráticas, em relação a um determinado bem, a medida M_v, da qual a demanda coletiva desse bem depende linearmente, é a variância. Quando as curvas de Engel de um bem são semilogarítmicas a medida M_v correspondente é o índice $\overline{\log r} - \log \bar{r}$. Uma análise do relacionamento entre a distribuição de renda e a demanda coletiva de alimentos em cidades brasileiras, quando as curvas de Engel desse bem são quadráticas, é feita em Adriado DIAS [2]. A demanda coletiva de bens importados, com curvas de Engel individuais supostas quadráticas, é estudada em FORTUNE [4], pp. 257-66. A demanda coletiva de alimentos nos EUA é estudada sob a suposição de curvas de Engel semilogarítmicas para os alimentos, em Dias [3].

Então,

$$M_v(R) = \overline{c}(R) - c(\overline{r}) = M_c(R). \qquad \text{C.Q.D.}$$

Uma consequência imediata da Proposição II é que não há efeito distribucional quando as curvas de Engel sendo somadas são retas paralelas. Neste caso c(r) é nulo para todos os indivíduos, então

$$M_c(R) = 0,$$

e a quantidade média demandada no mercado é

$$\overline{q} = \overline{a} + b . \overline{r},$$

onde b é uma constante real, igual para todas as unidades de consumo. Por outro lado, a medida $M_c(R)$ só é idêntica a zero se c(r) for idêntico a zero. Isso equivale a dizer que a condição necessária e suficiente para que a demanda de mercado de um bem seja independente da distribuição de renda consiste em que as curvas de Engel desse bem sejam retas e paralelas(13)

3.2. A Propensão Marginal Coletiva a Consumir

Uma característica importante de nosso modelo decorre de que ele permite definir uma propensão marginal coletiva a consumir um bem mais geral que as definições usuais. Tradicionalmente, ao definir a propensão coletiva a consumir um bem, assume-se que os incrementos de renda são tais que mantêm constante a distribuição. Por exemplo, se o aumento na renda de cada consumidor for proporcional ao valor inicial, pode-se dizer que a distribuição permaneceu constante. Ao definir a propensão marginal a consumir do mercado de um bem, especificou-se que os incrementos de renda individual devem ser tais que a medida M_v permaneça constante. Dessa forma, nossa definição é muito mais geral que a tradicional porque, em vez de estabelecer uma forma única de distribuir a renda adicional, só requer que esta seja distribuída em qualquer uma do número infinito de maneiras diferentes de distribuir uma renda adicional satisfazendo à equação

(13) Essa condição foi já havia sido provada anteriormente no memorável trabalho de NATAF [7], pp. 69-70.

$$\sum_{i=1}^{m} \left[V'(r_i) - V'(\bar{r}) \right] dr_i = 0$$

A propensão marginal coletiva a consumir o bem torna-se então

$$\frac{\partial \bar{q}}{d\bar{r}} = \left. \frac{\partial \left[q^* + M_v(R)\right]}{\partial \bar{r}} \right|_{M_v(R) = \text{const.}} = \left. \frac{\partial q^*}{\partial \bar{r}} \right|_{M_v(R) = \text{const.}} \qquad (12)$$

Pode-se então observar que a propensão marginal coletiva a consumir um bem é igual à propensão marginal a consumir da unidade de consumo típica.

3.3. Elasticidade-renda da Demanda de Mercado

A elasticidade-renda da demanda de mercado é de uso generalizado em trabalhos teóricos e empíricos em economia. Há, inclusive, muitos trabalhos que procuram estimar um valor para a elasticidade-renda das curvas de Engel individuais e logo o aplicam como o valor da elasticidade-renda da demanda de mercado. É interessante, então, investigar a relação entre a elasticidade-renda da demanda de mercado e as elasticidades-renda das curvas de Engel correspondentes.

Ao definir a elasticidade-renda da demanda de mercado, utilizar-se-á uma propriedade de nosso modelo de agregação segundo a qual o efeito renda média é separável do efeito distribuição de renda. A elasticidade-renda da demanda de mercado é definida como a razão entre o aumento relativo na quantidade demandada e um aumento relativo infinitesimal da renda média, quando a renda adicional é distribuída de forma a manter constante o efeito distribucional. Analiticamente a elasticidade-renda da demanda de mercado é expressa por

$$E_{\bar{q}}(\bar{r}, M_v) = \left. \frac{\bar{r}}{\bar{q}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{r}} \right|_{M_v(R) = \text{const.}} = \frac{\partial q^*}{\partial \bar{r}} \frac{\bar{r}}{\bar{q}} \qquad (13)$$

Considerando que a elasticidade-renda da demanda da unidade de consumo típica é

$$E_{q^*}(\bar{r}) = \frac{\partial q^*}{\partial \bar{r}} \frac{\bar{r}}{q^*} \qquad (14)$$

a expressão (13) pode ser reescrita como

$$E_{\bar{q}}(\bar{r}, M_v) \Bigg|_{M_v = \text{Const.}} = E_q(\bar{r}) \frac{q^*}{\bar{q}} \qquad (15)$$

A expressão (15) apresenta a relação existente entre a elasticidade-renda da função demanda do consumidor típico e a elasticidade-renda da demanda coletiva.

A elasticidade-renda da demanda de mercado depende, portanto, do valor de $M_v(R)$, embora este permaneça constante ao incrementar a renda de forma a satisfazer à definição da elasticidade-renda de demanda de mercado. Mais precisamente, a elasticidade-renda da demanda coletiva é uma função monotônica do valor de M_v, conforme a proposição que segue.

Proposição III: O valor absoluto da elasticidade-renda da demanda de mercado de um bem é uma função decrescente da medida M_v.

Prova: Segundo (15), pode-se escrever

$$\frac{\partial}{\partial M_v} \left| E_{\bar{q}}(\bar{r}, M_v) \right| = \frac{\partial}{\partial M_v} \left| E_{q^*} \frac{q^*}{\bar{q}} \right|$$

Sendo as quantidades demanda q^* e $\bar{q}$ sempre positivas, e q^* independente de M_v, a expressão acima pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial M_v} \left| E_{\bar{q}}(\bar{r}, M_v) \right| = \left| Eq^* \right| q^* \frac{\partial}{\partial M_v} \frac{1}{\bar{q}}$$

a qual, em atenção à expressão (10), se torna

$$\frac{\partial}{\partial M_v} \left| E_{\bar{q}} \, (\bar{r}, M_v) \right| = - \left| E_{q^*} \right| \frac{q^*}{(q^* + M_v)^2} \quad \text{C.D.Q.}$$

Como a expressão acima é sempre negativa, a Proposição III está demonstrada. A Proposição III mostra que, ao tomar a elasticidade-renda da demanda coletiva como elasticidade-renda da demanda do consumidor típico, está-se em geral subestimando a elasticidade-renda da demanda coletiva dos bens não inferiores.

4. PREÇOS E CONSISTÊNCIA NA AGREGAÇÃO

A seção anterior contém uma discussão detalhada do relacionamento existente entre as funções-demanda de unidades de consumo por um bem, a distribuição de renda entre as unidades de consumo e a demanda coletiva desse bem, na condição de preços constantes. Fixar os preços e estudar os efeitos da variação da distribuição da renda é uma abordagem simétrica em relação à usual na economia neoclássica, que consiste em fixar a distribuição de renda e observar os efeitos da variação dos preços. Cada uma dessas abordagens é uma simplificação, visto que ambos, o vetor de preços e a distribuição de renda, são variáveis explanatórias da demanda coletiva. Aqueles interessados em estudar os efeitos da variação de preços supõem constante a distribuição da renda. Desde que há interesse em enfatizar os efeitos da distribuição da renda na demanda coletiva, mantivemos os preços constantes, facilitando consequentemente a exposição. Agora, para completar a análise, nosso modelo é estendido para incluir o caso geral em que o vetor de preços e a distribuição de renda sejam simultaneamente variáveis.

Relaxando a suposição D e mantendo as suposições A, B, e C, volta-se a representar a demanda de uma unidade de consumo i por um bem j como

$$q_{ij} = a_{ij} (P) + v_j (r_j, P) \tag{3}$$

Somando as quantidades de um bem demandadas por cada unidade de consumo, obtém-se a demanda coletiva total desse bem que, dividida pelo número de unidades de consumo, vem a ser

$$\bar{q} = \bar{a}(P) + \bar{v}(R, P) \tag{16}$$

onde

$$\bar{V}(R, P) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} V(r_i, P) \tag{17}$$

A curva de demanda típica é então

$$q = \bar{a}(P) + v(r, P) \tag{18}$$

e a demanda da unidade de consumo típica é

$$q^* = \bar{a}(P) + v(\bar{r}, P) \tag{19}$$

Raciocinando de forma análoga a quando se passou da expressão (8) para (9), pode-se escrever

$$\bar{q} = \bar{q}(\bar{r}, M_v, P) = \bar{a}(P) + v(\bar{r}, P) + [\bar{v}(R,P) -$$

$$- v(\bar{r}, P)] = q^* + M_v(R,P) \tag{20}$$

onde

$$M_v(R, P) = \bar{v}(R, P) - v(\bar{r}, P) \tag{21}$$

é uma medida de distribuição da renda e expressa o efeito distribucional sobre o nível de demanda média, ou seja, de quando a demanda coletiva média difere da demanda da unidade de consumo típica.

Cabe notar que o valor da medida $M_v(R, P)$ pode mudar quando a distribuição de renda monetária R é mantida constante, mas o vetor de preços varia. Isso não deve causar surpresa pois, nestas condições, a distribuição da renda real está variando. Então, está dentro de nossas expectativas que tanto a quantidade demandada pela unidade de consumo típica q^* e a quantidade demandada média $\bar{q}$ variem, e o façam em quantidades diferentes, fazendo variar o valor da medida $M_v(R, P)$.

5. SISTEMAS DE DEMANDA

As seções anteriores apresentam uma solução para o problema da agregação das funções-demanda individuais de bem para qualquer bem isolado. Abordar-se-á agora o problema de agregar funções de demanda que são parte integrante de um sistema de equações de demanda.

Considere-se o sistema de funções de demanda individuais

$$q_{ij} = a_{ij}(P) + b_j(P) \quad r_i + \sum_{t=1}^{w} g_{tj}(P) \quad v_t(r_j, P), \tag{22}$$

$$(i = 1, \quad ., m)$$

$$(j = 1, \quad ., n); \; w \leqslant n$$

onde o subscrito i individualiza uma unidade de consumo, o subscrito j refere-se a um bem homogêneo, os a_{ij} 's, b_j 's e g_{tj} 's são funções reais do vetor P e os v_t 's são funções reais linearmente independentes entre si, e têm como variáveis as rendas exauraram as rendas torna-se

Se o sistema (22) inclui todos os bens e serviços (poupança sendo considerada um bem), a condição para que os dispêndios exauram as rendas torna-se.

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \bar{p}_j.b_j(P), \tag{23 a}$$

e sem relevante perda de generalidade, pode-se também estabelecer

$$0 = \sum_{j=1}^{n} p_j.a_{ij}(P), \tag{23b}$$

$$0 = \sum_{j=1}^{n} g_{t_j}(P).p_j \qquad (t = 1, \quad ., w) \tag{23c}$$

Se o sistema de microdemandas (22) satisfaz à condição de dispêndio exaurindo a renda, expressa por (23), a soma das demandas individuais de cada bem gera demandas coletivas de cada bem que também respeitam a restrição (23), e o dispêndio agregado, se a poupança for considerada um bem, exaure a renda monetária agregada.

O sistema de funções-demanda coletivas correspondente ao sistema de demandas individuais (22) é

$$\bar{q}_j = \bar{a}_j \, (P) \; \bar{r} + \sum_{t=1}^{w} g_{tj} \, (P) \;\; \bar{v_t (r,P)} +$$

$$\sum_{t=1}^{w} g_{tj} (P) \, . \, M_{v_t} (R,P) \qquad (24)$$

onde cada M_{v_t} (R, P) é uma diferente medida da distribuição R. Cada combinação linear de medidas M_{v_t} (R, P) é por si mesma uma medida M_v da distribuição R e, portanto, a demanda coletiva de cada bem depende de uma determinada medida que lhe é específica. Entretanto, desde que cada uma dessas medidas específicas seja uma combinação linear de w medidas linearmente independentes, todo o sistema de equações de demanda coletiva está completamente determinado pelo vetor de preços e por apenas $w \leqslant n$ medidas M_{v_t} da distribuição R.

No caso particular em que o sistema de funções-demanda individuais é construído com w = 1, tem-se

$$(i = 1, \; . \, . \, , m)$$

$$q_{i_j} = a_{i_j} \, (P) + b_j(P) \; r_i, \\ + \; g_j(P) \, v(r_i,P)$$

$$(j = 1, \; . \, , \, n) \qquad (25)$$

e o sistema de funções-demanda coletiva é

$$\bar{q}_j = \bar{a}_j(P) + b_j(P)\,\bar{r} + g_j(P)V(\bar{r}, P) + \\ + g_j(P)M_v(R, P) \tag{26}$$

que determina as quantidades demandadas de todos os bens, uma vez conhecidos os valores das variáveis P, $\bar{r}$ e M_v[14].

6. CONCLUSÃO

No modelo de agregação desenvolvido a função demanda de mercado de cada bem é igual à função demanda de um consumidor típico à qual se adiciona um desvio causado pelo efeito distribucional das distribuições de renda não igualitárias. O desvio da quantidade demandada é expresso pela medida da distribuição pessoal da renda M_v e a família de distribuições que têm o mesmo valor dessa medida gera efeito distribucional igual. Dessa forma, ao conhecer a função-demanda de um bem da unidade de consumo típica, o vetor de preços e as medidas renda média e M_v da distribuição de renda, pode-se determinar a função-demanda coletiva desse bem, embora não se tenha outra informação sobre a distribuição que essas duas medidas.

Por outro lado, observa-se que a não inclusão de M_v na equação de demanda coletiva de um bem implica que essa demanda não é compatível com as demandas individuais desse bem, ou então suas demandas individuais são lineares em relação às rendas individuais e sua demanda coletiva linear em relação à renda agregada.

---

(14) Se particularizarmos ainda mais o sistema (25), fazendo $a_{ij} = (P) =$ $= 0$ para todo i e todo j, então temos

$$q_{ij} = b_j(P)\, r_i + g_j(P)V(r_i, P) \qquad \begin{matrix} (i = 1, \dots, m) \\ (j = 1, \dots, n) \end{matrix} \tag{27}$$

cuja agregação foi objeto de estudo por Muellbauer, e que o considerou como o mais generalizado sistema no qual a agregação é possível. Veja Muellbauer [6], p. 530.

Distribuindo entre o conjunto de unidades de consumo uma renda adicional, de forma a manter constante o efeito distribucional, definiu-se uma propensão coletiva marginal a consumir que depende só do vetor de preços e do nível de renda por unidade de consumo, ou seja, independe dos aspectos distribucionais da renda.

Por outro lado, não se pode definir, com correção, uma propensão marginal coletiva a consumir, se não se fizer restrição sobre a forma como a renda adicional é distribuída, porque, como demonstrado, quando a medida M_v muda de valor ao se passar de uma distribuição de renda para outra, mesmo os preços sendo constantes, a variação da quantidade coletiva média demandada não se deve só à variação da renda média, mas também à variação de M_v.

Igualmente, a mesma restrição de distribuir renda adicional mantendo constante o efeito distribuição permite uma definição de elasticidade-renda de demanda coletiva com mais generalidade que as definições usuais. Mas essa elasticidade difere da elasticidade-renda da demanda do consumidor típico em virtude do efeito distribucional. Como o modelo desenvolvido determina o efeito distribucional, torna-se possível estimar a elasticidade-renda da demanda coletiva usando a elasticidade-renda da demanda do consumidor típico, corrigindo-a para levar em conta o efeito distribucional.

Uma suposição padrão dos estudos empíricos de comportamento do consumidor é no sentido de que as funções-demanda sejam iguais para todas as unidades de consumo. Como este é um caso particular de uma suposição menos restritiva sobre o comportamento das unidades de consumo com base na qual se deduziu a expressão analítica geral da demanda coletiva, observa-se que a expressão (24) pode ser usada para obter estimativas de funções-demanda coletivas de estudos empíricos voltados para a estimação de funções-demanda individuais.

O modelo de agregação desenvolvido não só permite derivar funções-demanda coletivas, conhecendo a função-demanda da unidade de consumo típica e o valor da medida M_v. Estabelecendo uma ponte entre uma micro e uma macrofunção de demanda, permite estimar funções de demanda individuais a partir de dados agregados de quantidades demandas e distribuição de renda.

É importante observar que a inclusão da variável distribuição da renda na expressão de função demanda coletiva através da medida M_v permite a formulação de modelos econométricos macroeconômicos conceitualmente mais corretos, por contarem com uma variável teoricamente imprescindível. De fato, nos cursos elementares de Econometria, se aprende que deixar de lado variáveis explicativas na equação que determina uma variável dependente implica obter estimações viesadas dos coeficientes das variáveis explicativas que são mantidas na equação. Como a demanda coletiva é uma função linear da variável M_v, além de função também da renda média e do vetor de preços, não usar M_v como variável conduz à obtenção de estimações viesadas de todos os outros coeficientes(15).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] COURNOT, Antoine Augustine — **Recherces sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses,** Paris: Chez L. Hachette, 1938.

[2] DIAS, Adriano — «Distribuição da Renda», Tese ao Mestrado de Economia, Recife: 1970.

[3] ———— — «Market Demand and Income Distribution», Dissertação Doutoral em Vanderbilt University, 1976.

[4] FORTUNE, Neill — Income Distribution as a Determinant of Import Manufactured Consumer Commodities, **Canadian Journal of Economics,** V, maio, 1972, pp. 257-66.

[5] MARSCHAK, Jacob — Personal and Collective Budget Function, **Review of Economics and Statistics,** XII, ago., 1939, pp. 161-70.

[6] MUELLBAUER, John — Aggregation, Income Distribution and Consumer Demand, **Review of Economic Studies,** XLII, out., 1975, pp. 525-43.

[7] NATAF, André — **Théorie des Choix et Fonctions de Demande,** Paris: Centre National de la Recherche Scientifique, 1964.

[8] PARETO, Vilfredo — **Cours d'Économie Politique,** Lausanne: F. Rouge, Librairie Editeur, 1897.

[9] STAEHLE, H. — Short-Period Variations in the Distribution of Incomes, **Review of Economics and Statistics,** XIX, ago., 1937.

(15) Uma quantificação dos efeitos da não inclusão de M_v ao estimar a demanda coletiva de alimentos nos EUA é feita em Dias [3], pp. 95-116.