

Modelagem e Previsão de Volatilidade Determinística e Estocástica para a Série do Ibovespa

Igor A. C. de Moraes
Marcelo S. Portugal

Doutorando em Economia na UFRGS
Professor do Programa de Pós-Graduação em Economia
da UFRGS e Pesquisador do CNPq

RESUMO

A variância de um ativo é uma das informações mais importantes para quem opera no mercado financeiro. A determinação desta volatilidade pode ser feita com base no conhecimento da variância passada (processo determinístico), ou ainda quando esta variância não é conhecida (processo estocástico). Estes modelos apresentam diversas formulações que captam diferentes efeitos observados em séries financeiras, tais como a aglomeração da variância, o efeito "leverage" e a persistência na volatilidade. Neste trabalho é comparada a estimativa da volatilidade do Índice Bovespa obtida por processos determinísticos e estocásticos, abrangendo 3 períodos relativamente conturbados: a crise do México, a crise asiática e a moratória russa. A conclusão básica é que ambos os processos conseguem prever muito bem a volatilidade.

PALAVRAS-CHAVE

modelos GARCH, volatilidade, filtro de Kalman

ABSTRACT

The variance of an asset is the most important information for an investor that deals in the financial markets. The measurement of that volatility can be done in two different ways. The first one, deterministic case, is done by taking as a starting point the knowledge of conditional variance. In the other approach, called stochastic volatility, one does not know a priori the volatility of the asset. These models are used in many different formulations to explain the specific characteristics observed in the financial time series, such as volatility clustering, leverage effect and persistence of the volatility. In this paper, the volatility of the São Paulo Stock Exchange Index (Ibovespa) is modelled by the two processes described above. The period analysed goes from July/94 until October/98, include three critical periods of the world financial markets: the Mexican crisis, the Asian crisis and finally the Russian debacle. The main conclusion is that both process perform quite well.

KEY WORDS

GARCH models, volatility, Kalman filter

INTRODUÇÃO

A correta previsão da volatilidade é importante não só no esboço de estratégias ótimas de *hedge* com derivativos como também permite captar momentos de grande incerteza no mercado. Quanto mais incerto estiver o mercado, diante de crises ou outros fatos exógenos, mais os preços variam e maior a variância dos retornos implicando possibilidades de grandes ganhos ou perdas. Assim sendo, o correto gerenciamento do risco de uma carteira de investimentos passa pela boa previsão das oscilações do preço dos ativos no mercado.

A maneira padrão e mais simples de se medir a volatilidade de um ativo é por meio da estimação do desvio padrão de seus retornos. Esta medida é usualmente definida como a volatilidade histórica. Entretanto, o importante para o mercado financeiro não é o valor histórico da variância, mas sim aquele que se espera prevaleça no futuro, o qual não pode ser estimado apropriadamente simplesmente mediante o conhecimento do valor histórico. Desta forma, a variância em t pode estar ou não condicionada às informações passadas. Em outras palavras, a variância não condicional pode ser constante, mas para certos períodos de grande incerteza a variância condicional pode apresentar grandes alterações por curtos períodos de tempo.

Há diferentes métodos paramétricos para estimar a variância dos retornos com o objetivo de se substituir a hipótese de que esta seja constante ao longo do tempo. Tem-se, por exemplo, os modelos de volatilidade determinística e os modelos de volatilidade estocástica. Um terceiro método, não-paramétrico, seria a determinação da volatilidade com o uso de redes neurais.¹

A primeira abordagem assume que as variações no retorno dos ativos são determinadas por variáveis conhecidas pelos participantes do mercado, tal como seu nível de preços. No caso do segundo método, o conhecimento do preço no passado dos ativos não é suficiente para determinar a volatilidade quando são utilizadas observações de preços discretas.

Na classe dos modelos de especificação da volatilidade determinística, que utilizam da informação de preços passados para atualizar seu valor para o ativo corrente,

1 Para uma análise de outros métodos não-paramétricos para modelar a variância dos retornos ver PAGAN & SCHWERT (1990).

pode-se enumerar os modelos da família ARCH - *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*.² Na especificação ARCH várias hipóteses podem ser feitas em relação aos retornos. Podemos assumir que a distribuição é normal ou não-normal, introduzir a influência de variáveis exógenas, tais como o volume de negociação do ativo, verificar a interferência da volatilidade na determinação dos retornos (modelo ARCH-M) ou ainda a confirmação da existência dos fatos estilizados.³

Nos modelos de volatilidade estocástica, a hipótese da distribuição normal dos retornos também pode ser relaxada, sendo também possível fazer testes para a verificação da influência dos fatos estilizados. Nestes modelos, tanto o retorno dos ativos quanto a sua variância são variáveis no tempo. A principal diferença em relação aos modelos determinísticos está relacionada ao desconhecimento da informação passada, de forma que a volatilidade é vista como um componente não observável.

O objetivo deste artigo é comparar estas duas formas diferentes de modelagem da volatilidade (determinística e estocástica), com o uso do IBOVESPA. O IBOVESPA é um ativo altamente volátil e que sofre, constantemente, a influência de variáveis exógenas (crises, boatos) que não estão ligadas diretamente à sua estrutura, mas que influenciam na oscilação de seus retornos.

Vários trabalhos empíricos foram feitos utilizando séries financeiras brasileiras com o objetivo de verificar o comportamento dos quatro primeiros momentos dos retornos e comprovar a existência dos fatos estilizados. Herencia (1997) utiliza a série de retornos da Telebrás PN, Duarte e outros (1996) analisam a volatilidade das ações da Light ON, Telebrás PN e Vale do Rio Doce PN, Barcinski e outros (1997) estudam o comportamento de seis ações negociadas na Bovespa, Eletrobrás ON e PN, Petrobrás PN, Telebrás ON e PN e Vale do Rio Doce PN, e Ziegelmann e Pereira (1997) utilizam modelos de volatilidade estocástica com e sem deformação temporal para estimar a volatilidade dos retornos do IBOVESPA.

Os modelos aqui utilizados serão comparados de duas maneiras. Primeiro em relação aos critérios de comparação estatísticos dentro da amostra, tais como o de Akaike e Schwarz, e depois em relação ao melhor ajuste da previsão um passo à

2 Para uma descrição de outros estimadores, entre os quais o estimador de média móvel com amortecimento exponencial (EMMAE) e os estimadores de valores extremos (EVE), ver DUARTE *et alii* (1996).

3 Para uma discussão sobre as diferentes distribuições dos retornos ver HERENCIA (1997). Para o uso de variáveis exógenas ver LAMOUREUX & LASTRAPES (1990), e para a discussão dos modelos ARCH-M ver ENGLE *et alii* (1987).

frente para um período de 21 dias, por meio da análise das estatísticas de erro. Os modelos são estimados e testados para o comportamento da volatilidade do índice durante o período de 4/7/94 a 9/10/98 (dados diários), perfazendo um total de 1060 observações. Este período foi escolhido com o objetivo de estudar como os agentes financeiros passaram a agir ante um novo cenário econômico que se colocou para as empresas com ações negociadas na Bovespa. Embora ainda existam resíduos inflacionários no início da amostra, a escolha do mês de julho como ponto de partida para a análise tem o apelo de analisar apenas o período do Plano Real.

A primeira seção é destinada à descrição dos modelos que são utilizados neste trabalho. Serão introduzidos os modelos de volatilidade determinística da família ARCH e os de volatilidade estocástica, bem como uma discussão técnica sobre os estimadores utilizados e as equações que envolvem cada modelo. Na segunda seção é feita uma revisão bibliográfica da literatura empírica acerca do assunto. O objetivo desta seção é ilustrar como são utilizados os modelos da família ARCH e de volatilidade estocástica em séries financeiras estrangeiras e nacionais. Esta seção dá destaque maior às informações extraídas de cada estimação feita, tais como a aglomeração de volatilidade, a distribuição dos retornos, os testes para efeitos fim de semana e dia da semana, o efeito persistência e *leverage*, e quais foram as estatísticas utilizadas para se comparar estes modelos. A terceira seção trata da análise e comparação empírica dos modelos descritos na seção 1, com relação ao índice Bovespa. O objetivo aqui é mostrar como estes modelos se adequam ao IBOVESPA e como eles são capazes de reproduzir as características presentes nas séries financeiras.⁴ Por fim, a última seção é dedicada às conclusões sobre os resultados encontrados, comparando-os com os obtidos na literatura.

1. MODELOS DE VOLATILIDADE DETERMINÍSTICA E ESTOCÁSTICA

Na primeira parte desta seção são descritos os modelos de volatilidade determinística (GARCH, EGARCH, GJR e GARCH-t).⁵ Na segunda parte são descritos os modelos de volatilidade estocástica bem como seu processo de estimação via filtro de Kalman.⁶ Nosso objetivo aqui é mostrar as equações e os

4 Para estimação dos modelos determinísticos é utilizado o Software Rats 4.0. Para os modelos estocásticos é utilizado o Stamp 5.0.

5 Para uma discussão técnica destes modelos ver BOLLERSLEV (1986) para o GARCH, NELSON (1991) para o EGARCH, GLOSTEN *et alii* (1993) para o GJR e BOLLERSLEV (1987) para o GARCH-t.

6 Sobre o Filtro de Kalman e modelos de componentes não observáveis ver HARVEY (1996).

pressupostos envolvidos em cada modelo, bem como seus estimadores, dando destaque para os diferentes objetivos que estes processos de estimação propõem para modelar os diversos efeitos presentes em séries de ativos financeiros.

1.1 Modelos de Volatilidade Determinística

As séries financeiras, assim como as demais séries econômicas são, em sua maioria, não-estacionárias. Além disso, as séries financeiras não-estacionárias parecem, em sua maior parte, com um *random walk*, o que implica um alto grau de persistência a choques e uma volatilidade não condicional variante no tempo (característica de heterocedasticidade).

Podemos dizer, então, que para explicar estes fenômenos estatísticos as séries teriam uma tendência linear ou não-linear. No primeiro caso é dito que a autocorrelação existente nos retornos pode estar sendo causada por efeitos do tipo dias da semana, dias de não negociação, ou ainda pelo fraco volume de negociação do ativo (baixa liquidez) mas, mesmo assim, pode ser estacionária. Por outro lado, a tendência não-linear pode ser explicada pela mudança na volatilidade dos retornos e a existência de alto nível de curtose em sua distribuição.

1.1.1 Modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*)

Engle (1982) propôs a modelagem de um processo que permita que o primeiro e o segundo momentos do retorno de um ativo $\{R_t\}$ dependa de valores passados, tal como no modelo

$$\begin{aligned} \varepsilon_t / \psi_{t-1} &\sim N(0, h_t) \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \\ \varepsilon_t &= R_t - x_t b \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde ψ_{t-1} é toda a informação observada até $t-1$, $x_t b$ é a média de $\{R_t\}$, onde x_t pode incluir variáveis exógenas e dependentes defasadas. Para que a variância seja não negativa é assumido que $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_i \geq 0, i=1, \dots, q$ com $q > 0$. O processo é estacionário em covariância se $Var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i}$.

Seja f a densidade condicional e n o número de observações. A densidade conjunta é o produto de todas as densidades condicionais, e o log da verossimilhança é dado pela soma do log da verossimilhança normal condicional. Seja o log da verossimilhança médio dado por:

$$l = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n l_t \quad (1.2)$$

onde l_t é o log da t -ésima observação da função de verossimilhança. Então:

$$l_t = -\frac{1}{2} \left[\log(h_t) + \frac{R_t^2}{h_t} \right] \quad (1.3)$$

Dados os valores de R_t e os valores iniciais R , ε e h , tem-se que a maximização da função de verossimilhança fornece os parâmetros do modelo. Para amostras grandes, os valores iniciais escolhidos não são críticos. A estimação se dá de forma iterativa por meio da equação (1.1),⁷ e a solução requer algum tipo de algoritmo de procura.

1.1.2 Modelo GARCH (*General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*)

Uma generalização natural dos modelos ARCH foi proposta por Bollerslev (1986), e ficou conhecida como GARCH. Como em muitas aplicações é requerido que o modelo ARCH apresente muitos *lags* (q), os modelos GARCH estendem a formulação ARCH no sentido de que aquele permite uma memória mais longa, e uma estrutura de defasagens para a variância mais flexível. Estes modelos também podem ser utilizados para entender a relação entre a volatilidade e os retornos esperados. O modelo passa a ser dado por:

$$\varepsilon_t / \psi_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} = \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)h_t \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_t = R_t - x_t' b$$

7 Com esta maximização pode ser obtido um máximo global ou o máximo local. Neste sentido, é necessário cuidado em identificar o processo a ser estimado.

onde as restrições são agora dadas por; $q > 0$, $p \geq 0$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, ($i = 1, \dots, q$), e $\beta_i \geq 0$, ($i = 1, \dots, p$). Se $p = 0$, o modelo se reduz a um ARCH(q) e se $p = q = 0$, então ε_t é um ruído branco. Para que o processo seja bem definido é requerido

também que $h_t = \frac{\alpha(L)\varepsilon_t^2}{1 - \beta(L)}$ seja não negativo, e que as raízes do polinômio $\beta(L) = 1$ estejam fora do círculo unitário.

Caso $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, então existe persistência a choques na volatilidade, de modo que se passa a ter um modelo GARCH integrado, ou IGARCH.⁸

No modelo IGARCH(1,1) é usada a restrição $\alpha_1 + \beta_1 = 1$. Fazendo $\alpha_1 + \beta_1 = \gamma$ temos:

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + (\gamma - \alpha_1) h_{t-1} \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1}^2 - h_{t-1}) + \gamma h_{t-1} \\ h_t &= \frac{\alpha_0}{1 - \gamma} + \frac{\alpha_1 (\varepsilon_{t-1}^2 - h_{t-1})}{1 - \gamma} \quad \text{usando } L = 1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde: se $\gamma \rightarrow 1$, então h_t não está definido, ou seja, a variância condicional tem persistência infinita. Esta persistência pode ser interpretada de duas maneiras na literatura de finanças: como resultado de uma tendência na variância, ou como uma mudança estrutural nesta tendência da variância. Da mesma forma que a partir de um MA(∞) é obtido um AR(1), partindo de um GARCH(1,1) é encontrado um ARCH(∞).

1.1.3 Modelo GARCH-t (*distribuição t-Student*)

Seja a distribuição condicional do retorno do ativo $\{R_t\}$, $t = 1, \dots, T$ padronizada como t-Student com média $R_{t/t-1}$ e variância $h_{t/t-1}$ e v graus de liberdade. Assim, temos que:

$$\varepsilon_t / \psi_{t-1} \sim f_v(\varepsilon_t / \psi_{t-1}) \quad (1.6)$$

onde $f_v(\cdot)$ é a função de densidade condicional para ε_t , que é da forma:

⁸ Ver ENGLE & BOLLERSLEV (1986) e NELSON (1990a) e (1990b).

$$f_v(\varepsilon_t / \psi_{t-1}) = \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1} ((\nu-2)h_{t/t-1}) \times (1 + \varepsilon_t^2 (h_{t/t-1}^{-1})) (\nu-2)^{-1} \frac{-(\nu+1)}{2} \quad (1.7)$$

com $\nu > 2$ e Γ sendo uma função gamma.⁹

Pela decomposição do erro de previsão a função log-verossimilhança para a amostra R_1, \dots, R_T é dada por:

$$L_t(\phi) = \sum_{t=1}^T \log f_v(\varepsilon_t / \psi_{t-1}) \quad (1.8)$$

Portanto, maximizando a função de verossimilhança (1.8), onde:

$$\begin{aligned} \ln f_v(\cdot) = & \ln \Gamma(0,5(\nu+1)) - \ln \Gamma(0,5\nu) - 0,5 \ln(\nu-2) - 0,5 \ln(h_t) - \\ & - 0,5(\nu+1) \ln\left(1 + \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t}\right)(\nu-2)\right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

são obtidos os parâmetros do modelo. O modelo GARCH(1,1)-t é então da forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_t / \psi_{t-1} & \sim f_v(\varepsilon_t / \psi_{t-1}) \\ h_t & = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \\ \varepsilon_t & = R_t - x_t' b \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.1.4 Modelo EGARCH (*Exponential GARCH*)

A correlação entre os retornos das ações e as mudanças na sua volatilidade pode ser negativa, pois é observado que as más notícias aumentam a volatilidade, enquanto que as boas notícias a diminuem. Nelson (1991) propôs um modelo não-linear alternativo, o EGARCH, que é da forma

⁹ Ver JAMES (1996).

$$\begin{aligned} \varepsilon_t / \psi_{t-1} &\sim N(0, h_t) \\ \log(h_t) &= \omega + \beta \log(h_{t-1}) + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + \alpha \left[\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{h_{t-1}}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\varepsilon_t = R_t - x_t' b$$

Neste modelo, incluindo o choque padrão (ε_{t-1}) e o seu valor absoluto, é dada maior flexibilidade à equação da variância, permitindo que ela capture alguma assimetria na relação entre retornos de mercado e a volatilidade condicional. O modelo é assimétrico devido à existência do coeficiente γ , que capta o efeito *leverage*.

Uma outra diferença entre os modelos GARCH e EGARCH é que neste último grandes erros provocam maiores impactos na volatilidade do que nos modelos GARCH, sejam eles de valores positivos ou negativos, como pode ser notado pelo termo $|\varepsilon_{t-1}|$.

1.1.5 Modelo GJR

Uma outra especificação muito utilizada na literatura para captar o efeito assimetria (modelo GJR) foi proposta por Glosten, Runkle e Jagannathan (1993) e pode ser descrita como

$$\begin{aligned} \varepsilon_t / \psi_{t-1} &\sim N(0, h_t) \\ h_t &= \omega + \beta h_{t-1} + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1}^2 \\ \varepsilon_t &= R_t - x_t' b \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$S_t^- = \begin{cases} 1 & \text{se } \varepsilon_t < 0 \\ 0 & \text{se } \varepsilon_t \geq 0 \end{cases}$$

Logo, quando $\gamma > 0$ captura-se o efeito *leverage* e com $\gamma = 0$, o modelo GJR(1,1) reduz-se a um GARCH(1,1). Neste sentido, o modelo GARCH é “aninhado” ao modelo GJR.

Assim sendo, os três últimos modelos descritos nesta seção são capazes de captar três tipos de características comuns em séries financeiras de dados diários: as caudas “mais cheias” da distribuição dos retornos devido à variação da volatilidade no tempo, o efeito assimetria resultante da não estacionaridade da média e, por fim, a aglomeração das variações dos retornos.

2.2 Modelos de Volatilidade Estocástica

As mudanças na variância que ocorrem no tempo podem também ser especificadas por meio de modelos com volatilidade estocástica, onde a volatilidade é tratada como uma variável não observável. Dada a diferença de modelagem entre os casos estocásticos e determinísticos, fica difícil a comparação entre elas, pois o verdadeiro processo gerador de dados (DGP) é desconhecido. Os modelos de volatilidade estocástica são não gaussianos, e sua estimação e controle estatísticos podem apresentar algumas dificuldades.¹⁰

Para a estimação da volatilidade considere os retornos como sendo dados por

$$R_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim NID(0,1) \quad (1.13)$$

Elevando ao quadrado, e extraíndo o log, obtemos uma expressão linear da forma

$$\log(R_t^2) = \log(\sigma_t^2) + \log(\varepsilon_t^2) \quad (1.14)$$

onde $\log(\varepsilon_t^2)$ tem distribuição log-normal com média $-1,27$ e variância $\pi^2/2$.¹¹

Suponha agora que ξ_t seja um processo de inovação dado por:

$$\xi_t = \log(\varepsilon_t^2) - E[\log(\varepsilon_t^2)] \quad (1.15)$$

onde $E(\xi_t) = 0$ e $VAR(\xi_t) = \pi^2/2$. Mas, como

$$E[\log(\varepsilon_t^2)] = -1,27 \quad (1.16)$$

temos que

$$\log(\varepsilon_t^2) = \xi_t - 1,27 \quad (1.17)$$

¹⁰ Ver HAMILTON (1994).

¹¹ Para uma explicação das propriedades da função log-normal consultar RUIZ (1994).

Substituindo (1.16) em (1.14) temos:

$$\log(R_t^2) = -1,27 + \log(\sigma_t^2) + \xi_t \quad (1.18)$$

Adotando o processo auto-regressivo de primeira ordem estacionário e com *drift* (AR(1)-SV) na forma logarítmica para descrever a trajetória da variância condicional temos:

$$\log(\sigma_t^2) = \delta + \gamma \log(\sigma_{t-1}^2) + \eta_t \quad \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (1.19)$$

e associando com a equação (1.18) temos o modelo no formato espaço de estados

$$\begin{aligned} \log(R_t^2) &= -1,27 + \log(\sigma_t^2) + \xi_t & \xi_t &\sim ID(0, \sigma_\xi^2) \\ \log(\sigma_t^2) &= \delta + \gamma \log(\sigma_{t-1}^2) + \eta_t & \eta_t &\sim NID(0, \sigma_\eta^2) \end{aligned} \quad (1.20)$$

onde $\log(\sigma_t^2)$ é um componente não observável, ξ_t e η_t são independentes, γ, σ_ξ^2 e σ_η^2 são os hiperparâmetros com $|\gamma| < 1$. O caso não estacionário pode ser obtido quando $\delta=0$ e $\gamma=1$. Em 1.20 a primeira equação é a equação de medida, enquanto que a segunda é a equação de transição.¹²

O processo de estimação da volatilidade estocástica feito neste trabalho compreende os seguintes 4 passos. Em primeiro lugar, é estimado por OLS (mínimos quadrados ordinários) o modelo

$$R_t = \rho_1 R_{t-1} + \rho_2 R_{t-2} + \alpha_1 D1 + \alpha_2 D2 + o_t \quad (1.21)$$

onde R_t é o retorno do ativo no período t , ρ_1, ρ_2, α_1 e α_2 os coeficientes, D1 e D2 *dummies* de *outliers* e o_t o resíduo da regressão (1.21).

12 O modelo pode ser um AR(1)-SV, onde os retornos são dados por: $R_t = \rho R_{t-1} + \omega_t$, com ω_t sendo o resíduo, ou ainda um AR(2)-SV da forma; $R_{t-1} = \rho_1 R_{t-1} + \rho_2 R_{t-2} + \vartheta_t$, onde ϑ_t é o resíduo.

13 Para um exemplo das propriedades deste modelo, ver HERENCIA (1997).

Estes resíduos são da forma

$$o_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim IID(0,1) \quad (1.22)$$

Em seguida, para modelarmos o componente não observável, a variância de o_t , dada por σ_t^2 , é utilizado o seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned} \log(o_t^2) &= -1,27 + \log(\sigma_t^2) + \xi_t & \xi_t &\sim ID(0, \sigma_\xi^2) \\ \log(\sigma_t^2) &= \gamma \log(\sigma_{t-1}^2) + \eta_t & \eta_t &\sim NID(0, \sigma_\eta^2) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Adotando $Y_t = \log(o_t^2)$ e $h_t = \log(\sigma_t^2)$, o formato espaço de estados de (1.23) para o caso estacionário é

$$\begin{aligned} Y_t &= N_t + h_t + \xi_t \\ N_t &= N_{t-1} = N \\ h_t &= \gamma h_{t-1} + \eta_t \end{aligned} \quad (1.24)$$

onde N_t é um nível fixo.¹³ No caso do modelo não-estacionário, $N_t=0$ e $\gamma = 1$.

Além dos hiperparâmetros γ, σ_ξ^2 e σ_η^2 , onde γ é a persistência, são obtidas as estimativas de h_t filtradas e suavizadas. Por fim, para determinar a variância do erro da equação (1.21), é utilizado o conjunto de equações

$$\begin{aligned} Vol_{t,f} &= \exp(N_t + 1,27 + h_{t,f}) \\ Vol_{t,s} &= \exp(N_t + 1,27 + h_{t,s}) \end{aligned} \quad (1.25)$$

onde $Vol_{t,f}$ é a volatilidade filtrada no tempo t , $Vol_{t,s}$ é a volatilidade suavizada, $h_{t,f}$ é o componente auto-regressivo filtrado e $h_{t,s}$ o suavizado.

14 Assumindo que o componente irregular ξ_t em 1.23 é aproximado por uma distribuição normal, a verossimilhança é aproximada e então a estimativa é feita por quasi-máxima verossimilhança. Ver RUIZ (1994).

Vários são os métodos utilizados para estimar modelos estocásticos. O que será aqui adotado é o método de quasi-máxima verossimilhança¹⁴ baseado no Filtro de Kalman. A verossimilhança concentrada é calculada por meio da decomposição do erro de previsão, como:

$$\log L(\phi) = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum \log(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log|f_t| - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \frac{v_t^2}{f_t} \quad (1.26)$$

onde v_t é o erro de previsão e f_t um hiperparâmetro, ambos provenientes do Filtro de Kalman. Para obter os parâmetros do modelo são dados valores iniciais para σ_ξ^2 e σ_η^2 , que determinam os máximos de $\log L(\phi)$. A vantagem na utilização do Filtro de Kalman é que a variância pode ser estimada de forma filtrada e suavizada.¹⁵

Os “efeitos dias da semana”, “fim de semana”, *leverage* e a persistência podem ser testados nos modelos de volatilidade estocástica. Intervenções são feitas com o objetivo de captar mudanças estruturais abruptas na volatilidade, ou eliminar a interferência dos *outliers*.

A forma de comparar os modelos de volatilidade estocástica e determinística é por meio da construção de intervalos de confiança para as previsões um passo à frente dos retornos. Neste caso, será preferível o modelo que apresente um menor comprimento do intervalo e tiver o maior número de retornos incluídos neste intervalo.¹⁶ Pode ainda ser adotada uma série de variância qualquer como referência, *benchmark*, e então compará-la com as volatilidades obtidas.

15 A hipótese de que os erros σ_t seguem uma distribuição t-Student é aplicada aos modelos estocásticos fazendo uso da função Digamma $\psi(\cdot)$ e Trigamma $\psi'(\cdot)$. Para maiores detalhes ver HERENCIA (1997).

16 Para um exemplo desta aplicação ver HERENCIA (1997).

2. APLICAÇÕES DOS MODELOS DE ESTIMATIVA DA VOLATILIDADE

Nesta seção são discutidos vários resultados existentes na literatura que apresentam os fatos estilizados das séries financeiras, tais como o “efeito calendário”, a persistência, aglomeração da volatilidade e o efeito *leverage*. Apresentamos ainda uma comparação empírica entre os modelos de volatilidade estocástica e determinística.

2.1 O Efeito Calendário

Gibbons e Hess (1981) aborda o “efeito dia da semana” para os dados diários da série do índice S&P-500 e o portfólio construído pelo *Center for Research in Security Prices*, entre 1962 e 1978, testando o modelo

$$R_{it} = \alpha_{1i}D_{1t} + \dots + \alpha_{5i}D_{5t} + \varepsilon_{it} \quad (2.1)$$

onde $D_{1,t} = 1$ é uma *dummy* para segunda-feira, $D_{2,t} = 1$ a *dummy* de terça-feira e assim por diante, até sexta-feira. A hipótese de igualdade entre os coeficientes $\alpha_{1,i} = \dots = \alpha_{5,i}$ foi rejeitada, sendo que os dias que mais contribuíram para a rejeição desta igualdade foram quarta e sexta-feira.

Noh e outros (1994), usando opções de compra e venda do S&P-500 entre 1986-1991, encontraram diferença de volatilidade entre a segunda (27,84%) e a terça-feira (16,33%). Para evidenciar esta característica, a proposta foi criar uma variável η_t que captasse este efeito, tendo valor 1 para dias normais e 3 para a segunda, pois a segunda-feira é precedida por 2 dias de não negociação. No caso de um feriado na segunda, então $\eta_t = 4$ na terça-feira.

Um coeficiente δ foi colocado como parâmetro a ser estimado pelo modelo para testar se o efeito “dias de não negociação” é completamente repassado, onde η_t^δ significa que apenas uma fração desses efeitos tivesse ação direta. Com $\delta = 1$ há total repasse dos efeitos de dias de não negociação. Assim, a equação de variância utilizada foi

$$\frac{h_t}{\eta_t^\delta} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{\varepsilon_{t-1}^2}{\eta_{t-1}^\delta} + \beta_1 \frac{h_{t-1}}{\eta_{t-1}^\delta} \quad (2.2)$$

onde o parâmetro δ encontrado (0,253) foi estatisticamente significativo, indicando a existência do efeito dias de não negociação.

Akgiray (1989), com dados diários do índice CRSP-VW entre 1963-1986, estimou a equação

$$R_t = \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1} + \alpha_2 D + \eta_t \quad (2.3)$$

por OLS, onde D era a *dummy* de segunda-feira e R_t é o retorno, não encontrando efeito fim de semana, pois a *dummy* colocada na segunda-feira foi estatisticamente não significativa.

Herencia (1997) encontrou efeito dia da semana para uma série de ações. A modelagem da equação da média dos retornos é feita como em (2.1) adicionando ρR_{t-1} . Para a série do Ibovespa, Correa (1998) também encontrou efeito dia da semana.

2.2 Persistência

Como mostrado na seção 1, a persistência capturada pelos modelos determinísticos e estocásticos é obtida de forma distinta. Para quantificar o grau de influência da persistência da volatilidade nos retornos podemos calcular a meia vida.¹⁷

Pagan e Schwert (1990) encontraram uma meia vida de 0,793 para um GARCH(1,2), e 0,747 para um EGARCH(1,3). Herencia (1997), para a série Telebrás PN, encontrou 0,9967 com o modelo GARCH(1,1) e 0,9656 nos modelos AR(1) de volatilidade estocástica.

Galvão, Portugal e Ribeiro (1997) encontraram persistência baixa para o Ibovespa no mercado à vista (0,8951) e para o mercado futuro (0,965), enquanto que na série da taxa de câmbio comercial obtiveram 0,894.

Quando a persistência é alta, a alternativa proposta é adotar o modelo IGARCH para o caso determinístico (persistência infinita), e um modelo não-estacionário para o caso estocástico.¹⁸

Bustamante e Fernandes (1995) utilizam modelos IGARCH(1,1) para 5 séries brasileiras: a taxa de inflação mensal (IGP-DI), a taxa de juros (CDI-over) diária, a taxa de câmbio (dólar paralelo), e os índices Ibovespa e FGV-100. Para a taxa de câmbio foi encontrada persistência e uma meia vida de 7 dias, sendo que o melhor

17 A meia vida (δ) revela o tempo necessário para que o efeito de um choque na variância condicional seja reduzido à metade.

18 Para uma aplicação do caso não estacionário em modelos estocásticos, ver HERENCIA (1997).

modelo encontrado foi o ARIMA(2,1,2)-IGARCH(1,1). A taxa de juros teve pouca persistência e uma meia vida de 25 dias, por meio do modelo ARIMA(2,1,0)-IGARCH(1,1). A taxa de inflação teve a especificação ARIMA(2,2,0)-IGARCH(1,1) com grande persistência, que conduziu a uma meia vida de 4 meses. No caso dos índices de ações, foi escolhido o modelo ARIMA(2,1,0)-IGARCH(1,1) para o FGV-100, com meia vida de 8 dias, e um ARIMA(1,1,0)-GARCH(1,1) para o Ibovespa, gerando uma meia vida de 10 dias.

2.3 Aglomeração na Volatilidade e o Efeito Leverage

O modelo EGARCH revela a aglomeração da volatilidade por meio do termo α da equação 1.11. É esperado que este valor seja positivo, como encontrado por Kim e Kon (1994), Hagerud (1997), Pagan e Schwert (1990) e Herencia (1997).

O efeito *leverage* é captado pelo coeficiente γ , nos modelos EGARCH e GJR, sendo que no primeiro ele é negativo e no segundo é positivo.

Kim e Kon (1994) confirmaram a existência do efeito *leverage* nos modelos ARMA(2,1)-EGARCH(1,3)-M e GJR(1,3)-M. Braun e outros (1995), com um modelo EGARCH bivariado, encontraram evidência deste efeito na equação que modela o comportamento do mercado e do portfólio. Os resultados de Herencia (1997) também vão neste sentido.

2.4 Comparação entre os Diferentes Modelos e Quebra Estrutural

Nesta seção são discutidos os diferentes modelos, estocásticos e determinísticos, que foram utilizados na literatura aplicada para estimar a volatilidade de ativos brasileiros e estrangeiros. É apresentado também a forma de comparação adotada para selecionar o melhor modelo e como foram resolvidos os problemas de mudanças estruturais nas séries.

Kim e Kon (1994) estimaram os modelos AR(1)-ARCH(q), encontrando que a constante da equação da variância condicional foi positiva. O menor modelo obtido foi um ARCH(2). O AR(1)-GARCH(1,1) adaptou-se melhor aos dados do que os seus similares da classe GARCH(q,p). Comparando os modelos GARCH(1,1) e ARCH(2),

19 O modelo T-GARCH (Threshold Heteroscedastic models) pode ser encontrado em ZACOÏAN (1994), o A-PARCH (Asymmetric Power ARCH) em DING, GRANGER & ENGLE (1993), o GQARCH (Generalized Quadratic ARCH) em SENTANA (1995), o VS-ARCH (Volatility Switching ARCH) em FORNARI & NELE (1996), e o LSTGARCH (Logistic Smooth Transition GARCH(1,1)) em HAGERUD (1996), onde, pelos resultados encontrados aqui, o autor conclui que o modelo GJR é uma boa aproximação do LSTGARCH.

por meio das estatísticas do erro médio (ME), erro quadrático médio (RMSE), erro absoluto médio (MAE), erro médio absoluto porcentual (MAPE) e pelo log da verossimilhança, conclui-se que o primeiro prevê muito melhor, mesmo que nenhuma das previsões tenha tido a performance desejada. Estes dois modelos foram ainda comparados com o EWMA (*exponentially weighted moving average*) e o modelo de estimação da volatilidade histórica, sendo este último adotado como *benchmark*.

Hagerud (1997) compara sete modelos (EGARCH, GJR, T-GARCH, A-PARCH, GQARCH, VS-ARCH e LSTGARCH)¹⁹ para o retorno diário de 45 ações da Bolsa de Valores de Helsinque, Estocolmo, Oslo e Copenhague. A equação da média foi estimada por meio de um AR(1). O modelo GARCH(1,1) é comparado aos demais na previsão da variância condicional utilizando como critérios de seleção o valor da função de verossimilhança e o critério de Schwarz. O máximo da função de verossimilhança, como esperado, foi maior para modelos com mais parâmetros, tais como o APARCH e o LSTGARCH. Os modelos que minimizaram o critério de Schwarz um maior número de vezes foram o GJR e o TGARCH.

Há diferentes formas de identificar as quebras estruturais. Uma delas seria acompanhar a série de dados e, por meio da estatística do teste de Chow, determinar quando houve a quebra estrutural, fazendo então a devida intervenção.

Uma maneira alternativa de determinar a mudança de regime foi proposta por Hamilton e Susmel (1994), usando a série de preços de um portfólio de ações da NYSE, com retornos dados entre a quarta-feira de uma semana e a quinta da próxima. Suponha que há q estados ou regimes condicionados ao modelo ARCH(q). Se o agente espera que $S_t = 1$, e o resíduo obtido da previsão for pequeno, então continua a atribuir $S_t = 1$, não havendo mudança de regime. Mas se o resíduo for grande, os agentes mudam de regime, passando agora a atribuir $S_t = 2$.

Os resíduos obtidos a cada momento são ponderados pela constante $\sqrt{\mathcal{G}_{S_t}}$, tal que se o processo está em $S_t = 1$, então temos $\sqrt{\mathcal{G}_1}$, em $S_t = 2$ usa-se $\sqrt{\mathcal{G}_2}$, e assim por diante. Portanto, a modelagem da mudança no regime é feita por meio da mudança na escala do processo. Na equação da média foi utilizado um AR(1), sendo a comparação feita com a variância amostral. As estatísticas utilizadas para comparação foram o log da verossimilhança e os critérios de Akaike e Schwarz. No caso da previsão foram utilizadas as informações obtidas do MSE, MAE, $[LE]^2$ e $\frac{1}{2}LE^{1/2}$.²⁰ Foram estimados modelos com distribuição t-Student, gaussianos e com densidade GED (*Generalized Error Distribution*). Os modelos com distribuição t-Student apresentaram melhor performance do que os modelos gaussianos. O

20 Onde $|LE|^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \{ \ln(\hat{u}_t^2) - \ln(\sigma_t^2) \}^2$, e $|LE| = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T | \ln(\hat{u}_t^2) - \ln(\sigma_t^2) |$.

modelo SWARCH(4,2) assimétrico e com 4 regimes foi o que melhor performance teve pelo critério AIC e nas estatísticas de erro de previsão MAE e MSE. Mas a probabilidade de mudança do regime 3 para o regime 4 foi quase zero. Sendo assim, o modelo SWARCH(3,2) assimétrico foi preferido, tendo o melhor critério SBC.

Herencia (1997) compara os modelos de variância estocástica estimados via Filtro de Kalman, (AR(1)-SV) com o modelo GARCH(1,1), mediante a estimação pontual da volatilidade e a previsão um passo à frente. É utilizada a série de preços de fechamento da Telebrás-PN em dólar, e a taxa de câmbio do marco alemão em relação ao dólar no mercado futuro. Nos modelos do tipo GARCH para a série da Telebrás foram encontradas as especificações GARCH(1,2), EGARCH(2,2) e GARCH(1,1), todos com volatilidades estimadas próximas. Na série da taxa de câmbio foram escolhidos os modelos GARCH(1,1), GARCH(2,2) e EGARCH(2,0), sendo que o último apresentou uma volatilidade mais suave que os demais. Para o caso dos modelos de volatilidade estocástica foram estimados quatro modelos AR(1)-SV, estacionários e não-estacionários, para captar os efeitos dias da semana e feriados. Na comparação entre os modelos determinísticos e estocásticos são feitas 2 simulações. Uma que considera os modelos equivalentes e outra no qual eles são não equivalentes, sendo construídos intervalos de confiança para os retornos. A volatilidade dos modelos GARCH mostrou-se maior e houve similaridade entre o número de retornos dentro do intervalo construído. Portanto, não há conclusão acerca da superioridade de um modelo sobre o outro.

Ziegelmann e Pereira (1997) comparam sete modelos de volatilidade estocástica, no tempo discreto e contínuo para a série do Ibovespa. É incorporado à formulação original o conceito de deformação temporal na estimação da volatilidade. A idéia é captar as mudanças de informações no mercado com o uso do volume de negociação do ativo no dia anterior, uma defasagem dos retornos e o seu módulo, e uma variável que inclui os efeitos de dias sem negociação. Os modelos estocásticos com e sem deformação temporal são comparados via previsão da volatilidade um passo à frente, e a conclusão é que quanto maior a velocidade de variação do tempo operacional e o volume de negociação do dia anterior menor a persistência encontrada. Além disso, a volatilidade estimada com deformação temporal é mais errática do que a sem deformação no tempo discreto, e os retornos negativos no dia anterior conduzem a uma volatilidade maior do que retornos positivos.

3. ESTIMATIVAS DA VOLATILIDADE DO IBOVESPA

Nesta seção utilizamos dados diários coletados na BM&F e *Gazeta Mercantil* sobre o índice da Bolsa de Valores de São Paulo no período após a implementação do

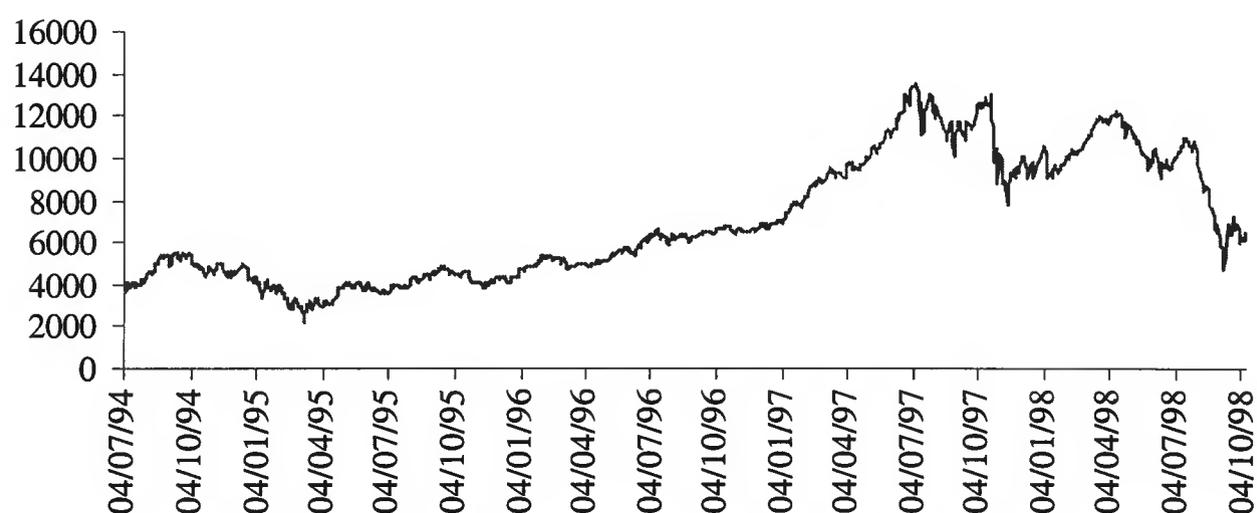
Plano Real, entre 4/6/94 e 9/10/98, para a análise dos modelos de previsão de variância condicional propostos.

Na subseção 3.1 são analisadas as características da série do Ibovespa. Na subseção 3.2 verificam-se os efeitos calendário e a variância. Na subseção 3.3 são escolhidas as equações da média dos retornos com o uso dos modelos de volatilidade determinística, são selecionados os melhores modelos (GARCH, EGARCH, GARCH-t e GJR) e comparadas suas estimativas de volatilidade. Na subseção 3.4 são comparados os modelos da seção anterior para previsão da variância 21 passos à frente. Na subseção 3.5 comparam-se diferentes modelos de volatilidade estocástica por meio dos critérios de informação e das estatísticas de previsão. Por fim, na subseção 3.6 são comparados os modelos de variância determinística e estocástica para previsão da volatilidade.

3.1 Características da Série do Ibovespa

A série em pontos do IBOVESPA apresentada no Gráfico 3.1 é claramente não-estacionária,²¹ apresentando fortes oscilações em determinados períodos, como dezembro de 1994 (crise do México), final de 1997 (crise da Ásia) e no quarto trimestre de 1998 (crise russa).²²

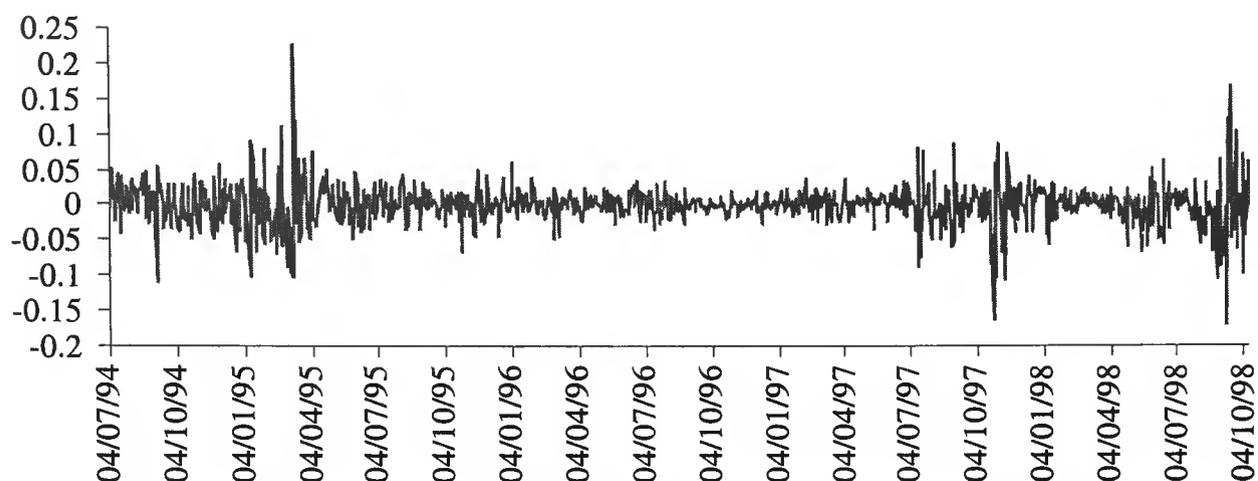
GRÁFICO 3.1 - SÉRIE DE PONTOS DO IBOVESPA DIÁRIO



21 Os testes de Dickey-Fuller e de Phillips-Perron, mostram que a série de retornos diários do Ibovespa é estacionária. Este resultado já era esperado, pois esta série nada mais é que a primeira diferença do log dos preços.

22 Os valores mínimos e máximos atingidos pelo Ibovespa neste período foram de 2138 (9/3/95) e 13617 (8/7/97).

GRÁFICO 3.2 - SÉRIE DE RETORNOS DO IBOVESPA DIÁRIO



Um índice de ações pode ser encarado como um ativo financeiro que é transacionado tanto no mercado à vista quanto no mercado futuro, sendo muitas vezes utilizado na composição de carteiras de investimento. Fazendo a primeira diferença do log do preço do ativo,

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (3.1)$$

onde R_t é o retorno no tempo t e P_t é o preço do ativo no tempo t (o valor do índice em pontos), temos uma série de retornos diários²³ que pode ser vista pelo Gráfico 3.2.

O valor máximo foi atingido em 10/3/95 e é caracterizado por um momento pós- crise mexicana. Este retorno máximo do Ibovespa coincide com o valor mínimo em pontos do Ibovespa (Gráfico 3.1). Já o valor mínimo de $-0,172292$ é atingido em 10/9/98. Além deste gráfico podemos também obter o gráfico do quadrado dos retornos (Gráfico 3.3), onde o valor máximo é atingido em 10/3/95. A partir da série de retornos diários é possível analisar a série de retornos semanais por meio do cálculo de

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-5}}\right) \quad (3.2)$$

23 Estes retornos também poderiam ser obtidos de forma discreta; $(P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$. Como comentado em CORREA *et alii* (1998), estas duas formulações podem gerar estatísticas diferentes. Apesar dos problemas apontados pelo autor, escolheu-se trabalhar com a aproximação logarítmica. NELSON (1991), RUIZ (1994), HERENCIA (1997) e BOLLERSLEV (1987) também utilizaram a equação 3.1 para obter os retornos.

onde são obtidas cinco séries diferentes, uma para cada dia da semana. A partir de então são calculadas as estatísticas das séries, apresentadas nas Tabelas 3.1 e 3.2.

GRÁFICO 3.3 - SÉRIE DO QUADRADO DOS RETORNOS DO IBOVESPA DIÁRIO

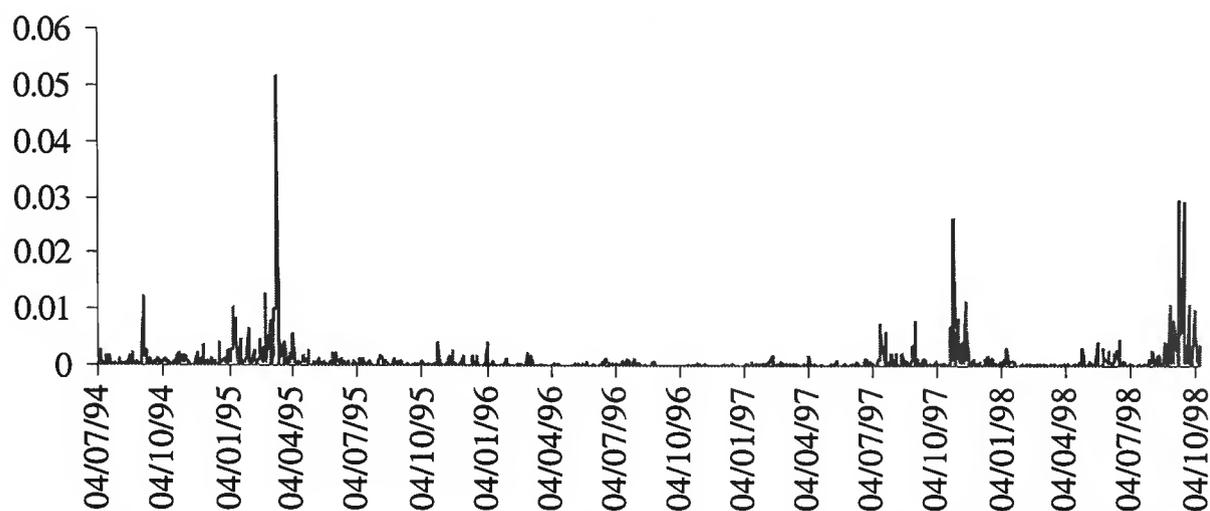


TABELA 3.1 - ESTATÍSTICAS PARA O IBOVESPA SEMANAL

Estatística/Período	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
Média Amostral	0.002648	0.002712	0.003238	0.002001	0.001747
Significância ^a	0.538154	0.517869	0.459505	0.670230	0.656560
Erro Padrão	0.063995	0.062396	0.065123	0.069938	0.058460
Assimetria ^b	0.000224	0.003254	0.016548	0.047032	0.000050
Curtose ^c	0.000205	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
Retorno Máximo	0.161253	0.252601	0.291045	0.384790	0.217420
Retorno Mínimo	-0.257820	-0.225684	-0.277260	-0.334970	-0.250580

Notas: a: Teste para Média = 0.

b: Teste para Assimetria = 0.

c: Teste para excesso de Curtose = 0.

TABELA 3.2 - ESTATÍSTICAS PARA O IBOVESPA DIÁRIO

Estatística/Período	Retorno Diário	(Retorno Diário) ²	Módulo do Retorno Diário
Média Amostral	0.0005728	0.0008811	0.0202032
Significância	0.530053	0.0000000	0.0000000
Erro Padrão	0.029693	0.0027232	0.0217589
Assimetria	0.162889	0.0000000	0.0000000
Curtose	0.000000	-----	0.0000000
Retorno Máximo	0.228125	0.0520414	0.2281259
Retorno Mínimo	-0.172292	0.0000000	0.0000000

Analisando estas tabelas pode-se observar que a média amostral dos retornos diários é bem menor do que no caso dos retornos semanais. Todas as séries apresentam problemas de normalidade, como constatado a partir das estatísticas de assimetria e curtose (a hipótese nula é de distribuição normal). A hipótese de assimetria é rejeitada para o caso da série de retornos diários apenas a 16%. Os retornos máximos e mínimos acontecem na quarta e na quinta.

Os altos valores da curtose (Tabelas 3.1 e 3.2) e a indicação de existência de aglomeração da variância (Gráfico 3.2) sugerem uma especificação ARCH. Analisando o Gráfico 3.2 podemos notar que existem alguns destes agrupamentos (*volatility clustering*) tal como sugerido na literatura de finanças, onde os altos retornos são seguidos por altos retornos, mas com maior influência no caso dos retornos negativos. Também pela Tabela 3.3 pode ser visto que a variância dos retornos não tem distribuição normal. Esta variância será adotada como *benchmark* neste trabalho.²⁴

GRÁFICO 3.4 - AUTOCORRELAÇÃO DOS RETORNOS

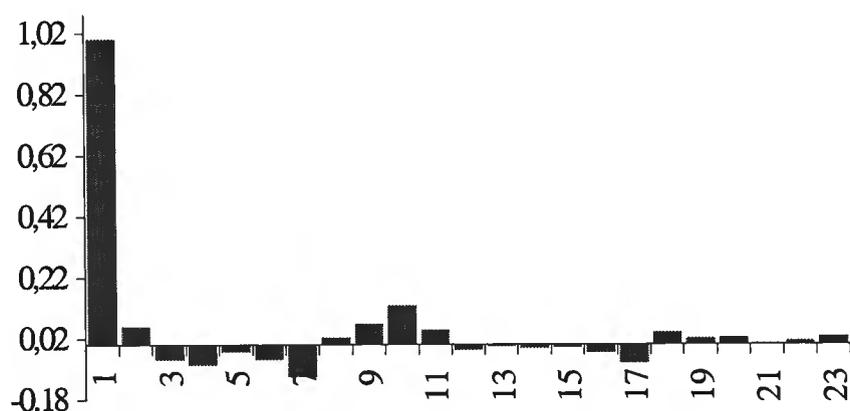
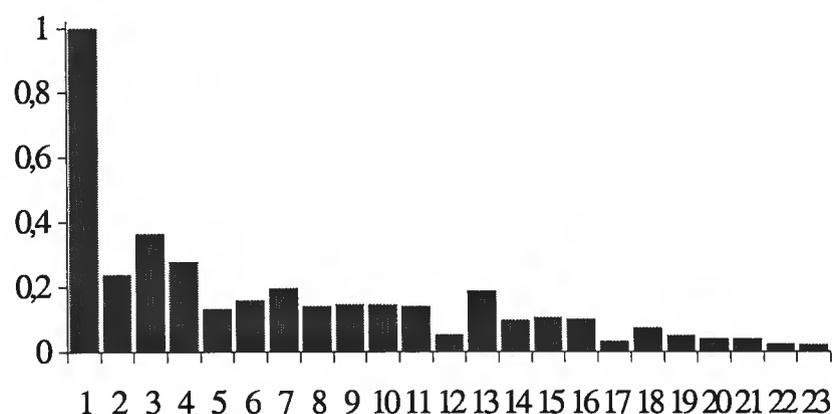


GRÁFICO 3.5 - AUTOCORRELAÇÃO DO QUADRADO DOS RETORNOS



24 Seguindo HERENCIA (1997) e PAGAN & SCHWERT (1990) foi feito o teste para variância finita, sendo comprovada a sua convergência.

A existência de períodos de alta volatilidade pode ser um indicativo da possibilidade de haver autocorrelação. Podem contribuir para a existência de autocorrelação de primeira ordem a existência de poucas negociações com determinada ação, a velocidade na qual a informação é absorvida pelos participantes do mercado, além dos efeitos dias da semana (mesmo que pequenos) que conduzem a uma estrutura de dependência linear. São realizados os testes de autocorrelação nos retornos semanais e diários (estatística Ljung-Box) com 12 defasagens.

Para os retornos semanais, os testes mostram que existe uma autocorrelação nas segundas, terças e quartas, mas não nas quintas e sextas. Há fortes indícios também de autocorrelação para os retornos diários e para o quadrado dos retornos. Os Gráficos 3.4 e 3.5 mostram as autocorrelações da série de retornos diários e de seu quadrado.

3.2 Efeitos Calendário e Variância

O Gráfico 3.2 revela a existência de picos nos retornos da série coincidindo com os 3 momentos de grande nervosismo no mercado financeiro (crise do México, crise da Ásia e moratória da Rússia). Como estes momentos atípicos podem ser vistos como *outliers*, são colocadas 2 *dummies* referentes a grandes retornos positivos e negativos.²⁵ A partir de então, estimando um modelo AR(2) com estas 2 *dummies* e uma *dummy* de terça-feira, o coeficiente desta última passa a ser significativo apenas a 8%, o que nos leva descartar, a princípio, a existência do efeito dia da semana.

A informação que desperta interesse é a variância dos retornos. Suas estatísticas podem ser vistas na Tabela 3.3, e o comportamento da variância no tempo pode ser observado no Gráfico 3.6. Como era esperado, os 2 momentos de maior variância da série coincidem com os dias de maior retorno. Os maiores valores da variância são atingidos em 14/3/95 (0,02079), 15/9/98 (0,01883) e 16/9/98 (0,01863). Para comprovar a existência do efeito calendário, como proposto na literatura, são feitos testes para os dias de não negociação e dias de semana. Utilizando-se uma *dummy* para cada dia da semana estimamos o modelo proposto por Gibbons e Hess (1981) (equação 2.1), para a série de retornos diários. O único coeficiente significativo foi o de terça-feira, como pode ser constatado pela equação abaixo

$$R_t = \underset{(0,002)}{-0,00212}D_{M,t} + \underset{(0,002)}{0,004066}D_{T,t} + \underset{(0,002)}{0,000617}D_{W,t} - \underset{(0,002)}{0,0028837}D_{Q,t} + \underset{(0,002)}{0,003035}D_{F,t} \quad (3.3)$$

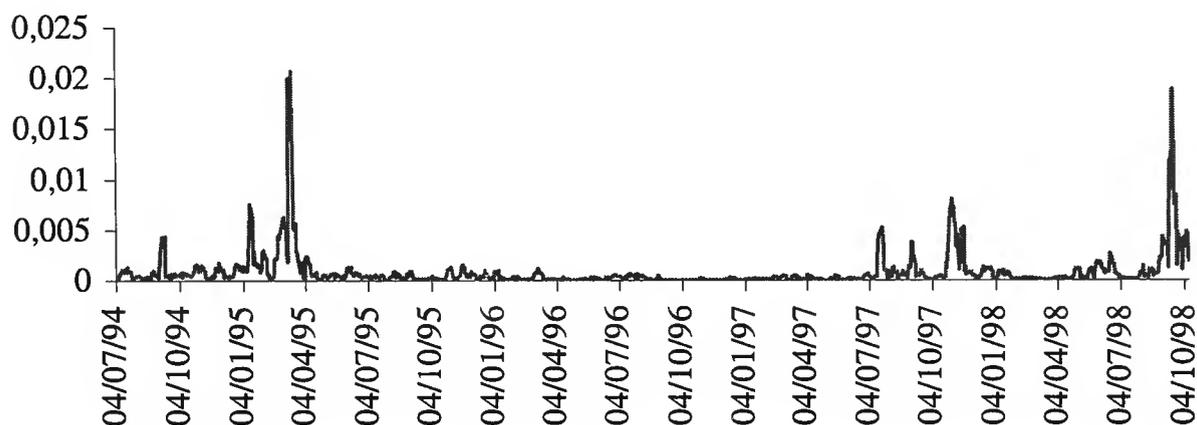
25 A variável *dummy1* corresponde aos dias 10/3/1995 e 15/9/1998, cujos retornos foram de 0,2281 e 0,1712, respectivamente, e a variável *dummy2* aos dias 27/10/1997 e 10/9/1998, com retornos de -0,1622 e -0,1723, respectivamente.

onde $D_{M,t}$ é a *dummy* de segunda-feira e assim por diante. Entre parênteses estão os desvios padrão.

TABELA 3.3 - ESTATÍSTICAS PARA A VARIÂNCIA DO IBOVESPA DIÁRIO

Estatística	Média Amostral	Significância	Erro padrão	Skewness	Curtose	Máximo	Mínimo
Variância	0,000884	0,0000	0,00192	0,0000	0,0000	0,020791	0,00000947

GRÁFICO 3.6 - VARIÂNCIA DOS RETORNOS DO IBOVESPA DIÁRIO BENCHMARK



3.3 Estimação para as Equações da Média e da Variância para Modelos Determinísticos

Na literatura aplicada a finanças é comum encontrar uma equação da média do tipo AR(1) para especificações da variância condicional. O modelo auto-regressivo encontrado após os testes que conduziram à eliminação dos coeficientes não significativos foi o AR(2) + *Dummy1* + *Dummy2*.²⁶

O teste LM foi realizado, e o resultado obtido para dez lags dos resíduos ao quadrado foi $\chi^2_{(10)} = 235,719$. Assim sendo, os resíduos encontrados da regressão do AR(2) para a série toda são não autocorrelacionados. Ademais, há evidência de

26 Mais à frente, na previsão, são testados modelos sem as *dummies* com o objetivo de verificar a capacidade dos modelos de absorver os *outliers*. O coeficiente auto-regressivo de ordem 2 foi confirmado mesmo quando é analisado um período de baixa oscilação dos retornos, entre 1/4/96 e 14/7/97.

erro ARCH quando é calculada a estatística $Q(\cdot)$ para o quadrado dos resíduos, onde é rejeitada a hipótese nula de existência de não-autocorrelação.²⁷

Após a escolha da estrutura da equação da média, o próximo passo é a escolha da equação da variância. Para fazermos esta escolha, são testados modelos com 4 defasagens para os componentes p e q da equação da variância. No modelo GARCH, a formulação escolhida é da forma

$$\begin{aligned} R_t &= 0,00218 + 0,0957R_{t-1} - 0,0891R_{t-2} - 0,1958D1 - 0,1944D2 \\ &\quad (0,000609) \quad (0,0301) \quad (0,0308) \quad (0,1143) \quad (0,0374) \\ h_t &= 0,000009384 + 0,1494\varepsilon_{t-1}^2 + 0,8483h_{t-1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Note-se que todos os coeficientes são significativos e que $\alpha_1 + \beta_1 = 0,9977$, indicando a existência de persistência a choques na variância. Esta persistência também é percebida, pois $\beta_1 > \alpha_1$. A meia vida desta persistência é de 9 meses.

Para analisar o efeito fim de semana e feriados (dias de não negociação) a partir da formulação GARCH(1,1) é utilizado o modelo proposto por Noh e outros (1994) (equação 2.2). Os resultados encontrados foram:

$$\begin{aligned} R_t &= 0,0021725 + 0,0965R_{t-1} - 0,0887R_{t-2} + 0,1959D_1 - 0,1443D_2 \\ &\quad (0,000611) \quad (0,0305) \quad (0,0314) \quad (0,1146) \quad (0,0361) \\ \frac{h_t}{\eta_t^\delta} &= 0,00000946 + 0,1496\left(\frac{\varepsilon_{t-1}^2}{\eta_{t-1}^\delta}\right) + 0,848\left(\frac{h_{t-1}}{\eta_{t-1}^\delta}\right) \quad \delta = -0,0180 \\ &\quad (0,0000036) \quad (0,0206) \quad (0,0197) \quad (0,066) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ao contrário de Noh e outros (1994), o coeficiente δ estimado não foi significativo, enquanto que os demais coeficientes apresentaram significância. Podemos então aceitar a idéia de que o “efeito dia da semana” é pequeno para a série de dados do Ibovespa (pelo menos para o período analisado), tal como indicado antes pela pequena diferença entre os desvios padrão das séries dos retornos semanais (Tabela 3.1), e também que o efeito dia de não negociação é insignificante, pouco afetando o resultado dos retornos.

27 Para testar a significância dos coeficientes auto-regressivos da média são escolhidas as especificações GARCH(1,1), EGARCH(1,1), GJR(1,1) e GARCH-t(1,1) e em cada uma delas é utilizada um AR(p) para $p = 0, 1, 2, 3, 4$. Os critérios de comparação para cada um dos cinco diferentes modelos auto-regressivos da média nas especificações acima são o log da verossimilhança, o critério de Schwarz (SBC) e de Akaike (AIC).

A equação do modelo EGARCH escolhida é dada por:

$$R_t = 0,001408 + 0,102618R_{t-1} - 0,07615R_{t-2} + 0,19467D1 - 0,12254D2$$

$$\log(h_t) = -0,37538 + 0,95037(\log(h_{t-1})) - 0,122679 \left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \right) + 0,262926 \left[\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{h_{t-1}}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \quad (3.6)$$

Todos os coeficientes são significativos e o efeito *leverage* é de $\gamma = -0,12226$, ou seja, negativo, como esperado. O valor de $\alpha = 0,262926$ positivo confirma a existência de aglomeração da volatilidade. A persistência é dada por $\beta_1 = 0,95037$, que não é tão próximo de 1 quanto no modelo GARCH(1,1). Esta persistência conduz a uma meia vida de 14 dias, bem menor do que no modelo anterior.

As equações da média e da variância para o modelo GARCH-t são dadas por:

$$R_t = 0,002408 + 0,07748R_{t-1} - 0,091693R_{t-2} + 0,195965D1 - 0,171226D2$$

$$h_t = 0,0000085 + 0,14906\varepsilon_{t-1}^2 + 0,85017h_{t-1}$$

apresentando 9 graus de liberdade ($\nu=9$). A persistência é notada por $\beta_1 > \alpha_1$ e $\alpha_1 + \beta_1 = 0,99923$, com uma meia vida de 29 meses, bem maior que o modelo GARCH com distribuição normal.

Por fim, o modelo GJR apresenta as seguintes equações da média e da variância:

$$R_t = 0,00158 + 0,1137R_{t-1} - 0,0757R_{t-2} + 0,1944D1 - 0,1197D2$$

$$h_t = 0,00001966 + 0,0628\varepsilon_{t-1}^2 + 0,8226h_{t-1} + 0,1695S_{t-1}^-\varepsilon_{t-1}^2 \quad (3.8)$$

O efeito *leverage* é capturado por $\gamma = 0,1695$, positivo, como esperado. A meia vida deste modelo é de 6 dias, a menor de todas as especificações aqui consideradas. Como este modelo engloba o GARCH(1,1) e o coeficiente γ é significativo, é esperado que apresente melhores estatísticas. A Tabela 3.5 compara as estatísticas da variância condicional estimada (h_t) para todos os modelos.

O erro padrão para a variância (*benchmark*) e seus valores extremos são bem maiores do que a variância condicional estimada por todos os modelos (h_t). Todas as séries da Tabela 3.5 apresentam problemas de normalidade.

GRÁFICO 3.7 VARIÂNCIAS CONDICIONAIS ESTIMADAS

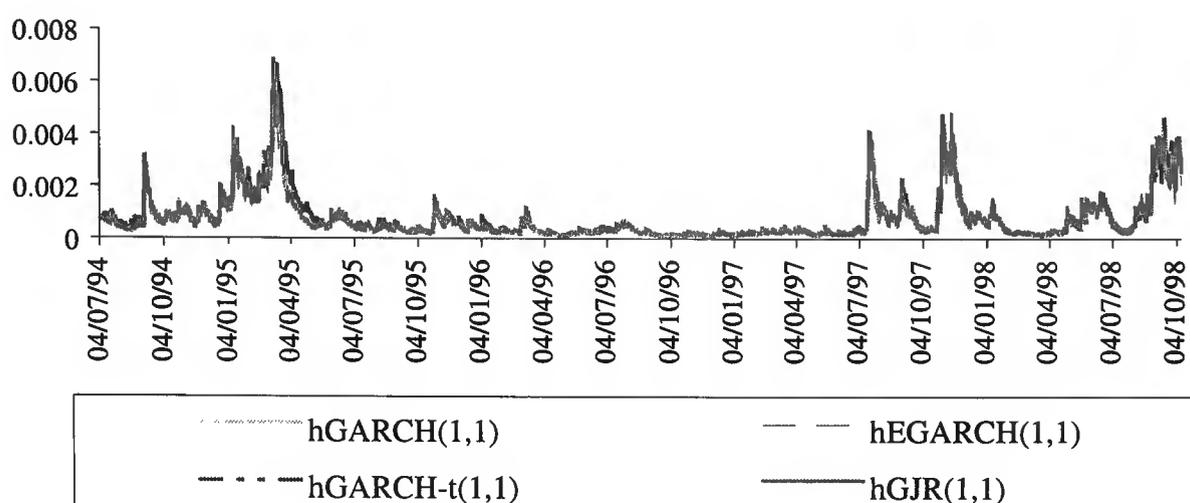


TABELA 3.5 - ESTATÍSTICAS DA VARIÂNCIA CONDICIONAL ESTIMADA PARA A SÉRIE IBOVESPA

Estatística/ modelo	Variância <i>benchmark</i>	h_t GARCH	h_t EGARCH	h_t GARCH-t	h_t GJR
Média Amostral	0,000884	0,000788	0,000729	0,000789	0,000770
Significância	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Erro Padrão	0,00192	0,00089	0,00075	0,00089	0,00088
Assimetria	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Curtose	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Máximo	0,02079	0,00655	0,00620	0,00663	0,00682
Mínimo	0,0000094	0,000092	0,000090	0,000089	0,00013

Notas: h_t GARCH, h_t EGARCH, h_t GARCH-t e h_t GJR são as variâncias condicionais estimadas dos modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1), GARCH-t(1,1) e GJR(1,1) respectivamente.

Para analisar o grau de acerto entre a volatilidade estimada e a verdadeira é utilizado o quociente $s = \text{volatilidade estimada} / \text{volatilidade verdadeira}$. Neste caso, se $s > 1$, há superestimação, se $s = 1$, há acerto, e se $s < 1$, tem-se subestimação. O modelo GARCH(1,1) superestima 68% dos dados. Em 3,03% das observações é encontrado $0,98 < s < 1,02$, que é um intervalo razoável de acerto.

Para o modelo EGARCH(1,1), 68% das observações da volatilidade estimada estão acima da volatilidade verdadeira, e com 2,46% de acerto no intervalo $0,98 < s < 1,02$. O modelo GARCH-t (1,1) superestima em 67% dos dados e mantém o maior percentual dentro do intervalo determinado, 3,31%. Por fim, no modelo GJR há o menor percentual de superestimação (66%), mas com poucas observações dentro do intervalo determinado (2,55%).

Todos os modelos produziram variâncias condicionais próximas, afora em momentos de pico. No Gráfico 3.7 estão mostradas as variâncias condicionais dos 4 modelos testados. É observado que há grande proximidade do h_t estimado para cada modelo.

3.4 Comparação entre os Modelos Determinísticos

Para determinar qual modelo se ajusta melhor aos dados é feita a estimação da variância condicional um passo à frente (h_{t+1}) 21 vezes. São analisadas 3 situações diferentes. A primeira (situação A) considera apenas os 600 primeiros dados (até 2/12/96), deixando de fora da amostra a crise da Ásia e da Rússia. Esta situação é caracterizada por um período de pouca volatilidade no mercado.

A segunda previsão (situação B) considera os 1027 primeiros dados (até 24/8/98), e é caracterizada por um período que incorpora a crise asiática. O objetivo é ver qual a capacidade dos modelos em absorver a informação passada. No momento caracterizado aqui, antes do início da crise da Rússia, o mercado está pouco volátil.

Por fim, a terceira previsão (situação C) considera a amostra toda, composta de 1060 dados terminando no período em que estava ocorrendo a moratória russa (9/10/98), com efeitos sobre o mercado brasileiro. O objetivo na situação C é investigar a capacidade preditiva dos modelos quando existe uma situação de alta volatilidade e incerteza no mercado.

TABELA 3.6 - ESTATÍSTICAS DE PREVISÃO - SITUAÇÃO A

Estatística/modelo ^a	GARCH	EGARCH	GARCH-t	GJR
ME	7,022E-05	8,5635E-05	6,4676E-05	8,9357E-05
RMSE	7,83421E-05	9,32388E-05	7,34145E-05	9,58992E-05
MAE	7,5186E-05	8,8713E-05	7,0203E-05	9,2041E-05

Notas: a - Nesta situação os modelos não possuem as *dummies* D1 e D2.

TABELA 3.7 - ESTATÍSTICAS DE PREVISÃO SITUAÇÃO B

Estatística/modelo ^a	GARCH	EGARCH	GARCH-t	GJR
ME	0,00010326	0,00034625	0,00011809	0,00027215
RMSE	0,000394875	0,00058176	0,000406428	0,00054988
MAE	0,00031594	0,00048583	0,00032684	0,00044309

Notas: a - Nesta situação há somente a *dummy* D2.

O cenário proposto pela situação A revela um ME, RMSE e MAE menores para o modelo GARCH-t(1,1). Então é esperado que em momentos de baixa volatilidade este modelo preveja melhor a variância condicional. Na situação B, pós-crise asiática, o modelo GARCH(1,1) é pouco melhor que o GARCH-t(1,1), mas bem superior aos demais. O mesmo é percebido para o caso da situação C (momento de alta volatilidade no mercado).

Portanto, é difícil selecionar um modelo único para diferentes situações de mercado, o mesmo valendo para os diferentes ativos. As estatísticas de erro são menores para períodos de baixa volatilidade (situação A) comparativamente ao período de grande nervosismo do mercado (situação C). A capacidade de adaptação destes modelos também pode ser testada no caso de não ser sinalizado os momentos de alta volatilidade, como aqueles referentes aos *outliers* (D1 e D2).

TABELA 3.8 - ESTATÍSTICAS DE PREVISÃO - SITUAÇÃO C

Estatística/modelo ^a	GARCH	EGARCH	GARCH-t	GJR
ME	-0,003095	-0,0041304	-0,0031866	-0,0036293
RMSE	0,005610303	0,00650802	0,005713927	0,006142994
MAE	0,00350659	0,00425137	0,00357875	0,00391148

Notas: a - Nesta situação tem-se a *dummy* D1 e D2.

TABELA 3.9 - ESTATÍSTICAS DE PREVISÃO - SITUAÇÃO B SEM DUMMIES

Estatística/modelo	GARCH	EGARCH	GARCH-t	GJR
ME	0,000131	0,000345	0,000122	0,000303
RMSE	0,000407	0,000594	0,000408	0,0005797
MAE	0,000325	0,000482	0,000328	0,000468

TABELA 3.10 - ESTATÍSTICAS DE PREVISÃO - SITUAÇÃO C SEM DUMMIES

Estatística/modelo	GARCH	EGARCH	GARCH-t	GJR
ME	-0,000232	-0,002834	-0,000334	-0,001529
RMSE	0,003206	0,004873	0,003336	0,003674
MAE	0,002134	0,003088	0,002213	0,002098

Na situação B os modelos GARCH(1,1) e GARCH-t(1,1) possuem pouca diferença de erros de previsão. Já na situação C, há ligeira vantagem de previsão para o modelo GARCH(1,1). Na comparação entre modelos com e sem *dummy* é visto que a colocação das *dummies* geram ganhos de previsão.

3.5 Modelos de Volatilidade Estocástica

Esta seção é dedicada à análise da volatilidade do Ibovespa estimada pelo Filtro de Kalman, onde a equação 1.23 é colocada no formato espaço de estado. Para comparação da previsão são adotados dois modelos, cada qual com duas formulações, uma estacionária $|\gamma| < 1$ ²⁸ e outra não estacionária $\gamma = 1$, gerando, portanto, quatro equações diferentes. O primeiro modelo incorpora as mesmas duas *dummies* utilizadas pelas formulações da seção 3.4, com *D1* e *D2* na regressão dos retornos. A partir dos resíduos encontrados estimamos a volatilidade dos retornos que, por sua vez, pode ou não ser estacionária. No segundo modelo são obtidos os resíduos o_t , sem o uso das 2 *dummies* e, novamente, são estimadas as volatilidades para o caso estacionário e não-estacionário.

Podemos então escrever o modelo geral (Modelo 1) tal como as equações 3.9 a 3.11. Para o Modelo 2 admitimos a mesma estrutura impondo a restrição $\phi_1 = \phi_2 = 0$ na equação 3.9.

$$R_t = \rho_1 R_{t-1} + \rho_2 R_{t-2} + \phi_1 D1 + \phi_2 D2 + o_{1t} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \text{Equação 1- Caso estacionário:}^{29} \quad & o_{1t} = \sigma_t \varepsilon_t \\ & Y_t = N_t + h_t + \xi_t \\ & N_t = N_{t-1} = N \\ & h_t = \gamma h_{t-1} + \eta_t \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Equação 2- Caso não-estacionário:} \quad & o_{1t} = \sigma_t \varepsilon_t \\ & Y_t = h_t + \xi_t \\ & h_t = h_{t-1} + \eta_t \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para cada uma destas equações são encontrados os valores para a volatilidade filtrada e suavizada, além dos hiperparâmetros γ, σ_ξ^2 e σ_η^2 . A comparação entre as equações é feita mediante 3 resultados estatísticos, a variância do erro de previsão (p.e.v.), o

28 O *software* utilizado nas estimações foi o STAMP 5.0, que impõe esta restrição ao modelo quando da estimação da volatilidade estocástica.

29 Como primeira abordagem é testada a hipótese de que o modelo contém uma inclinação variável no tempo. Contudo, rejeita-se esta hipótese.

critério de Akaike e o critério de Schwarz, sendo então feita a previsão 1 passo à frente 21 vezes, considerando as mesmas 3 situações (A, B e C) anteriores.

TABELA 3.11 - RESULTADOS ESTATÍSTICOS PARA A VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA

Estat./ Equações	Modelo1		Modelo2	
	Equação 1	Equação 2	Equação 3	Equação 4
p.e.v.	2,8278	2,8451	2,8174	2,8350
AIC	1,0451	1,0493	1,0414	1,0458
SBC	1,0592	1,0587	1,0555	1,0552
γ	0,9843	-	0,9840	-
σ_{ξ}^2	2,5444	2,5725	2,5333	2,5619
σ_{η}^2	0,0367	0,0266	0,0372	0,0268
q	0,0144	0,0103	0,0146	0,0104

Os modelos estimados não apresentaram problemas de convergência. Em ambos os casos o p.e.v. e o critério de AIC selecionam o caso estacionário (equações 1 e 3), enquanto que o critério de SBC seleciona o caso não estacionário (equações 2 e 4). Com relação ao Modelo 1, a persistência encontrada na equação 1 (0,9843) conduz a uma meia vida de 43 dias, enquanto que a persistência para o Modelo 2 (equação 3) é um pouco menor (0,9840), com uma meia vida de 42 dias.

O hiperparâmetro do componente irregular mostrou valores próximos para as quatro equações, em torno de 2,55. Para o hiperparâmetro da volatilidade estimada e para a razão de variâncias q a diferença foi um pouco maior nos dois casos estacionários. Nestes casos as equações das volatilidades estocásticas são dadas por

$$\text{Equação 1: } h_t = 0,9843h_{t-1} \quad \text{com} \quad \sigma_{\xi}^2 = 2,5444 \quad \sigma_{\eta}^2 = 0,0367 \quad (3.12)$$

$$\text{Equação 3: } h_t = 0,9840h_{t-1} \quad \text{com} \quad \sigma_{\xi}^2 = 2,5333 \quad \sigma_{\eta}^2 = 0,0372 \quad (3.13)$$

Pelas Tabelas 3.12 e 3.13 pode ser observado que as estimativas da volatilidade para os 2 modelos apresentam problemas de normalidade e que são obtidos melhores valores para o caso suavizado, como era de se esperar, pois este processo utiliza toda a informação disponível na amostra. Na comparação entre os modelos,

o caso estacionário apresenta melhor desempenho que o não-estacionário, tanto em relação ao menor erro padrão e média, quanto na volatilidade máxima atingida.

TABELA 3.12 - ESTATÍSTICAS DA VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA ESTIMADA MODELO 1

Estatística/equações	Equação1- $h_{f,t}$	Equação1- $h_{s,t}$	Equação2- $h_{f,t}$	Equação2- $h_{s,t}$
Média Amostral	0,00102	0,000002	0,00085	0,00085
Significância	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
Erro Padrão	0,00126	0,00001	0,00255	0,00255
Assimetria	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
Curtose	0,00000	-	-	-
Volatilidade Máxima	0,00949	0,00034	0,05139	0,05139
Volatilidade Mínima	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

TABELA 3.13 - ESTATÍSTICAS DA VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA ESTIMADA - MODELO 2

Estatística/equações	Equação3- $h_{f,t}$	Equação3- $h_{s,t}$	Equação4- $h_{f,t}$	Equação4- $h_{s,t}$
Média Amostral	0,000002	0,000002	0,00087	0,00087
Significância	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
Erro Padrão	0,00001	0,00001	0,00273	0,00273
Assimetria	-	0,00000	0,00000	0,00000
Curtose	0,00000	-	0,00000	0,00000
Volatilidade Máxima	0,00031	0,00033	0,05230	0,05230
Volatilidade Mínima	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Assim como nos modelos de variância determinística, aqui é feita a análise sobre o percentual de superestimação ou subestimação das variâncias obtidas nos modelos estocásticos em relação à variância adotada como *benchmark*, o valor de s (seção 3.4).

TABELA 3.14 - ESTATÍSTICAS DE PREVISÃO - SITUAÇÃO A

Estat./Volatilidade	h_f Equação1	h_f Equação2	h_f Equação3	h_f Equação4
ME	-0,006323	-0,00632285	-0,006323	-0,006331
RMSE	0,008096	0,008095883	0,008096	0,008101
MAE	0,006323	0,00632285	0,006323	0,006331

TABELA 3.15 ESTATÍSTICAS DE PREVISÃO - SITUAÇÃO B

Estat./Volatilidade	h_f Equação1	h_f Equação2	h_f Equação3	h_f Equação4
ME	-0,006271	-0,006278962	-0,006272	-0,00628
RMSE	0,008057	0,008060712	0,008057	0,008061
MAE	0,006271	0,006278962	0,006272	0,00628

TABELA 3.16 - ESTATÍSTICAS DE PREVISÃO - SITUAÇÃO C

Estat./Volatilidade	h_f Equação1	h_f Equação2	h_f Equação3	h_f Equação4
ME	-0,00557806	-0,005265363	-0,005707085	-0,005465089
RMSE	0,007471708	0,007298887	0,007581316	0,007444253
MAE	0,00557806	0,005270109	0,005707085	0,005465089

As volatilidades filtradas e suavizadas para a equação estacionária e não-estacionária do Modelo 1 ficaram todas com o mesmo percentual de subestimação (63%). Com relação ao número de observações dentro do intervalo $0,98 < s < 1,02$, o percentual foi de 1,13%. Para o Modelo 2, a equação 3 (estacionária) teve 100% de subestimação. No caso não-estacionário, o percentual de subestimação tanto para a volatilidade filtrada quanto suavizada foi de 62%, com 0,5% de observações dentro do intervalo $0,98 < s < 1,02$.

Para previsão são consideradas as volatilidades filtradas,³⁰ pois o objetivo é ver como o modelo prevê a volatilidade incorporando novas informações a cada momento. Nas Tabelas 3.14 a 3.16 são mostradas as mesmas estatísticas utilizadas para comparar a previsão um passo à frente no caso determinístico (seção 3.5).

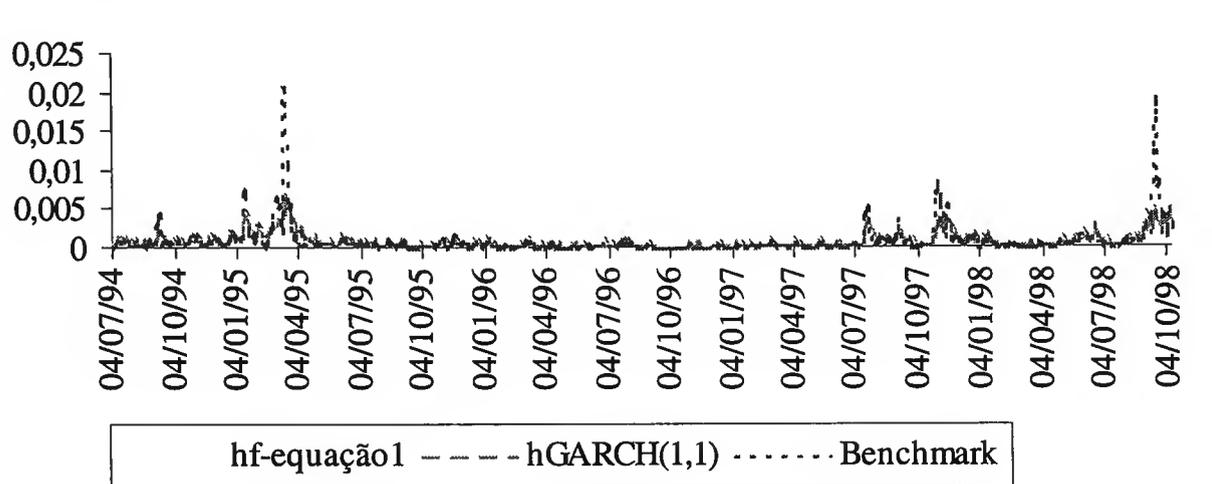
Para as quatro equações é notada pouca diferença entre as estatísticas de erro, com pequena vantagem para a equação 3.9 (caso estacionário) nas situações A e B, ao passo que na situação C a equação 3.11 (caso não-estacionário) apresenta uma melhor capacidade de previsão. A inclusão de variáveis *dummies* não provocou uma grande diferença nas estatísticas de previsão. A equação 3.9 (caso estacionário) é escolhida como a mais adequada para os modelos estocásticos.

30 ZIEGELMANN & PEREIRA (1997) também utilizam a estimativa da volatilidade filtrada para fazer previsão.

3.6 Comparação entre os Modelos Determinísticos e Estocásticos

O próximo passo é a comparação entre o melhor modelo selecionado para o caso determinístico (AR(2)+D1+D2+GARCH(1,1)) e o escolhido pelo processo estocástico (AR(2)+D1+D2+SV estacionário). O Gráfico 3.8 relaciona as estimativas da volatilidade com a variância adotada como *benchmark*.

GRÁFICO 3.8 - VOLATILIDADES ESTIMADAS E VARIÂNCIA



A persistência no modelo GARCH é maior que no AR-SV, respectivamente (0,9977 e 0,9843). Desta forma, o período para que um choque na volatilidade seja reduzido à metade é muito menor no modelo estocástico. Herencia (1997) também obteve este resultado para a série da Telebrás PN. Uma similaridade encontrada entre as duas formulações é a obtenção de melhores resultados para os modelos que consideraram a existência de *dummies* como sinalizadoras da presença dos *outliers*.

Com relação às estatísticas de previsão para as 3 situações, o modelo AR-SV é melhor pelo critério do erro médio (ME), enquanto que o RMSE e o MAE indicam o GARCH como preferido. Esta característica já era esperada, uma vez que os modelos estocásticos subestimam as estimativas mais frequentemente.

O modelo GARCH(1,1) estima melhor a volatilidade em período de relativa calma no mercado (situação A), ao passo que o modelo estocástico obtém resultados mais satisfatórios em um período de maior nervosismo (situação C). Portanto, diante dos resultados das estatísticas de erro para a previsão da volatilidade, é difícil selecionar a melhor formulação para cada caso (determinístico ou estocástico), bem como escolher entre estas duas formulações.

CONCLUSÃO

Algumas conclusões gerais podem ser feitas sobre os resultados encontrados neste trabalho. O efeito “fim de semana” e “dia de semana” não foram pronunciados para a série do Ibovespa no período considerado, muito embora Correa e outros (1998) tenham encontrado este efeito para o mesmo ativo no período de 1991 a 1993. O mesmo acontece para a equação auto-regressiva utilizada para filtrar a autocorrelação presente nesta série. Ziegelmann e Pereira (1997) utilizaram um AR(1) enquanto que aqui foi encontrada a presença do componente auto-regressivo de ordem dois.

A não existência do efeito “fim de semana” pode estar sendo ocasionada pelo período analisado neste trabalho, que tem taxas de inflação muito baixas e um menor desvio padrão dos retornos nominais comparativamente ao período analisado por Ziegelmann e Pereira (1997).³¹ Resultados diferentes quanto ao efeito “fim de semana” foram também encontrados para o S&P 500 quando analisado em períodos distintos. Enquanto Gibbons e Hess (1981) não encontraram efeito fim de semana, Noh e outros (1994) evidenciaram a presença deste efeito.

No caso da autocorrelação, testamos um modelo geral AR(p), onde $p = 0, 1, \dots, 4$, sendo que o AR(2) produzia resíduos não autocorrelacionados. O período de análise também pode ter contribuído para que o componente de ordem dois fosse significativo, pois existem três momentos de forte oscilação dos retornos: a crise do México, a crise asiática e a crise russa. Formulações ARMA são também encontradas na literatura, tal como em Kim e Kon (1994) e Nelson (1991).

O efeito *leverage* foi evidenciado na série do Índice Bovespa nos modelos EGARCH e GJR, enquanto que a aglomeração da variância ocorreu somente no modelo EGARCH.³² A utilização do modelo GARCH-t como tentativa de ajustar a distribuição dos erros gerou poucos ganhos de previsão.

31 O desvio padrão dos retornos nominais encontrado neste trabalho foi de 0,029, contra 0,041 em ZIEGELMANN & PEREIRA (1997).

32 O efeito *leverage* foi também observado em DAY & LEWIS (1992), ENGLE & NG (1993) e KIM & KON (1997), enquanto que a aglomeração da variância é percebida em ZIEGELMANN & PEREIRA (1997) e HERENCIA (1997).

A persistência de 0,99 encontrada para o Ibovespa no modelo GARCH(1,1) foi alta, implicando uma meia vida de 9 meses. No modelo EGARCH(1,1) esta foi menor (0,95), com uma meia vida de 14 dias. A formulação que produziu a menor persistência foi o modelo GJR, que implicou uma meia vida de 6 dias, pouco menor que a encontrada por Bustamante e Fernandes (1995).

Na seleção dos modelos determinísticos, apesar da alta persistência, quase sempre o modelo GARCH(1,1) apresentou a melhor performance. Herencia (1997) escolheu um GARCH(1,1) para a série de ações e do câmbio, a mesma formulação foi encontrada por Bustamante e Fernandes (1995) e Galvão, Portugal e Ribeiro (1997) para o Ibovespa.

Tanto aqui como em Herencia (1997) são feitas comparações entre modelos determinísticos e estocásticos, não sendo possível escolher, de forma segura, qual o melhor modelo para descrever os retornos e a volatilidade, pois as estimativas encontradas são muito próximas.

O modelo GARCH(1,1) descreve relativamente melhor a volatilidade estimada quando o período utilizado para análise é calmo (situação A), ao passo que o modelo estocástico estacionário desempenha melhor em períodos turbulentos. Portanto, mesmo tendo alta persistência dentro do período analisado, a série de retornos do Ibovespa não apresenta características de um modelo IGARCH para o caso determinístico, nem de não-estacionaridade para o caso estocástico.

A intervenção feita na equação da média dos retornos com as duas *dummies* produziu ganhos de previsão em ambos os modelos, sendo que de forma mais intensa para os modelos estocásticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AKGIRAY, V. Conditional heteroscedasticity in time series of stock returns: evidence and forecasts. *Journal of Business*, v. 62, n.1, 55-80, 1989.
- BARCINSKI, A., ALMEIDA, B. C. P., GARCIA, M. G. P. & SILVEIRA, M. A. C. Estimação da volatilidade do retorno das ações brasileiras: um método alternativo à família GARCH. *Resenha BM&F*, n. 116, p. 21-39, 1997.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, p. 307-27, 1986.
- _____. A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *The Review of Economics and Statistics*, v. LXIX, n. 3, p. 542-47, 1987.

- BRAUN, P. A., NELSON, D. B. E SUNIER, A. M. Good news, bad news, volatility, and betas. *The Journal of Finance*, v. 50, n. 5, 1995.
- BUSTAMANTE, M. & FERNANDES, M. Um procedimento para análise da persistência na volatilidade. *Anais do XVII Encontro Brasileiro de Econometria, Revista de Econometria*, p. 203-223, 1995.
- CHRISS, N. A. *Black & Scholes and beyond - option pricing models*. McGraw-Hill, 1997.
- CORREA, M. M. R. L. & PEREIRA, P. L. V. Modelos não lineares em finanças: previsibilidade em mercados financeiros e aplicações a gestão de risco. *Anais do XX Encontro Brasileiro de Econometria*, v. 1, 1998, p. 427-448.
- DAY, T. E. & LEWIS, C. M. Stock market volatility and the information content of stock index options. *Journal of Econometrics*, 52, p. 267-87, 1992.
- DING, Z., GRANGER, C. W. J. & ENGLE, R. F. A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, p. 83-106, 1993.
- DUARTE J., A. M. Simulação Monte Carlo para análise de opções. *Resenha BM&F*, n.115, p. 52-64, 1997.
- DUARTE J., A. M., PINHEIRO M. A., HEIL, T. B. B. Estimação da volatilidade de ativos e índices brasileiros. *Resenha BM&F*, n. 111, p. 16-28, 1996.
- ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variances of U.K. inflation. *Econometrica*, v. 50, n. 4, p. 987-1008, 1982.
- ENGLE, R. F. & BOLLERSLEV, T. Modelling the persistence of conditional variances. (with discussion). *Econometrics Reviews*, 5, p. 1-50, 81-87, 1986.
- ENGLE, R. F., LILIEN, D. M. & ROBINS, R. P. Estimating time-varying risk premia in the term structure: the ARCH-M model. *Econometrica*, 55, p. 391-408, 1987.
- ENGLE, R. F. & NG, V. K. Measuring and testing the impact of news on volatility. *Journal of Finance*, 48(5), p. 1749-78, 1993.
- FORNARI, F. & MELE, A. Modeling the changing asymmetry of conditional variances. *Economics Letters*, 50, p. 197-203, 1996.
- GALVÃO, A. B. C., PORTUGAL, M. S. & RIBEIRO, E. P. Volatilidade e causalidade: os efeitos da crise do México sobre os mercados à vista e futuro de câmbio e índice de ações no Brasil. *Anais do no XIX Encontro Brasileiro de Econometria*, v. II, 1997, p. 755-774.
- GIBBONS, M. R. & HESS, P. Day of the week effects and asset returns. *Journal of Business*, v. 4, n. 4, p. 579-596, 1981.
- GLOSTEN, L. R., JAGANNATHAN, R. & RUNKLE, D. E. On the relation between expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, 48, p. 1779-1801, 1993.

- HAGERUD, G. E. A smooth transition ARCH model for asset returns. *Working Paper Stockholm School of Economics*, 1996.
- _____. Modeling nordic stock returns with asymmetric GARCH models. *Working Paper Series in Economics and Finance*, n. 164, 1997.
- HAMILTON, J. D. State space models. *Handbook of econometrics*, v. IV, cap. 50, p. 3039-3080, 1994.
- HAMILTON, J. D. and SUSMEL, R. Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. *Journal of Econometrics*, v. 64, p. 307-333, 1994.
- HARVEY, A. C. *Forecasting, structural time series models and Kalman filter*. Cambridge University Press, 1996.
- HERENCIA, M. E. Z. Volatilidade nos modelos ARCH e variância estocástica: um estudo comparativo. *Dissertação de Mestrado apresentada ao IME-Unicamp*, 1997.
- _____. HOTTA, L. K. & PEREIRA, P. L. V. Filtragem e previsão com modelos de volatilidade: volatilidade estocástica versus GARCH. *Revista Brasileira de Economia.*, v. 52, n. 2, p. 241-278, 1998.
- JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Projeto Euclides, 2º ed., IMPA, 1996.
- KIM, D., KON, S. J. Alternative models for the conditional heteroscedasticity of stock returns. *Journal of Business*, v. 67, n. 4, p. 563-598, 1994.
- KRONER, K. Creating and using volatility forecasts. *Derivatives Quarterly*, p. 39-53, 1996.
- LAMOUREUX, C. G. & LASTRAPES, W. D. Heteroskedasticity in stock return data: volume versus GARCH effects. *Journal of Finance* 45, p. 221-229, 1990.
- NELSON, D. B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica*, 59, p. 347-70, 1991.
- _____. Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model. *Econometric Theory*, 6, p. 318-34, 1990a.
- _____. ARCH models as diffusion approximations. *Journal of Econometrics*, 45, p. 7-38, 1990b.
- NOH, J., ENGLE, R. F. & KANE, A. Forecasting volatility and option prices of the S&P 500 index. *Journal of Derivatives*, p. 17-30, 1994.
- PAGAN, A. R. and SCHWERT, G. W. Alternative models for conditional stock volatility. *Journal of Econometrics*, 45, p. 267-290, 1990.
- PORTUGAL, M. S. Neural network versus time series models: a forecasting exercise. *Revista Brasileira de Economia*, v. 49, p. 611-629, 1995.
- RUIZ, E. Quasi maximum likelihood estimation of stochastic volatility models. *Journal of Econometrics*, 63, p. 289-306, 1994.

SENTANA, E. Quadratic ARCH models. *Review of Economic Studies*, 62, p. 639-661, 1995.

ZAKOIAN, J. Michel Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, p. 931-955, 1994.

ZIEGELMANN, F. A. & PEREIRA, P. L. V. Modelos de volatilidade estocástica com deformação temporal: um estudo empírico para o índice Ibovespa. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, v. 27, n. 2, p. 353-376, 1997.

Recebido em abril de 1999. Aceito para publicação em julho de 1999.

Os autores agradecem a eficiente colaboração do bolsista de iniciação científica do CNPq Gregório Silva Caetano.