

Um desenvolvimento desviante na teoria da escolha: as contribuições de Armstrong, Luce e Fishburn[♦]

Gustavo AGGIO¹

aggio@unicamp.br |  ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4702-4061>

Resumo

Pesquisas recentes na historiografia do pensamento econômico têm evidenciado uma diversidade de tópicos e posições em relação ao comportamento econômico na chamada Revolução Ordinalista. O objetivo deste artigo é recuperar os desenvolvimentos de uma linha teórica que iniciou como crítica aos resultados que se estabeleciam neste movimento. A investigação parte da insistente defesa de W. E. Armstrong sobre a importância da intransitividade da indiferença, baseado em evidências da psicologia experimental que apontavam a impossibilidade de discernimento entre alternativas próximas. Posteriormente, verifica-se como sua ideia foi formalizada por R. D. Luce, um matemático com ampla influência na psicologia, por meio do conceito de semiordem, uma generalização da noção de ordem fraca, a forma padrão de conceptualizar a estrutura de preferências na microeconomia. Por fim, é investigado o papel de P. C. Fishburn neste episódio, considerando que este foi um autor de grande destaque na economia matemática, com diversas contribuições em teoria da escolha individual, sob incerteza e coletiva, inclusive com a hipótese de intransitividade da indiferença.

Palavras-chave

Intransitividade, Revolução ordinalista, Semiordem, Preferências.

A deviant development in choice theory: the contributions by Armstrong, Luce, and Fishburn

Abstract

Recent research in the history of economic thought has shown the diversity of themes and positions concerning economic behavior in the so-called Ordinalist Revolution. This paper aims to recover the developments of a research line that began by critically examining the developments of that theoretical movement. The investigation departs from W. E. Armstrong's

¹ Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Instituto de Economia, Departamento de Teoria Econômica, Campinas, SP, Brasil.

♦ Além dos agradecimentos aos pareceristas anônimos, agradeço aos colegas Eduardo Angeli, Felipe Almeida, José Ricardo Fucidji, Pedro Garcia Duarte e Rogério Arthmar por comentários e sugestões sobre versões preliminares deste texto.

Recebido: 07/01/2025.

Revisado: 14/05/2025.

Aceito: 05/06/2025.

DOI: <https://doi.org/10.1590/1980-53575543ga>

insistent defense of the intransitivity of indifference based on evidence from experimental psychology, pointing out the impossibility of discernment between close alternatives. The study verifies how R. D. Luce, an influential mathematician in psychology, formalized Armstrong's idea with a semiorder concept, a generalization of a weak order, the standard representation of preferences in microeconomics. Lastly, the investigation is on the role of P. C. Fishburn in this episode, considering that he was a remarkable author in mathematical economics, with several contributions in choice, uncertainty, and collective choice theories, including related work with the indifference intransitivity assumption in these topics.

Keywords

Intransitivity, Ordinalist revolution, Semiorder, Preferences.

JEL Classification

B21, B23, B31.

1. Introdução

A teoria econômica da escolha individual sob certeza, aquela que está sintetizada nos manuais de microeconomia e é linguagem comum na profissão, resulta dos desenvolvimentos da chamada Revolução Ordinalista, movimento que, segundo Moscati (2013), inicia-se com a publicação do *Manual de Economia Política* de Vilfredo Pareto em 1909, e vai até o *Valor e Capital* de John R. Hicks em 1939.¹ Como se sabe, duas linhas iniciais foram consideradas, uma onde a primitiva teórica é a estrutura de preferências e outra baseada diretamente nas escolhas. Na primeira, concebe-se uma função utilidade, com domínio no conjunto de escolhas e imagem nos números reais, para a qual o valor da função apenas ordena as alternativas, daí o nome de teoria ordinalista. Neste caso, nenhuma outra informação além desta ordem pode ser inferida do valor observado. A colaboração de Hicks com Roy G. D. Allen (Hicks e Allen 1934a, 1934b) teve grande influência na consolidação desta primeira corrente, propondo uma ressignificação da taxa marginal de substituição como medida de compensação ao invés de uma relação entre utilidades marginais. A segunda linha é composta pela teoria da preferência revelada, inicialmente proposta por Paul Samuelson (1938a) em trabalho crítico a aspectos da teoria de Hicks e Allen. Entretanto, desenvolvimentos posteriores viriam estabelecer condições de compatibilidade entre as duas correntes, tornando possível identificar estas contribuições dentro de um mesmo movimento teórico.

¹ Moscati (2013) cita: Pareto, V. 1971 [1909]. *Manual of political economy*. New York: Kelley; Hicks, J. R. 1939. *Value and capital*. Oxford: Clarendon Press.

Recentemente, a Revolução Ordinalista tem recebido bastante atenção na historiografia do pensamento econômico (Fernandez-Grela 2006; Hands 2010, 2011; Moscati 2013; Lenfant 2018; Hudík 2014; Fiévet 2022), evidenciando a riqueza de debates durante os anos 1930. Um destes debates tinha como tema a possibilidade ou não de ordenações sobre transições entre alternativas e a relação desta forma de ordenação com a consideração de uma proporção de preferências entre as transições. Conforme nos informa Moscati (2013) e Fiévet (2022), a raiz desse debate se encontra no *Manual*, de Pareto, onde é possível verificar que este autor considerava tal ordenação plausível, enquanto defendia que não seria apropriado considerar uma proporção para preferências entre as transições.²

Um exemplo de ordenações tanto para as alternativas como também para as transições pode partir de um conjunto $\{A, B, C\}$ de escolhas, preferências tais que $A \succ B \succ C$, onde \succ é a relação transitiva de “melhor que” ou de “preferência estrita”, e a suposição de que a passagem de C para B é melhor do que passagem de B para A , ou $B - C \succ' A - B$, onde \succ' é o análogo de \succ para a ordenação de transições. Atribuir uma proporção para as preferências sobre transições ocorreria ao informar que a passagem de C para B é, por exemplo, duas vezes melhor do que a de B para A .

A defesa de ordenações sobre transições pode ocorrer pelo argumento de que as pessoas são capazes de estabelecer esta comparação por introspecção, empregando uma “avaliação interna” sobre como se sentiriam quando ocorresse tais transições. Entretanto, segundo Hands (2010), quem investigou as ligações entre economia e psicologia no período da Revolução Ordinalista, a chamada psicologia da introspecção caiu em declínio como campo científico na passagem do Século XIX para o Século XX, razão pela qual autores da Revolução Ordinalista buscaram se afastar desta linha de argumentação.

Um episódio que compõe as discussões sobre a possibilidade de ordenação de transições foi chamado por Moscati (2013) de o debate sobre a *determinação da função utilidade*. A razão para este nome é que Oskar Lange publicou um artigo com este título em 1934 e vários outros se seguiram adotando o mesmo.³ Segundo Moscati (2013), a publicação de Lange buscava demonstrar que a ordenação de transições implicava em uma medida

² Fiévet (2022, 1129–1131) traz as passagens exatas do texto de Pareto.

³ A referência em Moscati (2013) é: Lange, O. 1934. “The determinateness of the utility function”. *Review of Economic Studies* 1: 218-225.

de proporção entre as preferências sobre estas e que, portanto, Pareto havia cometido um erro ao aceitar a primeira possibilidade e recusar a segunda. Ainda segundo a pesquisa de Moscati (2013), o debate se seguiu com uma crítica de Henry Phelps-Brown a Lange, a réplica deste, a defesa de Harro Bernardelli à ideia de ordenação sobre transições, a crítica de Allen sobre esta possibilidade e, finalmente, o papel de Franz Alt na correta formalização das condições para que a ordenação de transições implique em medida sobre a proporção destas preferências. Fiévet (2022) também investigou em detalhe a leitura de Lange sobre argumentos de Pareto e a posição de Samuelson neste debate.

A presente investigação parte das contribuições de um dos autores do debate sobre *a determinação da função utilidade*, o economista inglês Wallace Edwin Armstrong. Talvez por ter publicado tardiamente a sua primeira contribuição às discussões, apenas em 1939, ou por ser um autor menos reconhecido, não foi considerado por Moscati (2013) em seu trabalho. A principal contribuição de Armstrong está relacionada à defesa da possibilidade de intransitividade da indiferença, ou seja, A indiferente a B e B a C não implicaria A indiferente a C . Este resultado seria suficiente para comprometer a construção ordinalista baseada em conjuntos de indiferença.

Em seu trabalho, Armstrong resgatou um resultado da psicologia experimental, a noção de *diferença mínima perceptível* para embasar seu argumento de que as pessoas não são capazes de discernir entre alternativas próximas na escolha econômica. Desta forma, ao se acumularem pequenas variações entre alternativas adjacentes, tem-se uma cadeia na qual ocorre a relação de preferência estrita entre as alternativas nas pontas, simultaneamente à indiferença entre alternativas vizinhas. A partir deste resultado, Armstrong viria propor uma série de críticas ao ordinalismo, principalmente o trabalho de Hicks e Allen. O autor também estendeu suas contribuições para a teoria da escolha sob incerteza e teoria da escolha coletiva.

Armstrong teve uma trajetória acadêmica bastante particular, tendo atuado em pesquisa e ensino da antropologia antes de direcionar sua carreira à economia. Cometeu um erro ou aplicou o conceito de diferença mínima perceptível com certa liberalidade, passando de uma noção probabilística para uma determinista. Diferentemente de alguns autores de destaque da Revolução Ordinalista, Armstrong nem sempre empregava métodos matemáticos; quando o fazia, era apenas de maneira parcial, tendo insistido em alguns resultados mais por convicção do que pela validade de sua presen-

tação formal. Por outro lado, apesar de pouco citado, Armstrong não era um autor ignorado por alguns dos grandes nomes da profissão. Por exemplo, Maurice Allais (1953) citou Armstrong (1939b) como referência para a discussão sobre cardinalismo; Milton Friedman e Leonard Savage (Friedman e Savage 1948), Gordon Tullock (1964) e Amartya Sen (1971) expressaram concordância com a justificativa de Armstrong para a intransitividade da indiferença, enquanto William Vickrey (1960) registrou a contribuição de Armstrong à teoria da escolha coletiva. Por fim, o próprio Hicks (1956) mostrou conhecimento da crítica de Armstrong ao seu trabalho.

Além deste conjunto de renomados economistas, o trabalho de Armstrong chamou a atenção de Robert Duncan Luce, um matemático com forte influência na área de psicologia. Uma das muitas de suas contribuições foi o desenvolvimento do conceito de *semiordem*, uma generalização da noção de *ordem fraca*, a categoria de relação binária comumente empregada na teoria microeconômica. A semiordem permite a consideração da intransitividade da indiferença dadas as razões defendidas por Armstrong. O trabalho de Luce (1956) deu rigor formal à teoria de Armstrong e abriu todo um campo de investigação, uma vez que novas generalizações e aplicações se tornaram possíveis, enriquecendo o conjunto de tipos de problemas que a teoria poderia contemplar; grande parte deste trabalho foi desenvolvido por Peter C. Fishburn nos anos 1960 e 1970. Enquanto a contribuição de Luce ficou restrita à escolha individual sob certeza e sob incerteza probabilística, Fishburn trabalhou também com a temática de escolha coletiva e de ordenação sobre transições. Em várias de suas contribuições, Fishburn fez questão de citar o trabalho de Armstrong, tendo, inclusive, investigado suas limitações.

O objetivo do presente artigo é reconstruir a trajetória deste desenvolvimento desviante dentro da teoria econômica da escolha, resgatando com maior detalhe a contribuição original de Armstrong e seu contexto, uma vez que foi, por um largo período de tempo, o maior advogado da consideração da indiferença como intransitiva. Entretanto, a narrativa não estaria completa sem a consideração das contribuições de Luce e Fishburn para o tema. A principal razão é que estes autores forneceram bases formais sólidas para as ideias de Armstrong, além de proporem várias generalizações, evidenciando que não foi por falta destes requisitos que a possibilidade de intransitividade da indiferença ficou à margem do conjunto teórico principal em economia. Além disso, as contribuições de Luce e Fishburn ao tema são mais lembradas e citadas na literatura econômica do que as de Armstrong.

Além desta introdução e dos comentários finais, o artigo está dividido em três seções. A primeira é dedicada à biografia acadêmica de Armstrong, verificando as evidências sobre o papel da psicologia experimental em sua formação, além da apreciação de suas contribuições para a noção de intransitividade da indiferença e seu cardinalismo como críticas da Revolução Ordinalista. Em seguida, tem-se uma seção com o foco no trabalho pioneiro de Luce na formalização do conceito de semiordem, considerando o contexto de sua dedicação às ciências sociais e comportamentais. Por fim, uma seção com o período em que Fishburn era um jovem pesquisador, desenvolvendo um trabalho de síntese e extensão da contribuição de Luce e dos desdobramentos que este gerou. A investigação partiu dos artigos originais de Armstrong e da investigação sobre as suas citações e de material biográfico publicado a seu respeito. Os trabalhos de Luce e Fishburn analisados são aqueles que citam Armstrong, com raras exceções, além de material biográfico sobre estes autores.

2. Armstrong e a defesa da intransitividade da indiferença

Apesar da contribuição de Armstrong ter sido lembrada na literatura de história do pensamento econômico (Hands 2011; Hudík 2014; Boianovsky 2014; Oliveira e Portella 2017; Lenfant 2018), isso ocorreu sempre sem muito destaque ou protagonismo, cabendo, portanto, uma recuperação de sua biografia aqui. Esta primeira parte da seção também é importante para revelar a formação do autor, seu acesso à psicologia e à teoria econômica.

2.1. Biografia de Armstrong

A trajetória de Armstrong como antropólogo está bem documentada em Urry (1985). Além desse artigo, existe uma entrada sobre Armstrong na edição de 1987 do *New Palgrave Dictionary of Economics* (Gregory e Urry 1987) e um verbete no *Oxford Dictionary of National Biography* (Gregory 2004); em ambos busca-se estender a descrição histórica para os anos de Armstrong como economista. Salvo quando diretamente informado, as informações biográficas sobre este autor que seguem são retiradas destas referências.

Wallace Edwin Armstrong (1896-1980) graduou-se em Cambridge em 1918 na área de ciências morais, uma formação generalista em humanidades. Segundo Tribe (2022), o curso em ciências morais e o seu exame triplos surgiram em 1848, sofrendo algumas reformas ao longo do tempo.⁴ Em 1881, por exemplo, a estrutura desse exame era dividida entre moral e filosofia política, psicologia, metafísica, lógica e economia política (Tribe 2022, p.92-93).

Sobre a educação de Armstrong e seus interesses iniciais, consta que dedicou o último ano de formação na universidade à área de psicologia e que foi membro da *British Psychological Society* no período de 1925 a 1931. Uma figura importante em sua trajetória foi William H. R. Rivers, renomado pesquisador com formação em medicina e com múltiplos interesses e atuações nas áreas de fisiologia, psicologia clínica e experimental, tendo adicionado a antropologia social às suas áreas de interesse após participar da famosa expedição de Cambridge às ilhas do Estreito de Torres, organizada em 1898 por Alfred Haddon, personagem pioneiro da antropologia em Cambridge. Rivers, por sua vez, teve papel pioneiro na área de psicologia em Cambridge, juntamente a Charles Myers, seu aluno nesta universidade e futuro colega (Myers 1922; Breathnach 1993; Forrester 2008). Em particular, Forrester (2008, 38) informa que tanto para Rivers quanto para Myers, que também compunha a expedição de Haddon, a antropologia e a psicologia não configuravam campos distintos de investigação.

Rivers conheceu Armstrong por intermédio de Myers e teve grande influência sobre a sua guinada à antropologia quando Armstrong ainda era estudante em Cambridge. Assim que se formou, Armstrong teve aulas com Haddon e foi contemplado com uma bolsa para realizar um estudo de campo na ilha Rossel, em Papua-Nova Guiné. Nessa investigação, convenceu-se de que o sistema monetário local tinha características únicas e publicou um artigo com seus resultados no *Economic Journal* (Armstrong 1924), talvez o seu trabalho acadêmico de maior repercussão. Com seu retorno à Inglaterra e a morte de Rivers em 1922, Armstrong foi convidado a dar aulas de antropologia social em Cambridge, uma atividade que Rivers exercia de maneira informal. Embora a posição de docente de Armstrong fosse provisória, o seu contrato foi renovado anualmente até 1925. Urry (1985) informa, com base nos arquivos de Armstrong, que seu curso de

⁴ O curso não existe mais com este nome, sendo o curso de filosofia o seu herdeiro. Até hoje existe o *Moral Sciences Club* (<https://www.phil.cam.ac.uk/seminars-phil/seminars-msc>, sítio eletrônico acessado em 06/06/2025), com seminários nesta faculdade.

antropologia tinha forte base na psicologia, o que certamente é um reflexo das influências de Myers e Rivers em sua formação.⁵

Armstrong permaneceu em Cambridge até 1939 com atividades de supervisão e aulas eventuais, além de orientação para o exame tripos na área de etnologia. Foram nestas atividades eventuais que Armstrong iniciou a docência e pesquisa em economia. Sua primeira publicação nessa nova área foi o livro *Saving and Investment: the theory of capital in a developing economy*. Sobre este, tanto Abba Lerner (1937), em resenha para o *Economic Journal*, como Marian Bowley (1938), para a *Economica*, identificaram fortes influências da Escola Austríaca na perspectiva econômica de Armstrong, ocorrendo do próprio Hayek (1941) citar o trabalho.

Ainda sobre seu livro de 1936, um obituário anônimo sobre Armstrong publicado no jornal inglês *The Times* (Anônimo 1980) sugere uma ligação direta entre a sua pesquisa antropológica realizada na ilha Rossel e essa obra. A este respeito, é importante verificar, mesmo que rapidamente, desdobramentos da pesquisa de Armstrong como antropólogo. Liep (2015), por exemplo, informa que Armstrong entendeu erroneamente o fenômeno que observou na ilha Russel, que atribuiu às moedas utilizadas em rituais pelos locais as mesmas propriedades dos meios de troca em economias de mercado, chegando a supor a existência de empréstimos a juros naquela sociedade, o que não correspondia à realidade. Liep (2015) informa que o sistema de moedas divididas por categorias hierarquizadas, originalmente descrito por Armstrong, exercia um papel na distinção social dos membros do grupo, além de serem meios de pagamento em rituais. Neste sentido, a evidência sugere que foi a formação de Armstrong em economia, dentro de seu curso de ciências morais, que influenciou a sua atuação como antropólogo.

Ainda em Cambridge, Armstrong (1939b) publicou o seu primeiro artigo em teoria da escolha, o ramo a que se dedicaria até 1958, pelo menos. Armstrong se estabeleceu na University of Southampton ainda em 1939, permanecendo até se aposentar em 1961 com o cargo de *Professor on Economic Theory*, o equivalente a professor titular. Sobre esta etapa final e mais estabelecida de sua carreira acadêmica, Gregory (2004) informa o fato curioso de que alguns colegas de Armstrong ignoravam sua experiência como antropólogo. Isso não quer dizer que Armstrong abandonou

⁵ Urry (1985, 418) informa que: "It is clear from the lectures that the basis of social anthropology for Armstrong lay in psychology. This reflected not only Armstrong's earlier connexions with psychology, but also a particular trend in British anthropology which had developed after 1900."

o interesse pela área. Uma evidência é que publicou várias resenhas de livros na intersecção entre economia e antropologia no *Economic Journal* no período de 1939 a 1949 (Armstrong 1939a, 1940a, 1940b, 1946, 1949).

Uma tese da presente investigação é a de que Armstrong rumou para as teorias da escolha econômica se apoiando em argumentos e resultados da psicologia, algo que carregou de sua formação original e da qual, conforme a análise de Urry (1985) dos programas do curso de Armstrong em Cambridge, nunca abriu mão na atuação como antropólogo, até porque esta era a perspectiva dominante em sua comunidade acadêmica.

2.2. *As contribuições de Armstrong em teoria da escolha (1939-1958)*

Armstrong publicou sete artigos em teoria da escolha durante o intervalo de 1939 a 1958. O corpo central de seu trabalho é caracterizado por uma tentativa de refutação das teorias ordinalistas, defendendo a importância da intransitividade da relação ou estado de indiferença, baseando seus argumentos em resultados da psicologia experimental, algo que seria entendido hoje como uma defesa do emprego da racionalidade limitada. Entretanto, Armstrong se aventurou para além da ideia de escolha entre opções individuais certas. Ele também escreveu sobre escolha sob incerteza e bem-estar social. Uma organização preliminar destes artigos está apresentada na Tabela 1, onde é possível verificar o ano, título e revista onde o artigo foi publicado, além de uma classificação qualitativa entre três opções: Propositivo, Reafirmativo e Reativo. Os artigos propositivos são aqueles que introduzem uma nova ideia sobre um tema, a saber, escolha individual simples (Armstrong 1939b), escolha sob incerteza (Armstrong 1948) e bem-estar social (Armstrong 1951). Os artigos classificados como reafirmativos recuperam as ideias de trabalhos anteriores, mas com novos interlocutores, enquanto os reativos são oportunidades que Armstrong teve de publicar uma resposta, primeiramente para Rothenberg (Armstrong 1953) e, depois, para Georgescu-Roegen (Armstrong 1958b), já há poucos anos de se aposentar. Outra observação é que a base teórica econômica nesses artigos é diretamente filiada à tradição cardinalista de Cambridge, não havendo referências sobre a Escola Austríaca, como parece ocorrer em seu trabalho sobre economia monetária.

Tabela 1 - Artigos de Armstrong em teoria da escolha (1939-1958)

Ano	Título	Periódico	Classificação
1939	The Determinateness of the Utility Function	Economic Journal	Propositivo
1948	Uncertainty and the Utility Function	Economic Journal	Propositivo
1950	A Note on the Theory of Consumer's Behaviour	Oxford Economic Papers	Reafirmativo
1951	Utility and the Theory of Welfare	Oxford Economic Papers	Propositivo
1953	[Marginal Preference and the Theory of Welfare]: A Replay	Oxford Economic Papers	Reativo
1955	Concerning Marginal Utility	Oxford Economic Papers	Reafirmativo
1958	Utility and the "Ordinalist Fallacy"	Review of Economic Studies	Reativo

Fonte: Elaboração própria

Em seu primeiro artigo da série, Armstrong (1939b) identificou suas referências, seus interlocutores, entre os trabalhos de Hicks, Allen, Lange, Phelps-Brown, Bernardelli e Samuelson, para o período de 1934-1939, mas deu especial ênfase para o trabalho conjunto de Hicks e Allen (1934a). Portanto, quando referido ao ordinalismo de forma genérica neste texto, a referência é à corrente ligada ao trabalho de Hicks e Allen. Armstrong (1939b) observou que a teoria ordinalista da escolha consistia em um processo de separação das alternativas ou cestas disponíveis em dois subconjuntos. No primeiro, cada elemento, cada alternativa, seria estritamente preferida a cada uma daquelas presentes no segundo subconjunto. Adicionalmente, o ordinalista assumiria que cada alternativa no primeiro subconjunto é indiferente entre si. Trataria-se, portanto, de um conjunto de indiferença; mais especificamente, aquele onde cada elemento leva ao maior valor de função de utilidade dentre as alternativas factíveis para um ou uma agente. Armstrong aceitava o processo de separação das opções em dois subconjuntos, sendo o segundo composto de opções preteridas. Por outro lado, não concordava que a relação entre todas as alternativas no primeiro subconjunto fosse a de indiferença, uma vez que esta relação deveria ser entendida como intransitiva. Tal intransitividade ocorreria pela incapacidade de uma pessoa discernir diferenças mínimas, de diferenciar entre alternativas muito parecidas ou próximas; entretanto, à medida que estas diferenças se acumulam, passam a ser perceptíveis. O processo de avaliação dois a dois de alternativas próximas culmina em um caso em que uma alternativa é indiferente entre opções adjacentes, mas estritamente preferida ou preterida a outra localizada a alguns passos ao longo de uma cadeia de transições. Desta forma, nem todas as alternativas seriam indiferentes entre si no primeiro subconjunto, nem todas deveriam ter o

mesmo valor de função utilidade, o que invalidaria uma função utilidade meramente ordinal. Considere o exemplo do autor:

If, for example, we consider a series of alternatives consisting of various combinations of bread and cheese, obtained by the substitution of bread for cheese, it is possible, starting with one alternative, to make a progressive substitution of bread for cheese which preserves our indifference to the substitution as between successive steps and yet to arrive at a combination of bread and cheese which is preferred or conversely preferred to the original combination (Armstrong 1939b, nota 1, 457).

Outra passagem bastante elucidativa sobre a ligação entre a intransitividade da indiferença e uma capacidade de discernimento imperfeita ocorre em Armstrong (1950, 122).

The non-transitiveness of indifference must be recognized and explained on any theory of choice, and the only explanation that seems to work is based on the imperfect powers of discrimination of the human mind whereby inequalities become recognizable only when of sufficient magnitude.

Embora o foco fosse a teoria da escolha econômica, os exemplos que Armstrong (1939b) trabalhou com mais detalhe em seu texto são de natureza sensorial, principalmente aqueles relacionados à percepção de propriedades de cores, como o brilho ou saturação. O argumento informa que alguém pode identificar a diferença de brilho em duas opções de uma cor, uma mais brilhante e outra menos. Entretanto, ao se variar o brilho, partindo do de uma das cores até se aproximar do da outra, a percepção de diferença desaparece, mesmo que as duas não sejam, de fato, iguais. Armstrong (1939b) se apoia na noção de *diferença mínima perceptível*.⁶ O autor, entretanto, não apresenta nenhuma referência. Apenas em Armstrong (1953, 268) que algo mais significativo em termos de base teórica aparece na afirmação que “[p]sychologists have repeatedly emphasized the point in

⁶ Armstrong (1939b, 465) emprega o termo *just perceptible difference*, enquanto é mais comum a forma *just noticeable difference*, como se verifica em Edwards (1954), Luce (1956) e Algom (2021), por exemplo.

explaining the non-transitiveness of the relation ‘not perceptibly different’ in judgements about the constituent parts of fields of perception.”

A referência ao campo da psicologia sugere uma ligação com a formação original de Armstrong. Além do texto de Tribe (2022) sobre a área de ciências morais em Cambridge, recuperou-se na presente pesquisa um guia para o exame tripos em ciências morais editado por James Ward (1891), onde se verifica um item da prova de psicologia com o seguinte conteúdo: “[s]ensation and perception. Intensity, quality, and complexity of sensations. Physiology of the senses. Activity and passivity of mind. Localisation of sensations. Psychological theories of time and space. Intuition of things” (Ward 1891, 3). Adicionalmente, verifica-se no relato de Myers (1922, 486) o registro do interesse de Rivers e a pesquisa de campo que realizou a respeito da percepção de cores em diversas culturas. Ou seja, trata-se de tema que estava presente no repertório de Armstrong, dada a influência de Myers e Rivers em sua formação intelectual.

Com relação ao contexto em que Armstrong escrevia, verifica-se que existiam ao menos três antecedentes ao seu texto de 1939 com o emprego de noções similares a de minimamente perceptível. Francis Ysidro Edgeworth (1881, 99) faz referência à ideia de *incremento minimamente perceptível* (*just perceptible increment*) e de *mínimo sensível* (*minimum sensible*) como sinônimos. Embora Ng (1981) tenha relacionado as ideias dos dois autores, não há menção a Edgeworth nos artigos Armstrong, exceto uma referência à Caixa de Edgeworth em Armstrong (1951, nota 2, 262). No parágrafo 66 do Capítulo III do *Manual* de Pareto (1909, 142–143), o autor observa a limitação da capacidade de medição de pequenas variações por uma balança e estende o caso como analogia para a percepção humana. Anos mais tarde, o matemático e economista romeno Nicholas Georgescu-Roegen (1936) explorou a ideia de intransitividade da indiferença e a de *limiar psicológico* (*psychological threshold*), um conceito relacionado ao de minimamente perceptível. Armstrong (1958b, nota 3, 174) assumiu desconhecer a contribuição de Georgescu-Roegen (1936) ao publicar o seu artigo de 1939, se desculpando pelo esquecimento deste autor na ocasião.⁷ Georgescu-Roegen (1954, nota 1, 506) remete a Pareto, mesmo ponto observado anteriormente, para a ideia de limiar psicológico.

⁷ Veja Oliveira e Portella (2017) sobre o emprego do conceito de limiar psicológico nos trabalhos de Georgescu-Roegen. Os autores, inclusive, registraram a interação deste com Armstrong.

As evidências indicam, portanto, que as referências de Armstrong provi-nham daquilo que se ensinava da psicologia experimental, não apenas para alunos com especial interesse nesta área, como era o seu caso, mas também para aqueles para a qual está disciplina configurava componente parcial de sua formação, inclusive economistas. Por exemplo, é seguro afirmar, a partir do que se verificou até aqui, que uma figura de destaque como Arthur Cecil Pigou também teve acesso a este conteúdo quando obteve a sua formação em ciências morais em Cambridge.⁸ Isso explicaria, por exemplo, porque Armstrong (1939b, 457) considerou a possibilidade da intransitividade da indiferença como “[...] a well-know fact” e também por-que considerava a posição de Hicks e Allen mais radical do que a de Pareto.

Um outro exemplo da contemporaneidade destas ideias vem de Samuelson (1938b, 344), quando este criticou o emprego da *Lei de Weber-Fechner* e a noção de utilidade marginal decrescente na dedução de uma curva de demanda negativamente inclinada em alguns livros-texto.⁹ A suposta lei faz referência aos trabalhos de Ernst Heinrich Weber (1795-1878) e Gustav Theodor Fechner (1801-1887). Afirma-se aqui que é uma suposta lei dado que não se trata de um resultado único, mas de dois (Algom 2021). Será útil fazer uma pequena digressão sobre estas teorias. Segundo Algom (2021), a Lei de Weber informa que a percepção de uma diferença entre dois estímulos físicos depende da magnitude do primeiro estímulo. Por exemplo, x_0 seja um peso inicial levantado por uma pessoa e x_1 um peso final, existe uma constante k tal que $\Delta x = x_1 - x_0$ corresponderá a uma diferença mínima perceptível se ocorrer que $\Delta x = kx_0$; no caso de uma variação positiva, a percepção da diferença entre um estímulo final x_f e um inicial x_i somente ocorreria se $x_f \geq (1 + k)x_i$. Trata-se de uma lei sem variáveis psicológicas ou subjetivas (Algom 2021, 759). Já a Lei de Fechner introduz uma variável subjetiva de sensação, que informa uma percepção subjetiva de quanto foi uma variação. Seja y esta variável de sensação, então $y = m \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$, onde m é uma constante e x_1 e x_0 são estí-mulos perceptivelmente distintos.¹⁰ Ainda segundo Algom (2021, 760), as duas leis envolvem a noção de diferença mínima perceptível, entretanto, no contexto da Lei de Weber isto se refere à uma diferença de estímu-los, enquanto que no contexto de Fechner é relacionada à de sensações.

⁸ A importância da psicologia para Pigou pode ser conferida pelo trabalho de Knight (2018).

⁹ Infelizmente, Samuelson (1938b) não informou quais livros seriam estes.

¹⁰ Algom (2021) expõe como Fechner derivou sua equação assumindo a Lei de Weber, observando, porém, que este procedimento não é necessário, uma vez que os dois resultados são independentes. Masin, Zudini e Antnelli (2009) trazem elementos históricos de uma derivação anterior a de Fechner, uma realizada por Daniel Bernoulli em 1738, sem o emprego da Lei de Weber e anterior a esta.

Adicionalmente, Algom (2021, 763) recupera um enunciado alternativo da Lei de Fechner, um no qual não há referência a estímulos minimamente distintos (relacionados à Lei de Weber): “[...]‘Equal stimulus ratios produce equal sensation intervals [...] As stimulus intensity increases geometrically, sensation intensity increases arithmetically’[...]”.¹¹ Observe que a ideia de que um estímulo cresce mais rapidamente (em proporção geométrica) do que a sensação (em proporção aritmética) implicará em uma escala com variações marginais decrescentes, uma vez que a sensação é função do estímulo. O mesmo ocorre quando a variação marginal na utilidade é uma função decrescente das unidades consumidas por um ou uma agente e, daí, ser mais crível que a referência correta para a observação de Samuelson (1938b) seja relacionada à Lei de Fechner.¹² Por outro lado, os apelos de Armstrong para a necessidade de se considerar a limitação da capacidade humana em perceber variações de estímulos são diretamente relacionados à Lei de Weber.

Com estes elementos, Armstrong (1939b) sugeriu o emprego de uma função utilidade a qual classificou como cardinal. Com o emprego deste tipo de função, a noção de estritamente preferido entre duas alternativas é tal que o valor da utilidade daquela que é classificada como melhor, a preferida, é maior do que a da outra com uma certa diferença mínima. Abaixo desta diferença mínima nos valores de utilidade, as alternativas serão consideradas indiferentes. A forma como o autor chegou a este enunciado parece ter uma motivação pragmática. Uma evidência vem da interação entre Armstrong e Georgescu-Roegen. Este autor (Georgescu-Roegen (1954, nota 5, 523) observou que Armstrong havia ignorado o seu desenvolvimento original (Georgescu-Roegen 1936); caso contrário, teria verificado que a intransitividade da indiferença causado pelo limiar psicológico não implica em cardinalidade da utilidade. Em resposta, Armstrong (1958b, nota 1, 175) escreveu que não construiu a sua função utilidade por meio de uma dedução lógica a partir da intransitividade da indiferença, mas por esta respeitar este e “[...] other empirical facts”. O autor não explicita quais seriam estes outros fatos empíricos, mas é bastante provável que se trate da ordenação de diferenças e de uma proporção fixa entre estas, elementos defendidos nos seus trabalhos e que seriam garantidos pela cardinalidade da função de utilidade.¹³

¹¹ O autor da passagem é Lawrence E. Marks, a referência em Algom (2021) é: Marks, L.E. 1974, *Sensory processes*. Academic Press.

¹² Em Moscati (2007) verifica-se que o psicólogo Louis Leon Thurstone empregou a Lei de Fechner no contexto de utilidade marginal decrescente nos anos 1930 e como foi a recepção dos economistas.

¹³ Um exemplo pode ser verificado na passagem: “[...] if x, y, \dots represent the quantities of the constituents of any alternative [...] then there is a single-valued numerical function of (x, y, \dots) which gives

Armstrong também foi bastante enfático sobre a sua concepção de cardinalidade, principalmente em seu artigo de 1955, o penúltimo da série. Nesse (Armstrong 1955), o autor busca estabelecer um diálogo com Charles Kennedy, então no King's College de Oxford, que havia publicado um artigo na *Economica* um ano antes.¹⁴ Segundo Armstrong, que leu os argumentos de Kennedy com bastante simpatia, este considerava a variação de utilidades tal qual a variação de intensidades. Em sua análise, Armstrong (1955) faz uma analogia desta abordagem com variações na intensidade da luminosidade de uma lâmpada elétrica. Neste caso, a diferença entre duas luminosidades não tem uma medida em termos de luminosidade.¹⁵ Para ele, a noção de Kennedy era de uma *cardinalidade das preferências*. A concepção de Armstrong, por outro lado, é a de que a utilidade seria mensurável tal qual distâncias, onde a diferença entre duas ainda é uma distância. Ou seja, se a utilidade é mensurável, sua variação também será e na mesma unidade (puramente estabelecida por introspecção), defendendo uma ideia de *utilidade cardinal*. Outra terminologia que Armstrong (1955) empregou foi a de *densidade* em contraposição à de intensidade, trazendo a analogia de uma dor de dente, que pode ser dividida em intervalos de tempo, ou seja, mensurada em seções e na medida da própria dor. De fato, a principal estratégia de Armstrong sempre foi a de trazer exemplos simples de introspecção, buscando a experiência pessoal do interlocutor, do leitor de seus trabalhos. Ao final do texto, Armstrong (1955, 176) relaciona o seu tipo de cardinalismo (em contraposição com o de Kennedy) com os nomes de Dennis H. Robertson e de Pigou,¹⁶ informando que os autores originais já estariam mortos há um bom tempo. O exemplo da dor de dente sugere uma ligação óbvia com a abordagem de William Stanley Jevons, mas este não é nominado.

Por fim, cabe estudar o contexto das incursões de Armstrong nas teorias da escolha sob incerteza e do bem-estar social. No primeiro caso, a referência principal é o artigo de 1948, sendo seguro afirmar que a intenção de Armstrong (1948) era a de aprofundar a crítica aos principais desenvolvimentos da Revolução Ordinalista, principalmente aqueles presentes

a number-index of utility, such that if U_1, U_2 and U_3 are any three such indices, the differences between them have determinate ratios to one another." (Armstrong 1939b, 460-461).

¹⁴ Veja a referência em Armstrong (1955, nota 2, 170).

¹⁵ Armstrong (1955, 171–172) escreveu que: "[i]f I control a light with a rheostat, I can describe the rate of change of intensity with movement of the control at any point in its movement or at any given light intensity, without implying that a difference of intensity is itself an intensity".

¹⁶ Com relação a Robertson, é possível verificar a validade desta afirmação pelo artigo de Mauro Boianovsky (2014) a respeito da defesa de Robertson sobre a perspectiva de Cambridge com relação à teoria do bem-estar, sendo, inclusive o artigo de Armstrong (1955) citado.

no trabalho de Hicks e Allen (1934a), evidenciando as dificuldades de se empregar uma função de utilidade ordinal no contexto de incerteza, utilizando uma forte retórica contra esta linha teórica como, por exemplo, na afirmação de que “[...] it seems clear that a theory that irretrievably breaks down when even a trace of uncertainty is present is not even serviceable as a preliminary hypothesis.” (Armstrong 1948, 1–2). Sabe-se, desde a publicação de von Neumann e Morgenstern (1944), onde é apresentada a hipótese da utilidade esperada, que a representação de uma função utilidade para contextos de incerteza probabilística é mais restrita do que uma meramente ordinalista. Entretanto, apesar deste livro ter sido publicado quatro anos antes, não foi citado em Armstrong (1948). O autor faria referências muito breves em notas de rodapé ao trabalho de von Neumann e Morgenstern (1944) em seus dois últimos artigos (Armstrong 1955, 1958b), possivelmente objetivando registrar o conhecimento desse desenvolvimento, mas sem propor uma análise do conteúdo. Em Armstrong (1948), a análise da escolha pela soma da multiplicação de valores de utilidade por probabilidades é tratada como uma possibilidade teórica que demonstraria a superioridade da hipótese da utilidade cardinal em relação à teoria ordinalista, já que nesta última tal soma de produtos não garante condições para um adequado ranqueamento de escolhas. Por outro lado, o autor argumenta que a escolha sob incerteza pelo ranqueamento de utilidades esperadas se restringia a uma possibilidade teórica, não representando a forma como as pessoas de fato escolhem sob cenários incertos, “except perhaps for rare temperaments” (Armstrong 1948, 9). O autor, entretanto, fez questão de registrar uma maior concordância com os desenvolvimentos de George L. S. Shackle a respeito da relação entre preferências e incerteza na determinação da escolha, afirmando que “[w]hile I am loath to abandon the hypothesis tried out above as having some approximation to truth for much human behaviour, Mr. Shackle makes out a strong case for a function that works somewhat differently and I find his “psychology” persuasive and his constructions most elegant.” (Armstrong 1948, nota 1, 9).

Com relação à teoria do bem-estar social, Armstrong (1951) focou suas críticas na chamada *nova teoria do bem-estar*, a qual é comumente identificada pelos trabalhos de Abram Bergson e Samuelson.¹⁷ Entretanto, Armstrong (1951) trata o grupo de forma bastante genérica, como uma extensão do movimento ordinalista. O ponto do autor é que esta teoria falha ao ignorar a causa da intransitividade da indiferença, ou seja, o fato de que diferentes opções podem ser indiferentes entre si para uma pessoa

¹⁷ Veja Sen (1986), por exemplo, e referências em Boianovsky (2014).

e, simultaneamente, implicarem diferentes (mas não perceptíveis) níveis de bem-estar individual. A combinação das possibilidades de indiferenças perceptíveis e imperceptíveis em uma agregação poderiam gerar contradições com os pressupostos originais empregados pela teoria ordinalista. A conclusão do autor é que “[...] group-welfare variation is a rising function of the sum of individual welfare variations” (Armstrong 1951, 265), uma vez que seria necessário eliminar efeitos não perceptíveis de bem-estar em um nível individual para todos os indivíduos de uma agregação. Estes são os anos do debate de Robertson, inclusive com Bergson, em defesa da abordagem cardinalista de Cambridge para o bem-estar (Boianovsky 2014). Como verificado anteriormente, Armstrong se filiava diretamente à abordagem de Robertson e pode ter aproveitado o início dessas discussões para fazer uma aplicação adicional das suas ideias contra o grupo ordinalista, embora tenha construído argumentos originais, não havendo evidências de que teve acesso à pesquisa de Robertson na ocasião em que escreveu o seu artigo de 1951.

Armstrong teve, ainda, um debate particular com Jerome Rothenberg (1953, 1954). Os argumentos deste autor desafiaram os requisitos de Armstrong para uma teoria cardinal da escolha social, principalmente a relevância do conceito de *preferência marginal*, ou seja, a necessidade de uma diferença mínima perceptível para alcançar uma situação de preferência ao invés de indiferença, para uma teoria da agregação. A resposta de Armstrong ao primeiro artigo de Rothenberg veio em 1953, com a reafirmação de sua teoria e a busca por esclarecer eventuais lacunas.

Um fato de destaque é que o artigo de Armstrong de 1951 sobre bem-estar social é um trabalho diferente dentro da série em análise. Nesse (Armstrong 1951), o autor se esforçou para aplicar o método de dedução de resultados a partir de axiomas. Entretanto, Armstrong não trabalhava com o rigor de uma estrutura de prova matemática, seus objetivos eram mais relacionados com a tentativa de encontrar contradições na teoria de base ordinalista, contradições estas que, via de regra, emergiam quando se consideravam a intransitividade da indiferença. Um dos argumentos de Rothenberg (1953) é que o resultado de Armstrong não provinha de seus axiomas.

Inspirado neste debate, o economista indiano Tapas Majumdar – doutorando na London School of Economics sob a orientação de Robbins na ocasião – publicou um artigo sobre o trabalho de Armstrong. Em Majumdar (1957) é defendida a tese de que as abordagens de Armstrong e dos ordinalistas

não são excludentes, mas sim compatíveis. Para este autor, na teoria desenvolvida por Hicks e Allen, a noção de indiferença seria derivada de uma *compensação* em termos da adição de uma quantidade de um bem dada a subtração na quantidade de outro; Majumdar (1957) informa que, em teoria, sempre seria possível encontrar alternativas que fossem indiferentes neste sentido, formando, assim, um conjunto de opções indiferentes entre si, ou seja, na qual a transitividade é automática. Já para Armstrong, segundo Majumdar (1957), a ideia de indiferença é outra, parte de uma noção de *proximidade*; para uma opção, ou uma cesta, haverá uma outra diferente, mas suficientemente parecida a ponto de o agente da escolha não ser capaz de diferenciá-la da primeira. Na perspectiva de Armstrong, a intransitividade seria demonstrada por uma cadeia de alternativas próximas, uma com um ponto de partida e um de chegada, sempre com duas alternativas próximas o suficiente para serem consideradas indiferentes, mas com uma relação de preferência estrita entre as alternativas nos extremos. Para Majumdar (1957), a noção de indiferença de Hicks e Allen não contempla esta ideia de cadeia, todas as alternativas são possibilidades que compensam a variação de uma pela outra. Sendo, assim, a compatibilidade entre as duas formas de indiferença uma possibilidade decorrente do fato de tratarem elementos distintos da escolha.

Ao analisar a teoria da escolha do bem-estar social de Armstrong e elementos do debate com Rothenberg, Majumdar (1957) informa que, embora Armstrong tenha trazido elementos importantes para a discussão de comparação interpessoal de bem-estar, a sua teoria de agregação desta variável seria problemática. Parte da argumentação em Armstrong (1951) ocorre por meio de um exemplo simples, uma sociedade com apenas dois indivíduos, para a qual ele construiu uma análise ordinalista que resulta em uma contradição. A crítica de Majumdar (1957) é que Armstrong constrói este exercício assumindo a intransitividade da indiferença no nível individual, enquanto exige que as preferências do grupo (no caso, os dois indivíduos) sejam transitivas. Posteriormente, a tese de doutorado de Majumdar foi publicada na forma de um livro (Majumdar 1958). O nono capítulo deste livro é intitulado *The Introspective Cardinalist – A Revival* e é dedicado à teoria de Armstrong. Apesar de grande parte do conteúdo ser uma reprodução do seu artigo já mencionado, há alguma reflexão sobre o próprio papel de Armstrong como um “neo-cardinalista”. Um argumento de Majumdar (1958) informa que Armstrong não derivava a cardinalidade de suas hipóteses, mas que simplesmente assumia esta forma. Desta maneira, Armstrong teria se aproximado do ordinalismo com sua própria

noção de indiferença e, apenas após estabelecer sua crítica, teria assumido uma defesa da cardinalidade. Este ponto se aproxima daquele verificado na interação entre Armstrong e Georgescu-Roegen.

Armstrong (1958a) publicou uma resenha elogiosa do livro de Majumdar (1958) na *Economica*, informando, porém, que não concordava com a compatibilidade entre a sua visão teórica sobre indiferença e a de Hicks e Allen; mesmo que existisse um conjunto de indiferença determinado por compensações exatas, existiriam também alternativas próximas o suficiente aos elementos deste conjunto, sendo impossível discernir qual alternativa pertencia e qual não pertencia ao conjunto de indiferença nestes casos. Além disso, Armstrong (1958a) afirmou não ter encontrado na obra de Majumdar nenhuma refutação de seu cardinalismo. Sobre a crítica do economista indiano ao seu exemplo, o qual gerava um resultado contraditório para a teoria ordinalista, Armstrong (1958a, 352) escreveu:

Mr. Majumdar has [...] brought out neatly one important point, namely, that the concept of group-preference, implicit in my concept of group-welfare, is not transitive. I quite agree, but the purpose of my argument was to discover the consequence of adopting the ordinalist's axiom that a community is better off with *A* than *B* if some members prefer *A* to *B* and no members prefer *B* to *A*. I think this axiom is trivially false, but if my opponents adopt an axiom which implies what I assert on other grounds, it would be churlish to look such a gift-horse in the mouth.

2.3. Outros comentários sobre o trabalho de Armstrong publicados até o ano de 1958

Nesta subseção serão apresentadas algumas repercussões do trabalho de Armstrong em teoria da escolha que foram publicadas até o ano de 1958, ou seja, até o último ano em que se verifica sua atividade de pesquisa na área, mas para as quais não foram encontradas respostas ou comentários do autor.

A primeira, embora muito breve, é importante pela autoria. No livro *A Revision of Demand Theory*, Hicks (1956, nota 1, 17) escreveu o seguinte comentário sobre repercussões de seu trabalho em teoria da escolha

baseada em preferências: “[t]he modifications proposed by Professor J. S. Duesenberry [...] are in the nature of qualifications of the preference hypothesis, rather than a rejection of it. The same holds, I think, for those put forward by Mr. W. E. Armstrong.” As referências de Hicks são os artigos de Armstrong de 1939 e 1950. Como Armstrong (1958a) fez referência a este livro na resenha sobre a publicação de Majumdar (1958), é bastante provável que tivesse conhecimento do comentário de Hicks.

Uma resposta à posição dúbia e talvez condescendente de Hicks foi dada por H. A. J. Green (1958), um artigo publicado na *Metroeconomica* bastante elogioso e filiado às ideias de Armstrong.¹⁸ A motivação de Green (1958) foi a de, justamente, demonstrar que as críticas de Armstrong eram mais fundamentais do que a referência de Hicks (1956) pode fazer crer, proporcionando uma apresentação bastante abrangente das contribuições de Armstrong.

Em outro campo, consta a importante crítica presente no artigo do psicólogo Ward Edwards (1954), um *survey* sobre teorias de tomada de decisão, apresentando resultados de outras áreas, principalmente a economia, para psicólogos.¹⁹ Sobre Armstrong (1939b, 1948, 1950), Edwards (1954, 388) informa que: “[i]ncidentally, failure on the part of an economist to understand that a just noticeable difference [...] is a statistical concept has led him to argue that the indifference relation is intransitive[.]” Embora Armstrong tenha considerado elementos de aleatoriedade na tomada de decisão já em seu artigo de 1939, é seguro afirmar que a crítica de Edwards (1954) é correta, ou seja, é de fácil verificação que Armstrong empregou o conceito em um contexto determinista, sem fazer nenhuma ressalva. Outra observação é a de que Georgescu-Roegen (1936) foi mais rigoroso neste sentido, preservando a natureza probabilística no seu uso da noção de limiar psicológico. Em Luce (1956), por exemplo, onde as ideias de Armstrong são formalizadas e estendidas, é reconhecido que o conceito de diferença mínima perceptível de forma determinista trata-se de uma extrapolação da ideia original provinda da psicologia experimental. A contribuição de Luce (1956) é o objeto da próxima seção.

¹⁸ O nome do artigo é “Mr. Armstrong and the Theory OD Demand”, onde “OD” é, muito provavelmente, um erro de digitação, mas que está mantido assim até o presente momento no sítio eletrônico da publicação: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/j.1467-999X.1958.tb00798.x> (acessado em 07/06/2025).

¹⁹ Trata-se de um artigo bastante citado, com mais de 5000 ocorrências pela métrica do Google Scholar e mais de 1400 pelo Web of Science.

3. Luce e a formalização da semiordem

Robert Duncan Luce (1925-2012) foi um matemático norte-americano que deixou várias contribuições para as ciências sociais – principalmente a psicologia, onde teve um papel pioneiro – por meio de sua singular capacidade de sintetizar resultados em termos formais e da aplicação da metodologia axiomática. Foi um dos responsáveis pela criação do *Journal of Mathematical Psychology* e recebeu diversas honrarias das áreas de ciências sociais e comportamentais, sendo membro eleito membro da U.S. National Academy of Sciences em 1972 e condecorado com a U.S. National Medal of Sciences em 2003, a maior distinção governamental para contribuições científicas de seu país (McClelland 2012; Gallistel e Krantz 2013).²⁰

Luce (1989) escreveu uma autobiografia científica na qual pode ser verificada a sistematização e evolução de sua pesquisa. Nesta, o autor informou ter ingressado no Massachusetts Institute of Technology (MIT) em 1942 para cursar engenharia aeronáutica. No entanto, as disciplinas de física e matemática lhe interessaram mais. Em 1943 participava de um programa de formação de oficiais da Marinha dos Estados Unidos e não pode trocar o curso de engenharia por outro mais próximo de seus novos interesses.²¹ Luce chegou a servir a bordo de um navio porta-aviões após o final da II Guerra Mundial, como oficial de catapulta, tendo retornado ao MIT para a pós-graduação em matemática aplicada. Foi nesse momento que surgiram as primeiras incursões à sistematização e formalização de problemas relacionados à psicologia. Embora não houvesse um departamento de psicologia no MIT à época e Luce não ter formação na área, o relato de um colega sobre problemas em contextos de redes sociais que sugeriam uma representação matemática o levou a se interessar pelas possibilidades de aplicação na área. McClelland (2012) informa que a tese de Luce foi em álgebra abstrata, e o próprio relata que “[f]or reasons not wholly clear to me, a young algebraist named I. S. Cohen was assigned as my advisor on the then very unapplied topic of semigroups” (Luce 1989, 247). Apesar disso, Luce acreditava que não teria sucesso em matemática pura, por não ter os

²⁰ Uma curiosidade é que Luce morou no Brasil, tendo passado um ano entre 1968 e 1969 na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, a convite do psicólogo social Aroldo Rodrigues e dentro do programa de professor visitante da Organização dos Estados Americanos (Luce 1989, 273). Na mesma passagem, o autor informou que o motivo principal desta experiência foi o fato de sua esposa desejar viver em um local com clima mais agradável, mas que ele não conseguiu aprender a língua e também não percebeu maior interesse de seus anfitriões em sua pesquisa.

²¹ Sobre este programa da marinha dos EUA há uma passagem de destaque do autor (Luce 1989, 246): “the snobbery of the Navy being such that its officers, even during a major war whose outcome in 1943 still seemed uncertain, must have college degrees”.

requisitos necessários. Por outro lado, também considerava seu trabalho em psicologia matemática uma escolha acadêmica de risco, uma vez que não havia matemáticos em departamentos de psicologia naquele período, chegando a considerar a área de economia em um primeiro momento.

Luce (1989, 247) sistematizou o conjunto de sua pesquisa em quatro grandes áreas: interações em grupos, teoria probabilística da escolha, psicofísica e fundamentos da mensuração. Informou, ainda, que o primeiro grupo, que contém a parte de teoria dos jogos, era o único mais independente das demais categorias. Após defender sua tese em 1950, Luce permaneceu no MIT até 1953, quando chegou à Columbia University, em Nova York. Nessa ocasião, se dedicou ao estudo da teoria dos jogos e conheceu o também matemático Howard Raiffa, seu coautor no livro *Games and Decision* (Luce e Raiffa 1957), um dos primeiros manuais na área. Sobre esta experiência, Luce (1988) informa que estudava problemas com um número arbitrário de jogadores (*n-person games*) e teoria da informação, enquanto Raiffa se dedicava ao estudo de jogos com apenas dois jogadores, quando decidiram unir seus esforços em um único material.

Entretanto, antes de finalizar o livro, Luce esteve como pesquisador bolsista para o período de 1954-1955 no então recém fundado Center for Advanced Study in the Behavioral Sciences (CASBS) da Universidade de Stanford, na Califórnia. O autor (Luce 1989, 249) informou que esta experiência marcou uma mudança de foco em sua pesquisa e que ficou fascinado com a teoria de von Neumann e Morgenstern (1944) e os desenvolvimentos de Weber e Fechner. Foi nesta ocasião que desenvolveu o seu artigo sobre semiordens (*semiorders*) (conforme consta em Luce (1956, nota 1, 178) publicado na *Econometrica* em 1956, quando já estava de volta à Columbia University. É nesse artigo que Luce formaliza e expande as ideias de Armstrong e, portanto, esse é o seu desenvolvimento de maior interesse para o presente trabalho. Segundo o relato autobiográfico de Luce (1989), este desenvolvimento pertence à categoria de fundamentos da mensuração no conjunto de sua obra. Desta forma, cabe aqui destacar a percepção do próprio autor (Luce 1989, 260–261) sobre elementos epistemológicos deste conjunto em seu trabalho:

In contrast to my work on choice behavior and psychophysics, where the models are probabilistic, that in the foundations of measurement is algebraic. My training strongly favored this approach, and I have always found algebra more aesthetic than analysis;

however, such models are usually difficult to relate satisfactorily to experiments. I suspect that the best way to look at them is as descriptions of some central tendency of a process that is best thought of as probabilistic. When the latter is quite complex or ill understood, however, it may be best to begin with just the central tendency.

A semiordem é uma categoria desenvolvida e nomeada pelo próprio Luce (1956), tratando de uma generalização de uma ordem fraca. Como se sabe, uma ordem fraca fornece uma estrutura de escolha por meio de comparações binárias e consiste de duas relações, uma de preferência (\succ) e outra de indiferença (\sim), onde se observam os axiomas acerca da completude (para x e y disponíveis à escolha, deve se observar que ocorre de forma excludente que $x \succ y$, $y \succ x$ ou $x \sim y$), sobre \succ ser não reflexiva (não ocorre $x \succ x$), da simetria de \sim ($x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$) e da transitividade das duas relações.^{22 23}

Luce (1956) observa que, apesar de haver experimentos onde foram registradas evidências contrárias à transitividade da relação \succ de preferência, esta pode ser defendida por meio de argumentos normativos, que a ideia de racionalidade não prescinde da transitividade da relação de preferência estrita. Luce não explicita este requisito para a racionalidade, mas é seguro afirmar que está se referindo ao problema de circularidades na escolha, uma vez que logo em seguida (Luce 1956, 179) traz uma citação direta de Savage para reforçar seu argumento, uma na qual este autor informa que a percepção de uma circularidade em suas preferências teria o mesmo efeito sobre ele mesmo do que a constatação de que suas crenças são logicamente contraditórias. Em outra passagem, Luce (1956, nota 2, 180) demonstra proximidade profissional com Savage, registrando o auxílio deste na pesquisa. Este fato deve ser registrado uma vez que Friedman e Savage (1948) haviam citado a defesa de Armstrong acerca da intransitividade da indiferença, podendo ser este o elo entre Armstrong e Luce.

²² A apresentação da transitividade já foi bastante discutida neste texto.

²³ Luce (1956, 178) propõem uma definição distinta onde \sim é classificada como uma relação de equivalência. O autor também emprega o símbolo $>$ ao invés de \succ . As escolhas aqui remetem ao que é mais empregado na área de economia, com o objetivo único de praticidade no processo de interlocução com o leitor.

Retornando ao estudo do texto, Luce (1956) defende que a transitividade da relação de indiferença teria pouco suporte. Segundo este (Luce 1956, 179), “[t]he author who has most repeatedly questioned this assumption is Armstrong”, citando os artigos 1939, 1948, 1950 e 1951 da série sobre escolha deste autor. Em sequência, Luce (1956, 179) faz a citação direta da mesma passagem de Armstrong (1950) apresentada aqui neste trabalho, na Subseção 2.2, a que versa sobre as imperfeições na capacidade de discriminação na mente humana. Na mesma página, Luce (1956) recupera as noções da psicofísica para a apreciação imperfeita de estímulos, dando um exemplo sobre percepção de diferentes pesos. Reconhecendo que é necessário um exemplo mais próximo do problema de escolha, Luce (1956, 179) propõem o seguinte experimento mental:

Find a subject who prefers a cup of coffee with one cube of sugar to one with five cubes (this should not be difficult). Now prepare 401 cups of coffee with $(1 + \frac{i}{100})x$ grams of sugar, $i = 0, 1, \dots, 400$, where x is the weight of one cube of sugar. It is evident that he will be indifferent between cup i and cup $i + 1$, for any i , but by choice he is not indifferent between $i = 0$ and $i = 400$.

Adicionalmente, Luce (1956, 179) irá informar que existe “[...] a basic philosophic objection to the assumption that \sim is transitive”, a partir da consideração do princípio da incerteza de Heisenberg, o qual impõe limitações fundamentais (ontológicas) ao processo de medição.

Por fim, como já observado anteriormente, Luce sabia que a noção de diferença mínima perceptível tinha origem em um contexto probabilístico,²⁴ então escreveu que “[t]he theory we shall obtain yields a non-statistical analogue of the “just noticeable difference” concept of psychophysics” (Luce 1956, 180).

Será necessário entrar em algum detalhe técnico sobre as premissas e a formalização de Luce (1956) para apreciar como que este autor conseguiu transcender os feitos de Armstrong. Seguindo Luce (1956, 181), a noção

²⁴ Durante o período no CASBS de Stanford, Luce desenvolveu outras pesquisas. Uma delas resultou em um artigo em parceria com Ward Edwards (Luce e Edwards 1958), o mesmo que havia observado a extrapolação de Armstrong para o emprego da noção de diferença mínima perceptível para um contexto determinista. Em Luce e Edwards (1958), uma das contribuições é a verificação de que Fechner cometeu um erro na derivação da fórmula que expressa sua lei, além da sugestão de um novo método de derivação da relação de diferenças minimamente perceptíveis no contexto explorado por Fechner.

de semiordem pode ser definida como a seguir. Sejam S um conjunto de opções ou cestas disponíveis para um agente e a, b, c, d alternativas arbitrárias em S . Uma semiordem com relações binárias P e I estabelece um semiordenamento (*semiordering*) das alternativas em S quando são observados quatro axiomas: (i) (completude) ocorre de forma excludente que aPb , ou que bPa ou alb ; (ii) (reflexividade de I) aIa ; (iii) a ocorrência simultânea de aPb , bIc e cPd implica aPd ; (iv) a ocorrência simultânea de aPb , bPc e bId implica que não podem ocorrer simultaneamente as relações aId e cId . Para ilustrar os dois últimos axiomas, Luce (1956, 181–182) emprega figuras nas quais um segmento maior e orientado (da esquerda para a direita) entre duas alternativas representa a relação P e é chamado de *intervalo de preferência*, enquanto um segmento menor e não orientado representa a relação I , sendo chamado de *intervalo de indiferença* entre duas alternativas. O resultante é que para três alternativas, $a, b, c \in S$, se há um intervalo de preferência partindo de a para b (aPb) e, em sequência, um intervalo de indiferença entre b e c (bIc com c mais próximo de b do que de a), então não pode ocorrer que aIc . É evidente, portanto, que para Luce (1956) existem diferentes graus de preferências entre variações de alternativas, assim como para Armstrong.

Luce (1956, 182) demonstrou, ainda, que uma ordem fraca pode ser induzida por uma semiordem, ou seja, definindo uma semiordem com suas relações P e I e as relações $>$ e \sim de modo que: $a > b$ é uma relação determinada pela ocorrência de quaisquer das três situações a seguir: (i) aPb ; (ii) alb simultaneamente a aIc e cPb ; (iii) alb simultâneo a aPd e dIb ; além disso, se não ocorrer que $a > b$ e nem que $b > a$, então $a \sim b$. Com esta definição, Luce (1956) conseguiu desenvolver um conjunto de resultados, demonstrando que a ordem fraca induzida é um caso particular da semiordem, que quando existe uma função utilidade que representa a ordem fraca é possível obter uma função utilidade para a semiordem que induz esta ordem fraca e para a qual é definida uma diferença mínima perceptível determinista. Por fim, o autor também estabeleceu resultados para um espaço de escolhas compatível com escolhas sob incerteza probabilística, em uma extensão do modelo de escolhas de von Neumann e Morgenstern (1944), mas com os requisitos de uma semiordem. Ou seja, em apenas um artigo, Luce construiu toda a base formal que faltava em Armstrong, com exceção de sua teoria do bem-estar. Entretanto, Luce não ignorava esta última contribuição de Armstrong, tendo citado este autor neste contexto em seu livro com Raiffa (Luce e Raiffa 1957, 348).

Em resumo, se Armstrong se aproximou dos argumentos ordinalistas, como defende Majumdar (1958), com uma noção distinta da de Hicks e Allen sobre a indiferença, Luce empregou uma das estratégias mais recorrentes no discurso científico, criou uma categoria de ordenações que generalizava o objeto matemático que emergiu como solução natural para a teoria ordinalista, a ordem fraca.

Apesar de ter estabelecido um conjunto importante de resultados com seu artigo sobre semiordens, Luce acreditava que o tema não seria incorporado com facilidade no ramo dominante da teoria econômica. Em seu livro com Raiffa, Luce apresentou a seguinte lista de possíveis motivos para a dominante consideração de relações transitivas na teoria:

We may say that we are only concerned with behavior which is transitive, adding hopefully that we believe this need not always be a vacuous study. Or we may contend that the transitive description is often a “close” approximation to reality. Or we may limit our interest to “normative” or “idealized” behavior in the hope that such studies will have a metatheoretic impact on more realistic studies. In order to get on, we shall be flexible and accept all of these as possible defenses, and to them add the traditional mathematician’s hedge: transitive relations are far more mathematically tractable than intransitive ones (Luce e Raiffa 1957, 25–26).

Entretanto, o trabalho de Luce motivou uma série de desdobramentos. O autor com mais contribuições diretamente ligadas à economia neste conjunto é Fishburn; seu papel neste episódio será estudado a seguir.

4. As contribuições de Fishburn

Peter Clingerman Fishburn (1936-2021) é o personagem deste trabalho com a mais vasta produção acadêmica, sendo seguro admitir que é o mais conhecido na área de economia, principalmente por seus trabalhos em teoria da utilidade e da escolha social. Seguindo a página dedicada a este autor no sítio eletrônico do Institute for Operations Research and the

Management Sciences (INFORMS) e um obituário de Brams, Gehrlein e Roberts (2021) publicado na *Social Choice and Welfare*, sabe-se que Fishburn se formou como engenheiro industrial em 1958 na Pennsylvania State University e que defendeu seu doutorado em pesquisa operacional em 1962 no Case Institute of Technology, em Ohio, sob a orientação de Russell Ackoff; embora haja informação de que Fishburn trabalhou de forma bastante independente em sua tese. Seu primeiro livro (Fishburn 1964) é resultante dessa tese e das aulas que ministrou no Case Institute, como pode ser verificado no prefácio da obra. Luce, ao contrário de Armstrong, é citado já nesse primeiro livro. Em reconhecimento às suas contribuições científicas, Fishburn recebeu a medalha Frank P. Ramsey²⁵ e o prêmio John von Neumann (Brams, Gehrlein e Roberts 2021).

No prefácio de um livro de ensaios em homenagem a Fishburn, os editores informam que as contribuições deste podem ser classificadas em três grupos, sendo o primeiro definido pelos tópicos de utilidade, preferência, escolha individual, probabilidade subjetiva e teoria da mensuração; o segundo, em teoria da escolha social, modelos de votação e bem-estar social; além de um terceiro grupo em tópicos da matemática (Brams, Gehrlein e Roberts 2009, v).²⁶ O primeiro ensaio deste livro é escrito por Luce e mais dois coautores (Luce, Marley e Ng 2009); logo na primeira linha, Luce informa que conheceu Fishburn há, então, 45 anos, ou seja, por volta de 1963 ou 1964, em um colóquio na Universidade da Pennsylvania, tendo se reencontrado com frequência ao longo de suas carreiras (Luce, Marley e Ng 2009, 5).

Com relação ao foco do presente trabalho, verifica-se que Fishburn citou ao menos um dos trabalhos de Armstrong em teoria da escolha em 16 artigos entre 1968 e 1997,²⁷ seis apenas no ano de 1970, sendo dois no *Journal of Economic Theory* (Fishburn 1970a, 1970d) e um na *Econometrica* (Fishburn 1970c). No extenso período que vai de 1968 a 2001, Fishburn citou o trabalho de Luce (1956) em semiordens em 49 artigos.²⁸ Tanto Luce quanto Armstrong são citados nos livros de teoria da utilidade (Fishburn 1970f) e de teoria da escolha social (Fishburn 1973b). Dado a extensão da

²⁵ Assim como Luce.

²⁶ Para uma apreciação da diversidade e importância do trabalho de Fishburn, Hupman e Simon (2022) realizaram um estudo onde investigam o impacto de 11 de seus trabalhos mais influentes.

²⁷ Dados levantados pelo Google Scholar e no Web of Science. Alguns comentadores do presente trabalho recomendaram o uso da base de dados do JSTOR, dado que o principal artigo de Armstrong na série é de 1939. Entretanto, a escolha feita aqui mostrou ser mais abrangente do que ocorreria pelo JSTOR.

²⁸ Dados do Web of Science.

obra de Fishburn, a presente análise focará nos desenvolvimentos de 1968 a 1977 e que fazem referência à Armstrong, privilegiando, assim, a ligação com o autor original e permanecendo no contexto histórico dos desdobramentos mais recentes do desenvolvimento de Luce (1956).²⁹

O primeiro artigo de Fishburn (1968) com referência ao trabalho de Armstrong é uma extensa revisão da teoria da utilidade baseada em relações binárias, publicado na *Management Sciences*, um periódico publicado pelo INFORMS. Armstrong e Luce são citados em uma nota de rodapé (Fishburn 1968, nota 2, 336), onde o autor traz uma revisão bibliográfica sobre posições contrárias e favoráveis à noção de transitividade, tanto da relação de preferência quanto a de indiferença. Um destaque maior a Armstrong é dado em Fishburn (1970b), um *survey* sobre a intransitividade da indiferença publicado na *Operations Research*, outro periódico relacionado ao INFORMS. Nesse artigo há uma epígrafe com a seguinte afirmação de Armstrong (1948, 3): “[t]hat indifference is not transitive is indisputable, and a world in which it were transitive is indeed unthinkable.” Este *survey* de Fishburn analisa as implicações da intransitividade da indiferença na teoria da preferência em geral, na teoria do consumidor, na aditividade de utilidades,³⁰ na área de probabilidade qualitativa, na de utilidade esperada e, por fim, na teoria da escolha social. Apesar de ser um relatório bastante técnico, como várias obras do autor, há diversos exemplos ilustrativos.³¹

O maior destaque para Armstrong nessa série de artigos ocorre em um publicado na revista *Synthese*, um periódico relacionado às áreas de epistemologia, metodologia e filosofia da ciência. Nesse, Fishburn (1970g, 205) informa que:

²⁹ Recentemente o *Journal of Mathematical Psychology* publicou um número em homenagem a Fishburn, o editorial foi escrito por Roberts, Davis-Stober e Regenwetter (2024). Nesse, há uma sistematização e apresentação técnica das diversas contribuições de Fishburn, muitas das quais ligadas ao trabalho derivado do de Luce.

³⁰ A aditividade de utilidades ocorre, no contexto da teoria do consumidor, quando uma cesta com n quantidades de n tipos de bens é avaliada por uma função utilidade definida pela soma de n utilidades independentes, uma para cada uma das quantidades dos diferentes bens, ou seja, algo possível quando não há efeitos de substituíbilidade, complementaridade ou externalidade nos consumos.

³¹ Em um destes, no contexto de probabilidades qualitativas, o autor remete a Keynes (Fishburn 1970b, 209): “Let $A =$ ‘it will rain in London within the 12-hour period beginning at noon on June 1, 1976,’ $B =$ ‘it will rain in London within the 13-hour period beginning at noon on June 1, 1976,’ $C =$ ‘it will snow in Chicago within the 48-hour period beginning at noon on January 1, 1978’.” Then surely $A < B$, but quite possibly $A \sim C$ and $B \sim C$.”

Until fairly recently, studies in preference theory usually assumed that $<$ is a weak order. The earliest study I know of in which the transitivity of indifference was seriously challenged was done by Armstrong (1939). This and later work by Armstrong (1948, 1950) did not appear to have a great impact until Luce (1956) incorporated the notion of intransitive indifference in his study of semiorders. In the last few years, due largely to the pioneering of Armstrong and Luce, a number of papers on preference theory without transitive indifference have appeared.

Portanto, percebe-se que grande parte da pesquisa de Fishburn, em seu início de carreira, é direcionada à síntese e extensão do muito do que foi discutido após o texto de Luce. Adicionalmente, é seguro afirmar que o autor faz questão de remeter a Armstrong, mesmo quando identifica fragilidades. Nesse artigo (Fishburn 1970g), por exemplo, o autor introduz uma relação binária para a comparação de transições entre escolhas, como bastante discutido nos anos 1930. Uma das possibilidades introduzidas por Fishburn (1970g) foi a desta relação binária ter a mesma estrutura de uma semiordem, ou seja, de preservar a intransitividade da indiferença. Há uma subseção nesse artigo intitulada *Armstrong's Unusual Viewpoint*. Nessa, além de Fishburn (1970g, 215) ter reconhecido que a noção de semiordem já estava presente no trabalho de Armstrong, também analisou criticamente o cardinalismo deste autor. Isto ocorre no caso em que Armstrong considerou ser possível seccionar recorrentemente o conjunto de alternativas em dois grupos, identificando uma alternativa que se posiciona exatamente entre a melhor e a pior em um segmento. Fishburn alerta que, mantida a intransitividade da indiferença pela perspectiva de Armstrong, haveria uma incoerência no processo, uma vez que para alternativas suficientemente próximas (com o avançar do processo de divisão do conjunto de alternativas), não haveria como identificar aquela que se posiciona no meio, informando que “[p]erhaps it is not surprising that the viewpoint put forth by Armstrong has not been widely adopted” (Fishburn 1970g, 215).

Nos trabalhos restantes, as referências a Armstrong são breves, apenas para registrar o seu trabalho dentre outras referências ligadas à noção de intransitividade da indiferença. Em Fishburn (1970d), o autor emprega

um conceito mais simples do que o de uma semiordem, a saber, o de uma *subordem* (*suborder*) para desenvolver um modelo de escolhas com alternativas de cestas de bens.³² Em Fishburn (1970a, 1970c, 1970e, 1971, 1973a), o autor estabeleceu uma ampla discussão e sugestões teóricas para o problema de escolha social no contexto de intransitividade da indiferença no nível individual, enquanto que em Fishburn (1972, 1975) é a pesquisa em escolhas sob incerteza que são investigadas neste contexto. Já no artigo de 1974 (Fishburn 1974), o autor oferece um *survey* das principais contribuições e perspectivas sobre ordenações lexicográficas, um caso bastante conhecido de preferências que não possuem representação na forma de função utilidade. Por fim, Fishburn (1977) é um compilado de resultados para as teorias da escolha baseadas em relações binárias e das mais diversas configurações, além de funções (correspondências) de escolha, e de funções de escolha probabilística, caso em que se verifica a probabilidade da escolha de qualquer componente de um subconjunto do conjunto factível de escolhas; além das inter-relações entre estas três possibilidades teóricas. De uma forma geral, pode-se dizer que, além de Fishburn ter sido muito bem-sucedido na pesquisa inovativa, tendo estendido e generalizado vários resultados, ele tinha uma preocupação com a síntese e divulgação didática destes, seja em artigos de compilações, seja em seus vários livros.

Por fim, chama à atenção o número de trabalhos de Fishburn sobre escolha coletiva no conjunto explorado (Fishburn 1970e, 1970c, 1970a, 1971, 1973a, 1973b), uma área trabalhada por Armstrong, mas que Luce não explorou no contexto de intransitividade da indiferença. Parece que esta área tem sido mais aberta à esta forma de indiferença do que a de escolha individual na economia. Por exemplo, Amartya Sen (1969) trabalha com o conceito de *quasi-transitividade*, uma situação em que é exigida a transitividade da relação de preferência estrita apenas.³³ A conclusão é que o trabalho de Fishburn tem importância qualitativa e quantitativa dentro do episódio estudado neste artigo.

³² O conceito de subordem é mais simples do que o de semiordem porque exige menos requisitos, mas é mais técnico. Adaptando de Fishburn (1970d): seja X um conjunto de alternativas, uma relação binária R é definida pelo conjunto de duplas ordenadas (x, y) tais que xRy para $x, y \in X$. Uma composição RR , por sua vez, é uma relação binária definida pelo conjunto de duplas ordenadas (x, y) tais que xRy conjuntamente a zRy para algum $z \in X$. Da mesma forma, é possível definir RRR , $RRRR$, etc. Seja $R^t = RURURRRU\dots$, então R é uma subordem se a relação binária R^t é irreflexiva, ou seja, se não ocorre $xR^t x$. Uma aplicação desta categoria ocorre, por exemplo, no axioma forte da preferência revelada (Fishburn 1970d, 321).

³³ Como registrado na introdução, Sen (1971) expressou concordância com os argumentos de Armstrong, mas esse é um artigo sobre preferência revelada e não escolha social. Os artigos de Luce (1956) e Fishburn (1970c, 1970b) também constam nas referências desse trabalho de Sen.

5. Considerações finais

O desenvolvimento cuja história foi investigada no presente trabalho foi classificado como desviante por não se limitar às hipóteses do modelo padrão de escolha racional da teoria econômica, partindo de uma crítica e culminando em um conjunto de generalizações. A narrativa parte de um ex antropólogo de Cambridge, um economista formado no pensamento cardinalista dominante nessa universidade, e que escrevia de forma bastante livre, como comum em sua época, mas sem muito cuidado no registro das referências para seus argumentos e sem grande apego aos métodos matemáticos que se desenvolviam na área. Entretanto, trabalhou com uma grande persistência em indicar que a convenção teórica que se formava carregaria uma falha empírica ao violar evidências da psicologia experimental e a lógica da introspecção.

Armstrong não era um autor desconhecido por parte da elite da profissão do pós-guerra aos anos 1970, conforme evidenciado na introdução deste trabalho. Entretanto, Fishburn estava correto ao informar que o trabalho de Armstrong teve pouco impacto até o desenvolvimento da noção de semiordem por Luce. Adicionalmente, mesmo tendo Luce e Fishburn publicado seus resultados em grandes periódicos da área, e, no caso do segundo, de ser uma referência para aqueles que buscam aprofundamento teórico em vários tópicos da economia, não se observa a introdução de relações binárias com a indiferença intransitiva corriqueiramente em economia. Sendo seguro, portanto, manter o rótulo de desenvolvimento permanentemente desviante para os tópicos estudados aqui.

Como visto, Luce apontou o fato de relações transitivas serem mais tratáveis em termos matemáticos como uma explicação para seu papel dominante na teoria. Isso foi antes de todo o esforço de Fishburn, principalmente, mas também de outros autores, em estabelecer um vasto conjunto de possibilidades de representações de relações para situações em que a transitividade da indiferença pode ser relaxada. Investigações futuras podem explorar as possibilidades para que este ramo da teoria ainda permaneça à margem do conjunto teórico principal em microeconomia.

Referências

- Algom, D. 2021. “The Weber–Fechner Law: A Misnomer That Persists but That Should Go Away”. *Psychological Review* 128 (4): 757–765.
- Allais, M. 1953. “Le Comportement de l’Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l’Ecole Americaine”. *Econometrica* 21 (4) : 503–546.
- Anônimo. 1980. “W. E. Armstrong”. *The Times* 26 de março:19.
- Armstrong, W. E. 1924. “Rossel Island Money: A Unique Monetary System”. *The Economic Journal* 34 (135): 423–429.
- Armstrong, W. E. 1939a. “*Primitive Polynesian Economy*. By Raymond Firth”. *The Economic Journal* 49 (196): 729–731.
- Armstrong, W. E. 1939b. “The Determinateness of the Utility Function”. *The Economic Journal* 49 (195): 453–467.
- Armstrong, W. E. 1940a. “*Principles of Economic Sociology*. By D. M. Goodfellow; *Land, Labour and Diet in Northern Rhodesia*. By Audrey I. Richards”. *The Economic Journal* 50 (198-199): 315–317.
- Armstrong, W. E. 1940b. “*The Economic Life of Primitive Peoples*. By Melville J. Herskovits”. *The Economic Journal* 50 (200): 515–516.
- Armstrong, W. E. 1946. “*Malay Fishermen: Their Peasant Economy*. By Raymond Firth. *The Economic Journal* 56 (224): 653–654.
- Armstrong, W. E. 1948. “Uncertainty and the Utility Function”. *The Economic Journal* 58 (229): 1–10.
- Armstrong, W. E. 1949. “*Primitive Money in its Ethnological, Historical and Economic Aspects*. By Paul Einzig”. *The Economic Journal* 59 (235): 439–440.
- Armstrong, W. E. 1950. “A Note on the Theory of Consumer’s Behaviour”. *Oxford Economic Papers* 2 (1): 119–122.
- Armstrong, W. E. 1951. “Utility and the Theory of Welfare”. *Oxford Economic Papers* 3 (3): 259–271.
- Armstrong, W. E. 1953. “[Marginal Preference and the Theory of Welfare]: A Reply”. *Oxford Economic Papers* 5 (3): 264–270.
- Armstrong, W. E. 1955. “Concerning Marginal Utility”. *Oxford Economic Papers* 7 (2): 170–176.
- Armstrong, W. E. 1958a. “*The Measurement of Utility*. By Tapas Majumdar”. *Economica* 25 (100): 351-352.
- Armstrong, W. E. 1958b. “Utility and the” Ordinalist Fallacy””. *The Review of Economic Studies* 25 (3): 172–181.
- Boianovsky, M. 2014. “Robertson and the Cambridge Approach to Utility and Welfare”. *Cambridge Journal of Economics* 38 (4): 961–985.
- Bowley, M. 1938. “*Saving and Investment*. By W. E. Armstrong”. *Economica* 5 (18): 251–252.
- Brams, S. J., W. V. Gehrlein e F. S. Roberts. 2009. “Preface”. In *The Mathematics of Preference, Choice and Order: Essays in Honor of Peter C. Fishburn*, edited by S. J. Brams, W. V. Gehrlein and F. S. Roberts, v–ix. Berlin: Springer.
- Brams, S. J., W. V. Gehrlein e F. S. Roberts. 2021. “Peter C. Fishburn (1936-2021)”. *Social Choice and Welfare* 57:1–3.
- Breathnach, C. S. 1993. “W H R Rivers and the Hazards of Interpretation”. *Journal of the Royal Society of Medicine* 86 (7): 413–416.
- Edgeworth, F. Y. 1881. *Mathematical Psychics*. London: C. Kegan Paul & CO.
- Edwards, W. 1954. “The Theory of Decision Making”. *Psychological Bulletin* 51 (4): 380–417.
- Fernandez-Grela, M. 2006. “Disaggregating the Components of the Hicks-Allen Composite Commodity”. *History of Political Economy* 38:32–47.

- Fiévet, A. 2022. “On the Shoulders of Giants: from Lange (1934) to Samuelson (1938) on the “unique” measure of utility”. *The European Journal of the History of Economic Thought* 29 (6): 1125–1145.
- Fishburn, P. C. 1964. *Decision and Value Theory*. New York: John Wiley & Sons.
- Fishburn, P. C. 1968. “Utility Theory”. *Management Science* 14 (5): 335–378.
- Fishburn, P. C. 1970a. “Conditions for Simple Majority Decision Functions with Intransitive Individual Indifference”. *Journal of Economic Theory* 2 (4): 354–367.
- Fishburn, P. C. 1970b. “Intransitive Indifference in Preference Theory: a Survey”. *Operations Research* 18 (2): 207–228.
- Fishburn, P. C. 1970c. “Intransitive Individual Indifference and Transitive Majorities”. *Econometrica* 38 (3): 482–489.
- Fishburn, P. C. 1970d. “Suborders on Commodity Spaces”. *Journal of Economic Theory* 2 (4): 321–328.
- Fishburn, P. C. 1970e. “The Irrationality of Transitivity in Social Choice”. *Behavioral Science* 15 (2): 119–123.
- Fishburn, P. C. 1970f. *Utility Theory for Decision Making*. New York: John Wiley & Sons.
- Fishburn, P. C. 1970g. “Utility Theory with Inexact Preferences and Degrees of Preference”. *Synthese* 21: 204–221.
- Fishburn, P. C. 1971. “Should Social Choice Be Based on Binary Comparisons?” *The Journal of Mathematical Sociology* 1 (1):133–142.
- Fishburn, P. C. 1972. “Minimal Preferences on Lotteries”. *Journal of Mathematical Psychology* 9 (3):294–305.
- Fishburn, P. C. 1973a. “Summation Social Choice Functions”. *Econometrica* 41 (6): 1183–1196.
- Fishburn, P. C. 1973b. *The Theory of Social Choice*. Princeton: Princeton University Press.
- Fishburn, P. C. 1974. “Lexicographic Orders, Utilities and Decision Rules: a Survey”. *Management Science* 20 (11): 1442–1471.
- Fishburn, P. C. 1975. “A Theory of Subjective Expected Utility with Vague Preferences”. *Theory and Decision* 6:287–310.
- Fishburn, P. C. 1977. “Models of individual Preference and Choice”. *Synthese* 36:287–314.
- Forrester, J. 2008. “1919: Psychology and Psychoanalysis, Cambridge and London - Myers, Jones and MacCurdy”. *Psychoanalysis and History* 10 (1): 37–94.
- Friedman, M. e L. J. Savage. 1948. “The Utility Analysis of Choice Involving Risk”. *The Journal of Political Economy* LVI (4): 279–304.
- Gallistel, C. R. e D. H. Krantz. 2013. “R. Duncan Luce (1925-2012)”. *The American Journal of Psychology* 126 (4): 493–498.
- Georgescu-Roegen, N. 1936. “The Pure Theory of Consumer’s Behavior”. *The Quarterly Journal of Economics* 50 (4): 545–593.
- Georgescu-Roegen, N. 1954. “Choice, Expectations and Measurability”. *The Quarterly Journal of Economics* 68 (4): 503–534.
- Green, H. A. J. 1958. “Mr. Armstrong and the Theory OD Demand”. *Metroeconomica* 10 (2): 74–80.
- Gregory, C. A. 2004. “Armstrong, Wallace Edwin (1896–1980), anthropologist and economist”. Oxford Dictionary of National Biography, <https://www.oxforddnb.com/view/10.1093/ref:odnb/9780198614128.001.0001/odnb-9780198614128-e-66809>, Acessado em 30/12/2024.
- Gregory, C. A. e J. Urry. 1987. “Armstrong, Wallace Edwin”. Em *The New Palgrave: a Dictionary of Economics*, editado por J. Eatwell, M. Milgate e P. Newman, 1:114–115. London: Macmillan.
- Hands, D. W. 2010. “Economics, Psychology and the History of Consumer Choice Theory”. *Cambridge Journal of Economics* 34:633–648.
- Hands, D. W. 2011. “Back to the Ordinalist Revolution: Behavioral Economic Concerns in Early Modern Consumer Choice Theory”. *Metroeconomica* 62 (2): 386–410.

- Hayek, F. A. 1941. *The Pure Theory of Capital*. Auburn: The Ludwig von Mises Institute, 2009.
- Hicks, J. R. 1956. *A Revision of Demand Theory*. Oxford: Clarendon Press.
- Hicks, J. R. e R. G. D. Allen. 1934a. "A Reconsideration of the Theory of Value. Part I". *Economica* 1 (1): 52–76.
- Hicks, J. R. e R. G. D. Allen. 1934b. "A Reconsideration of the Theory of Value. Part II. A Mathematical Theory of Individual Demand Functions". *Economica* 1 (2): 196–219.
- Hudík, M. 2014. "Reference-Dependence and Marginal Utility: Alt, Samuelson, and Bernardelli". *History of Political Economy* 46 (4): 677–693.
- Hupman, A. C. e J. Simon. 2022. "The Legacy of Peter Fishburn: Foundational Work and Lasting Impact". *Decision Analysis* 20 (1): 1–15.
- INFORMS. Peter C. Fishburn. <https://www.informs.org/Explore/History-of-O.R.-Excellence/Biographical-Profiles/Fishburn-Peter-C>. Acessado em 30/12/2024.
- Knight, K. L. 2018. *A.C. Pigou and the 'Marshallian' Thought Style: A Study in the Philosophy and Mathematics Underlying Cambridge Economics*. Cham: Palgrave Macmillan.
- Lenfant, J. S. 2018. "Probabilising the Consumer: Georgescu-Roegen, Marschak and Quandt on the Modelling of the Consumer in the 1950s". *The European Journal of the History of Economic Thought* 25 (1):36–72.
- Lerner, A. P. 1937. "Saving and Investment. By W. E. Armstrong". *The Economic Journal* 47 (187): 521–522.
- Liep, J. 2015. "Dogomomo Xmas, Kwangwe's Races, and a Murder: W.E. Armstrong and the Rossel Island Money". *Oceania* 85 (2): 183–198.
- Luce, R. D. 1956. "Semiorders and a Theory of Utility Discrimination". *Econometrica* 24 (2): 178–191.
- Luce, R. D. 1988. This Week Citations Classic: "Games and Decision - introduction and critical survey". *Current Contents* (15): 16.
- Luce, R. D. 1989. "R. Duncan Luce". In *A History of Psychology in Autobiography*, edited by G. Lindzey, vol. 8:244–289. Stanford: Stanford University Press.
- Luce, R. D. e W. Edwards. 1958. "The Derivation of Subjective Scales from Just Noticeable Differences". *Psychological Review* 65 (4): 222-237.
- Luce, R. D., A. J. Marley e C. T. Ng. 2009. "Entropy-Related Measures of the Utility of Gambling". In *The Mathematics of Preference, Choice and Order: Essays in Honor of Peter C. Fishburn*, edited by S. J. Brams, W. V. Gehrlein e F. S. Roberts, 5–25. Berlin: Springer.
- Luce, R. D. e H. Raiffa. 1957. *Games and Decision - introduction and critical survey*. New York: John Wiley & Sons.
- Majumdar, T. 1957. "Armstrong and the Utility Measurement Controversy". *Oxford Economic Papers* 9 (1): 30–40.
- Majumdar, T. 1958. *The Measurement of Utility*. London: Macmillan & Co LTD.
- Masin, S. C, V. Zudini e M. Antonelli. 2009. "Early Alternative Derivations of Fechner's Law". *Journal of the History of the Behavioral Sciences* 45 (1): 56–65.
- McClelland, J. L. 2012. "R. Duncan Luce (1925–2012)". *Science* 337 (6102): 1619–1619.
- Moscato, I. 2007. "Early Experiments in Consumer Demand Theory: 1930–1970". *History of Political Economy* 39 (3): 359–401.
- Moscato, I. 2013. "How Cardinal Utility Entered Economic Analysis: 1909–1944". *The European Journal of the History of Economic Thought* 20 (6): 906–939.
- Myers, C. S. 1922. "The Influence of the Late W. H. R. Rivers on the Development of Psychology in Great Britain". *Nature* 110: 485–490.
- Neumann, J. e O. Morgenstern. 1944. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press.
- Ng, Y-K. 1981. "Bentham or Nash? On the Acceptable Form of Social Welfare Functions". *Economic Record* 57 (3): 238–250.

- Oliveira, T. D. e A. L. Portella. 2017. "Two Faces of the Same Georgescu-Roegen: from Path-Dependency and the Imperfection of the Human Mind to Institutional Change and Biophysical Constraints". *História Econômica & História de Empresas* 20 (1): 243-261.
- Pareto, V. 1996 [1909]. *Manual de Economia Política*. São Paulo: Nova Cultural.
- Roberts, F. S., C. P. Davis-Stober e M. Regenwetter. 2024. "The Mathematical Psychology of Peter Fishburn". *Journal of Mathematical Psychology* 120-121:102845.
- Rothenberg, J. 1953. "Marginal Preference and the Theory of Welfare". *Oxford Economic Papers* 5 (3): 248-263.
- Rothenberg, J. 1954. "Reconsideration of a Group Welfare Index: A Rejoinder on Marginal Preference". *Oxford Economic Papers* 6 (2): 164-180.
- Samuelson, P. A. 1938a. "A Note on the Pure Theory of Consumer's Behaviour". *Economica* 5 (17): 61-71.
- Samuelson, P. A. 1938b. "The Empirical Implications of Utility Analysis". *Econometrica* 6 (4): 344-356.
- Sen, A. 1969. "Quasi-Transitivity, Rational Choice and Collective Decisions". *The Review of Economic Studies* 36 (3): 381-393.
- Sen, A. 1971. "Choice Functions and Revealed Preference". *The Review of Economic Studies* 38 (3): 307-317.
- Sen, A. 1986. "Social Choice Theory". In *Handbook of Mathematical Economics*, edited by K. J. Arrow e M. D. Intriligator, 3:1073-1181. Amsterdam: North-Holland.
- Tribe, K. 2022. *Constructing Economic Science: The Invention of a Discipline 1850-1950*. Oxford: Oxford University Press.
- Tullock, G. 1964. "The Irrationality of Intransitivity". *Oxford Economic Papers* 16 (3): 401-406.
- Urry, J. 1985. "W. E. Armstrong and Social Anthropology at Cambridge 1922-1926". *Man* 20 (3): 412-433.
- Vickrey, W. 1960. "Utility, Strategy, and Social Decision Rules". *The Quarterly Journal of Economics* 74 (4): 507-535.
- Ward, J. 1891. *The Moral Sciences Tripos*. Cambridge: Deighton, Bell & CO

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados utilizados neste estudo estão disponíveis mediante solicitação ao autor. Dados adicionais e informações complementares também poderão ser fornecidos para fins de verificação ou replicação. A disponibilização está condicionada à inexistência de restrições de acesso público.

CONTRIBUIÇÕES DE AUTORIA

GA: Conceitualização, Investigação, Metodologia, Escrita - rascunho original e Escrita revisão e edição.

CONFLITO DE INTERESSE

O autor declara não ter quaisquer conflitos de interesse.

EDITOR-CHEFE

Dante Mendes Aldrighi  <https://orcid.org/0000-0003-2285-5694>

Professor - Department of Economics University of São Paulo (USP)