ARTIGOS

Ações do professor para a promoção do raciocínio matemático em aulas de cálculo diferencial e integral[1]

André Luis Trevisan[2]
ORCID: 0000-0001-8732-1912
Mariana Vasconcelos Negrini[2]
ORCID: 0000-0001-9906-8221
Bárbara de Falchi[2]
ORCID: 0000-0003-3666-2690
Eliane Maria de Oliveira Araman[2]
ORCID: 0000-0002-1808-2599

Resumo

Considerando o desenvolvimento do raciocínio como aspecto central no processo de aprendizagem matemática, compreender modos de promovê-lo e ações desempenhadas pelo professor neste processo são questões importantes para investigação. No intuito de aprofundar essas discussões, este artigo tem, por objetivo, compreender como as ações do professor podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático de estudantes que cursam cálculo diferencial e integral. Assumindo uma perspectiva qualitativa de cunho interpretativo, analisamos uma aula dessa disciplina, na qual promoveu-se uma discussão a respeito de uma tarefa exploratória envolvendo a concentração de uma mistura de água e sal variando com o tempo, e, a partir dela, introduziu-se o conceito de função racional e seu comportamento a longo prazo. Com base em um quadro teórico que classifica as ações do professor a partir de quatro categorias – a constar: convidar; guiar/apoiar; informar/sugerir; e desafiar, são analisados seis trechos da aula. Como resultados, reconhecemos um movimento contínuo e crescente nas ações do professor durante a condução da discussão, destacando as implicações para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes e compreensão do conceito de função racional.

Palavras-chave

Ensino de matemática – Ensino de cálculo diferencial e integral – Raciocínio matemático – Ações do professor.

1- Os autores agradecem à Fundação Araucária e ao CNPq pelo apoio à pesquisa.

2- Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, PR, Brasil. Contatos: andrelt@utfpr.edu.br; mariana_vasconcelos_@hotmail.com; bahfalchi@gmail.com; elianearaman@utfpr.edu.br

https://doi.org/10.1590/S1678-4634202349251659

Teacher's actions for the promotion of mathematical reasoning in differential and integral calculus classes

Abstract

Considering the development of reasoning as a central aspect in the process of learning mathematics, understanding ways to promote it and actions performed by the teacher in this process are important issues for investigations. In order to deepen these discussions, this article aims to understand how teacher's actions can contribute to mathematical reasoning students' development who study differential and integral calculus. Assuming a qualitative perspective of interpretative nature, we analyzed a class of this subject, in which it was promoted a discussion about an exploratory task involving a water and salt mixture concentration varying by the time, and, from it was introduced the concept of rational function and its long-run behavior. Six class excerpts are analyzed, based on a framework which classifies teacher's actions from four categories (inviting; guiding/supporting; informing/suggesting; and challenging). As results, we recognized a continuous and increasing movement in the teacher's actions during the conduct of the discussion, highlighting the implications for the mathematical reasoning students' development and the concept of rational function understanding.

Keywords

Mathematics teaching – Differential and integral calculus teaching – Mathematical reasoning – Teacher's actions.

Introdução

A investigação de novas abordagens para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), no sentido de colaborar efetivamente para a formação de profissionais que contribuam no desenvolvimento científico e tecnológico da sociedade, têm configurado-se como uma temática de interesse no âmbito da educação matemática nas últimas décadas. Em especial, como apontado por Cabral (2015), o fato dessa disciplina registrar altos índices de abandono e reprovações leva à necessidade de modificar ou, ainda, abandonar o ensino tradicional vigente. Numa busca de superação desse modelo, "impõe-se ao pesquisador o momento de refletir sobre os efeitos produzidos por sua prática de sala de aula e pelas orientações que definem o sistema de ensino superior no que tange as características dos profissionais que se quer formar" (CABRAL, 2015, p. 209).

No âmbito dos cursos de engenharia, tem-se observado um movimento de renovação de currículos, para se adaptar às novas realidades globais, com o incentivo à adoção de metodologias de ensino mais modernas e com foco na formação por meio de competências que supram as necessidades de mercado. As novas Diretrizes Curriculares

Nacionais para o curso de graduação em engenharia (BRASIL, 2019) defendem, no Artigo 4º, como competências básicas que os cursos devem possibilitar aos seus egressos: (i) formular e conceber soluções de engenharia; (ii) análise e compreensão de fenômenos e sua validação por experimentação; (iii) implantar soluções de engenharia e comunicação eficaz, oral, escrita e gráfica.

Resultados de pesquisa têm apontado que a constituição de ambientes de ensino e de aprendizagem, pautados em episódios de resolução de tarefas (COUTO; FONSECA; TREVISAN, 2017; TREVISAN; MENDES, 2018), assume uma importância singular no contexto do ensino em engenharia, no qual o desenvolvimento do raciocínio matemático deveria ter um papel central no processo de formação inicial para a profissão. Assume-se aqui, com base nos trabalhos de Ponte (2005, 2014), que a aprendizagem resulta da atividade do estudante e não diretamente das tarefas, e o mais determinante são sempre as atitudes e concepções dos autores envolvidos. Assim, segundo esse autor, as tarefas propostas devem possibilitar um processo consistente de aprendizagem que facilite a construção de conceitos e a compreensão de procedimentos e amplie o conhecimento de representações relevantes e conexões entre a matemática e outras áreas.

É certo que desenvolver a capacidade de raciocínio matemático dos alunos não se resume a memorizar conceitos e procedimentos rotineiros. Um dos pontos fundamentais para promover o raciocínio matemático dos estudantes é compreender o que se entende por raciocinar matematicamente e quais os processos de raciocínio a desenvolver. Além disso, compreender modos de promovê-lo é uma questão importante a ser investigada, e as ações desempenhadas pelo professor têm um papel muito importante nesse processo (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013; ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2019; ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019).

No que diz respeito à promoção do raciocínio matemático no âmbito do CDI, temo-nos debruçado em compreender de que modo o trabalho com tarefas de natureza exploratória (PONTE, 2005) ou matematicamente ricas (WHITE; MESA, 2013), atrelado às ações do professor na condução de discussões matemáticas (PONTE; QUARESMA, 2016), podem contribuir na formação de futuros engenheiros (TREVISAN *et al.*, 2019; TREVISAN; ARAMAN, 2021a,b).

Em geral, os trabalhos presentes na literatura a respeito do tema (trazidos na continuidade deste artigo) envolvem a disciplina de matemática na educação básica. Assim, no intuito de aprofundar essas discussões no âmbito do ensino superior, este artigo tem, por objetivo, "compreender como as ações do professor podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático de estudantes que cursam CDI". Inicialmente, sintetizamos alguns resultados de pesquisas que caracterizam o raciocínio matemático e discutem as ações do professor que o apoiam. A seguir, apresentamos o contexto em que o estudo foi realizado – uma aula em uma turma de CDI na qual promoveu-se uma discussão a respeito de uma tarefa exploratória envolvendo a concentração de uma mistura de água e sal variando com o tempo, e, a partir dela, introduziu-se o conceito de função racional e seu comportamento a longo prazo – bem como os procedimentos metodológicos assumidos na pesquisa. Analisamos e discutimos, por fim, as ações do professor a partir do quadro teórico proposto por Araman, Serrazina e Ponte (2019), composto por quatro categorias: convidar, guiar/apoiar, informar/sugerir e desafiar.

Raciocínio matemático

São diferentes as visões de raciocínio matemático e, para este trabalho, consideramos aspectos presentes nas definições sintetizadas por Serrazina, Rodrigues e Araman (2020):

- Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 728) definem raciocínio matemático como "o processo que utiliza informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões".
- Morais, Serrazina e Ponte (2018) reconhecem o raciocínio matemático como um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições a partir de proposições conhecidas ou assumidas como verdadeiras.
- Para Lannin, Ellis e Elliot (2011), o raciocínio matemático consiste em um processo conjunto de conjeturar, generalizar, investigar o porquê, argumentar e refutar.
- Já Stylianides (2009) defende que o raciocínio matemático é um processo de inferência que utiliza informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões.
- No entendimento de Jeannotte e Kieran (2017, p. 7), o raciocínio matemático é um "processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos".

No geral, pesquisadores afirmam que o processo de raciocinar matematicamente inclui a formulação de questões, a formulação e teste de conjecturas e a realização de justificações. A parte de formular conjecturas parte de uma ideia, fórmula ou frase, a qual não foi provada ser verdadeira, baseada em suposições a partir de uma relação matemática (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011).

Os processos associados ao raciocínio matemático identificados por Jeannotte e Kieran (2017) envolvem: (i) a busca por semelhanças ou diferenças, que inclui generalização, conjectura, identificação de padrões, comparação e classificação; (ii) a validação, ou seja, os processos de justificação e prova; (iii) a exemplificação, que apoia os dois anteriores.

Para as autoras, formular conjecturas é um processo cíclico de: (i) enunciar a conjectura; (ii) verificar se cobre todos os casos e exemplos; (iii) tentar refutar; (iv) encontrar um motivo que faça com que a conjectura seja verdadeira ou tentar modificá-la. Assim, "justificar é um processo social e pode assumir dois formatos: (i) justificar a conjectura que surgiu no processo e (2) relatar a validade que altera o valor epistêmico" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p.12). O processo de justificar requer que o aluno não apenas mostre que uma afirmação é verdadeira, mas que forneça razões pelas quais ela é verdadeira ou válida em todos os casos possíveis. Dessa forma, o processo de justificar possibilita que os alunos "não apenas desenvolvem suas habilidades de raciocínio, mas também seu entendimento conceitual" (MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018, p. 556). Por fim, exemplificar é considerado, por Jeannotte e Kieran (2017), como um processo que serve de suporte aos demais, uma vez que auxilia na pesquisa de semelhanças e diferenças como a validação.

Uma das ações fundamentais que precisam ser consideradas pelos professores para promover o raciocínio matemático nos seus alunos é o questionamento. Wood (1999) afirma que o professor precisa repensar as normas que tem em sua sala de aula para poder criar um ambiente que proporcione oportunidades para pensar em vez de estabelecer regras e procedimentos padronizados. Além disso, precisa considerar as diferentes maneiras pelas quais diferentes alunos podem pensar e resolver uma tarefa.

Mata-Pereira e Ponte (2018) afirmam que uma das ações mais importantes do professor para o desenvolvimento do raciocínio matemático do aluno é a "seleção das tarefas e a comunicação na sala de aula, sublinhando a natureza do questionamento, a negociação de significados e os processos de redizer". Já Ellis, Özgür e Reiten (2019, p. 2) consideram que, para desenvolver o raciocínio dos alunos, "as discussões em sala de aula devem concentrar-se tanto em ideias matemáticas importantes quanto no desenvolvimento de significados matemáticos por meio de processos comunicativos".

Para analisar tais ações do professor, no que se refere ao desenvolvimento do raciocínio dos alunos, alguns pesquisadores desenvolveram dispositivos que ajudam neste trabalho. Entre eles, há o modelo elaborado por Wood (1999), a partir da categorização de padrões de interação de movimentos (ações) do professor. A autora afirma que, para o desenvolvimento do raciocínio matemático é preciso proporcionar um ambiente escolar com frequentes situações de interação e discussão, que encoraje os pensamentos dos alunos. O seu modelo tem, como base, as diferentes situações de aprendizagem conceitual teorizadas por Piaget e a análise de dados empíricos.

Wood (1999) apresenta três padrões de interação em que ocorrem trocas entre professor e alunos na sala de aula. O primeiro é a interação de relatar, que seria a descrição do pensamento do aluno ao resolver uma tarefa. O professor, aqui, tem o papel de troca podendo colocar questões que ajudem o aluno a clarificar suas ideias. A segunda interação é inquirir. Ocorre quando o professor exige razões para a explicação do aluno, e ele precisa explicar à turma e ao professor porque ele resolveu o problema daquela forma. Já na terceira interação, argumentar, o professor continua fazendo perguntas ao aluno que está relatando, mas, dessa vez, com o intuito de fazê-lo justificar e fundamentar seu pensamento. Além disso, "ao se mover da categoria Relatar para Argumentar podemos ver que cada contexto de discussão cria demandas crescentes para o pensamento do aluno" (WOOD, 1999, p. 39).

Outro modelo interessante é o TMSSR (*Teacher Moves for Supporting Student Reasoning*) de Ellis, Özgür e Reiten (2019), desenvolvido especificamente para o raciocínio matemático, o que o torna diferente dos outros modelos anteriores presentes na literatura. As autoras defendem que "as discussões em sala de aula devem concentrar-se tanto em ideias matemáticas importantes quanto no desenvolvimento de significados matemáticos por meio de processos comunicativos" (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2019, p. 2).

O TMSSR divide as ações do professor em categorias, desta vez, quatro. A primeira é a categoria "Responder ao raciocínio dos alunos", que é a forma com que o professor valida ou corrige a resposta do aluno. A partir disso, consequentemente, surgem as ações da categoria "Elicitar o raciocínio dos alunos", em que eles são encorajados a explicar e apresentar seus raciocínios, estratégias e resoluções. Após isso, há a categoria "Facilitar o raciocínio dos alunos", em que o professor responde as ideias dos alunos, desenvolvendo seu pensamento, incentivando um outro modo de resolução se for preciso e dando informações novas que ajudem na resolução do problema. A categoria “Estender o raciocínio dos alunos”, que são as ações que “aumentam as oportunidades dos alunos de estender seu raciocínio matemático, particularmente em termos de generalizar suas estratégias ou ideias e desenvolver justificativas matematicamente apropriadas” (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2019, p. 18).

Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) também propõem um modelo com a finalidade de conduzir as discussões matemáticas entre o professor e os alunos considerando duas dimensões: as ações diretamente relacionadas aos tópicos matemáticos e as ações relacionadas ao processo de aprendizagem. Para os autores, é preciso conduzir os alunos à generalização, que é o ato de formular conjecturas relativas a classes alargadas de objetos, e à justificação, que seria o ato de validar as conjecturas formuladas usando propriedades e definições matemáticas.

Neste modelo, são apresentadas quatro ações que devem ocorrer dentro da sala de aula para o desenvolvimento do raciocínio do aluno. A primeira ação é a de “convidar”, que seria o primeiro contato dos alunos com o tema que será abordado. A segunda ação é a de “guiar/apoiar”, em que o professor, por meio de perguntas, guia os alunos a continuar participando de uma resolução de uma tarefa já iniciada. A terceira ação, “informar/sugerir”, é o momento em que o professor valida as respostas dos alunos, introduzindo novas informações e proporcionando novos argumentos. A última ação é a de “desafiar”, o professor “coloca o aluno na situação de ser ele próprio a avançar em terreno novo, seja em termos de representações, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de raciocinar, argumentar ou avaliar” (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 59).

Baseados nestes dois últimos modelos, Araman, Serrazina e Ponte (2019) organizaram um quadro de análise que descreve as ações docentes que apoiam o raciocínio matemático, mostrado no Quadro 1. Esse quadro considera as categorias de acordo com a nomenclatura utilizada por Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) e as associa com ações discutidas por Ellis, Özgür e Reiten (2019).

Quadro 1- Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático

CATEGORIAS	AÇÕES
Convidar	Solicita respostas para questões pontuais. Solicita relatos de como fizeram.
Guiar/Apoiar	Fornece pistas aos alunos. Incentiva a explicação. Conduz o pensamento do aluno. Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes. Encoraja os alunos a re-dizerem suas respostas. Encoraja os alunos a re-elaborarem suas respostas.
Informar/Sugerir	Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. Re-elabora respostas fornecidas pelos alunos. Fornece informações e explicações. Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.
Desafiar	Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas). Propõe desafios. Encoraja a avaliação. Encoraja a reflexão. Pressiona para a precisão. Pressiona para a generalização.

Fonte: Araman, Serrazina e Ponte (2019, p. 476).

Procedimentos metodológicos

Contexto do estudo e os participantes da pesquisa

Considerando o objetivo de compreender como as ações do professor podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático de estudantes que cursam CDI, realizamos intervenções em uma turma dessa disciplina (sob responsabilidade do terceiro autor) no 1º semestre de 2019, em um curso superior de engenharia de uma Universidade Federal do Paraná. A disciplina de CDI1, com uma carga de 90 horas-aula, contempla o estudo de funções, limites, derivadas e integrais de funções reais, de uma variável real e foi organizada em uma estrutura curricular "não usual" (TREVISAN; MENDES, 2017), com conteúdos apresentados ao longo do semestre letivo em formato de espiral. O trabalho na disciplina, inicialmente, envolve o estudo de sequências numéricas e do conceito de convergência, seguido de um estudo de taxas médias de variação e quocientes de diferenças (do qual emerge o conceito intuitivo de derivada) e sequências de somas parciais (relacionadas à ideia de integral definida), sem que o conceito de limite tenha sido apresentado formalmente até a primeira metade do curso.

Em geral, 25 horas do curso (cerca de 10 encontros de 3 horas-aula de 50 minutos) são dedicadas ao trabalho com episódios de resolução de tarefas que antecederam o estudo "formal" dos conceitos de limites, derivadas e integrais de funções reais de uma variável real. Para o desenvolvimento da tarefa aqui analisada (que ocorreu em um desses episódios – 3 horas-aula de 50 minutos, ao final da primeira metade do curso), os trinta estudantes presentes naquele dia estavam organizados em grupos de três a quatro estudantes. Em um primeiro momento, os grupos trabalharam de forma autônoma, sem intervenção do professor. Na continuidade, houve uma discussão coletiva mediada pelo professor a partir das resoluções dos estudantes, a qual é nosso foco de investigação.

A referida tarefa, adaptado de Santos e Bianchini (2002), teve o seguinte enunciado: "Um tanque contém 5000 litros de água pura. Uma mistura contendo 750g de sal diluídos em 25 litros de água é bombeada para o tanque a cada minuto. Investigue como se comporta a concentração da mistura no tanque para valores de tempo 'muito grandes'".

Método de pesquisa, recolha e organização de dados

O estudo que deu origem a este artigo foi desenhado como uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Os dados recolhidos[3] são compostos por: (i) protocolos, contendo registros escritos das discussões dos pequenos grupos de estudantes; (ii) áudios das discussões nos pequenos grupos; e (iii) vídeo da discussão coletiva mediada pelo professor a partir das resoluções dos estudantes. As gravações em áudio e vídeo foram transcritas na íntegra (como parte de um projeto maior), em articulação com os protocolos produzidos, propiciando, assim, a organização e a análise dos dados. Considerando nosso objetivo de compreender como as ações do professor

3- Esse material poderá ser acessado pelo leitor, caso queira, por meio do contato ao primeiro autor por correio eletrônico.

podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático, destacamos, para análise neste artigo, os dados advindos do vídeo da plenária.

De posse da transcrição das discussões ocorridas na plenária, baseamo-nos nas etapas presentes no modelo de Powell, Francisco e Maher (2004). Inicialmente, ouvindo-os integralmente, em seguida, identificando momentos significativos e transcrevendo-os, para, depois, analisá-los.

Posterior a isso, iniciamos, com as duas primeiras autoras, a análise dos dados, individualmente categorizando cada fala do áudio transcrito, que foi disposto em uma tabela com duas colunas. De um lado, os áudios transcritos e, de outro, as categorizações das ações do professor (com base no Quadro 1). Em um segundo momento, as autoras se reuniram para fazer uma comparativa entre as categorizações de cada uma até chegar a um consenso sobre as ações do professor, Por fim, unimo-nos com todos os autores para discutir essa categorização.

Para análise da discussão coletiva ocorrida entre o professor e os estudantes (indicados por A1, A2, ...), separamos trechos que trazem as transcrições e descrições acerca do que ocorreu na condução da aula. Entre chaves, está o número do trecho e o número de cada fala, por exemplo, [1.5] que é [trecho 1, fala número 5]. A identificação de categorias de ações associadas a cada interação está entre parênteses conforme Quadro 1.

Resultados

O primeiro trecho corresponde ao início da discussão coletiva, na qual o professor convida os alunos a participarem.

Trecho 1

[1.1] Professor: Então vamos lá, vamos explorar um pouco essa situação... alguma equipe queira sintetizar o que pensou? (**Convidar**).

[1.2] A1: A gente quer. Primeiro a gente avaliou como variava a quantidade de sal e a quantidade de litro de água. Aí a gente fez uma tabelinha e depois uma fórmula que sintetizasse a tabelinha.

[1.3] Professor: E essa tabela vocês fizeram que tipo de cálculo? (**Guiar/apoiar**).

[1.4] A1: De concentração.

[1.5] Professor: O que a gente está entendendo como concentração, à propósito? (**Guiar/apoiar**).

[1.6] A1: Quantidade de sal em água.

[1.7] Professor: Então tá[4], a gente está pensando com concentração aqui como uma relação que é dada por uma divisão (**Informar/sugerir**). Qual? (**Guiar/apoiar**).

[1.8] A1: A fórmula que a gente fez é a concentração igual a 750 vezes o t [referindo-se ao tempo], porque no t=1 vai ter 750g de sal. No t=2, vai ter 1500. Dividido pelo volume, que vai ser os 5000 fixo mais 25 vezes o t.

[1.9] Professor: Então deixa eu colocar essa fórmula [anota na lousa $C=\dfrac{750t}{5000+25t}$] (**Informar/sugerir**).

4- Embora informal, essa expressão será mantida, pois é recorrente na fala do professor, em geral, para validar as respostas dos alunos.

[1.10] A1: Daí a gente pensou, quando o tempo for muito, muito, muito grande, os 5000 vai se tornar nada praticamente, então significa que a concentração máxima que vai chegar vai ser 750 dividido por 25, que vai ser o limite, que vai dar 30.
[1.11] Professor: então vocês concluem que... (**Guiar/apoiar**).
[1.12] A1: que a concentração, concentração não vai passar de 30.
[1.13] Professor: a concentração não vai passar de 30. Quando a gente pensa que a concentração não vai passar de 30, de algum modo ela está se aproximando desse 30. (**Informar/sugerir**).

Neste trecho, observa-se que as ações do professor podem se enquadrar em três categorias: “Convidar, Guiar/apoiar e Informar/sugerir”. Como podemos observar, a categoria “Convidar” ocorre quando o professor, em [1.1], chama alguma equipe para relatar aos colegas como pensou em resolver a tarefa e solicita que os integrantes expliquem o que fizeram, compartilhando seu raciocínio com os demais alunos da classe. Em alguns momentos, o professor faz perguntas com a finalidade de obter respostas para determinadas questões, como em [1.3] e [1.5]. Tais ações visam chamar a atenção para alguns aspectos da resolução da tarefa, conduzindo o pensamento do aluno de modo a esclarecer o seu raciocínio, enquadrando-se na categoria “Guiar/apoiar”. Tal ação também é reconhecida em [1.7], quando o professor pede ao aluno que explicite a relação que utilizou para expressar a concentração e em [1.11], quando o professor guia o aluno de modo a elaborar alguma conclusão a partir do seu relato, e ele afirma que “a concentração não vai passar de 30”.

Algumas ações do professor nesse trecho podem ser classificadas como “Informar/sugerir”. Por exemplo, em [1.7], o professor fornece uma pista aos alunos, enfatizando que a fórmula da concentração envolve uma divisão e, em seguida, orienta o aluno para que possa expressar a fórmula de concentração por ele encontrada. Também, em [1.9], quando o professor anota, na lousa, a fórmula relatada, confirmando/validando a resolução do aluno e compartilhando com a turma toda. Por fim, em [1.13], o professor repete a resposta do aluno, validando a afirmação de que a concentração está se aproximando de 30.

Na continuidade, o professor focaliza a discussão acerca do gráfico da função conforme o trecho transcrito a seguir.

Trecho 2

[2.1] Professor: E como é que essa concentração está mudando ao longo do tempo, de uma maneira linear? Ou seja, o gráfico seria uma reta? Quem pensou nesse gráfico conclui o que desse gráfico? O que vocês pensaram? [apontando para outro grupo] (Guiar/apoiar).
[2.2] A2: A gente fez essa mesma fórmula, e a gente calculou esse limite, que seria 30 gramas por litro. No começo, a concentração era muito baixa, e conforme vimos que o gráfico é crescente mas chega uma hora que vai aproximando desse limite [faz uma representação do gráfico com as mãos, indicando concavidade para baixo].
[2.3] Professor: Mas o que leva vocês a concluírem que o gráfico tem esse formato aqui [indica com as mãos um gráfico côncavo para baixo], e não esse formato aqui? [indica com as mãos um gráfico côncavo para cima]. (**Guiar/apoiar**).

[2.4] A3: Porque ele começa crescendo depois estabiliza. Se tivesse esse formato [indica com as mãos um gráfico côncavo para cima]... como chama aquele negócio lá? Um bico! Ele teria que dar indícios que teria um bico.
[2.5] Professor: E por que não poderia acontecer aquilo que vocês me disseram lá no problema do boato[5]? [O professor vai construindo na lousa um gráfico côncavo para cima ilustrando a situação relatada]: vai espalhando, espalhando, espalhando o boato, e quando não tem mais gente estabiliza. (**Desafiar**).
[2.6] A4: Porque ainda vai continuar caindo mais água.
[2.7] A5: Eu acho que vai ficar uma curva assim [indica com as mãos um gráfico côncavo para baixo]. Côncavo para baixo. Porque, à medida que a concentração vai aumentando, menos diferença, à medida que o tempo passa, ela vai fazendo.

Nesse trecho, o professor questiona um novo grupo de estudantes, na tentativa de explicitarem como estão pensando a respeito do gráfico que representa a concentração como uma função do tempo e qual compreensão têm a respeito da sua concavidade. Pode-se observar que as ações do professor, com a discussão já mais avançada, alternam-se entre as categorias de "Guiar/apoiar e Desafiar". Em um primeiro momento, de forma mais direta, guia o aluno a explicar seu raciocínio sobre a concavidade do gráfico em [2.3], fazendo o aluno questionar por quais razões o gráfico tem a concavidade voltada para baixo, e não voltada para cima. Na continuidade, em [2.5], a partir da ideia de "bico", trazida por A3, o professor desafia a turma a explicar porque um gráfico formado por uma parte côncava para cima, unida a um segmento de reta horizontal, não poderia representar a situação em análise. Dois outros estudantes participaram, então, da discussão, e um deles utiliza a expressão "menos diferença" em [2.7], a qual o professor focaliza para prosseguir a discussão conforme apresentado no trecho a seguir.

Trecho 3

[3.1] Professor: Menos diferença ela [a concentração] vai fazer? (**Guiar/apoiar**).
[3.2] A5: Vai ser uma taxa cada vez menor.
[3.3] Professor: Alguém tem valores que conseguem justificar o que ele falou? Alguém fez "contas"? Vocês fizeram algumas contas [apontando para um dos grupos] (**Desafiar**).
[3.4] A6: A concentração é $1{,}9 \times 10^{-4}$ [referente ao primeiro minuto].
[3.5] Professor: Vocês passaram para quilogramas (**Informar/sugerir**).
[3.6] A6: No segundo minuto, é $2{,}97 \times 10^{-4}$. Então, praticamente dobrou a concentração, em 2 minutos. Ai a gente foi fazendo assim, para valores até o 5º minuto. Depois a gente fez para uma hora, que deu .
[3.7] Professor: Está ok, mas vamos focar nesses primeiros, mesmo que esteja vezes 10^{-4}, olhem só para os números, de minuto a minuto o que está acontecendo com a variação, do 1º para o 2º [minuto], do 2º pro 3º [minuto]? (**Guiar/apoiar**).
[3.8] A6: Está praticamente dobrando.
[3.9] Professor: Praticamente, mas não dobrando! (**Informar/sugerir**).

5- Refere-se a uma situação já discutida anteriormente na turma, envolvendo a variação do número de pessoas que sabem do boato como uma função do tempo, e relatada em Trevisan *et al*. (2019).

[3.7] A6: É.
[3.10] Professor: E esse praticamente, essa "quase dobra", está crescendo ou está diminuindo? **(Guiar/apoiar)**
[3.11] Alguns alunos: crescendo.
[3.12] Outros alunos: diminuindo.
[3.13] Professor: a variação! (**Informar/sugerir**).
[3.14] A6: Ah tá, a variação está diminuindo.
[3.15] Professor: Então voltar lá para nosso contexto de sequência[6]. Embora a gente não tenha uma sequência, porque essa concentração não é uma no tempo $t=1$ e de repente, num passe de mágica, ela muda para outra no tempo $t=2$. Ela vai de uma forma contínua [representa com as mãos uma curva crescente]. Então nosso gráfico seria uma curva e não um conjunto de pontos. Mas a ideia é aquela que remete a olhar para variação. Quando eu olho de um instante para o instante seguinte, eu vejo que a concentração está aumentando, só que ela não está aumentando da mesma forma, e ela está aumentando de maneira que, a cada instante ela aumenta menos do que ela tinha aumentado antes. (**Informar/sugerir**).

Este trecho evidencia três tipos de ações do professor. Em alguns momentos, apresenta indagações aos alunos com a finalidade de obter respostas e contribuições durante a discussão, ações que se enquadram na categoria "Guiar/Apoiar". Em [3.1], por exemplo, encoraja A5 a reelaborar a expressão "menos diferença [a concentração] vai fazer". Em [3.7], por sua vez, focaliza o pensamento dos alunos ao analisar a variação da concentração entre instantes de tempo inteiros e consecutivos.

Em alguns momentos, as ações do professor procuram validar (como em [3.5]), ou corrigir (em [3.9]) as respostas dadas pelos estudantes, portanto enquadram-se na categoria "Informar/sugerir". Ainda nessa categoria, encontramos explicações feitas pelo professor, como em [3.13], quando, diante da dúvida da turma, destaca que a variação da concentração ao longo do tempo está diminuindo ou em [3.15], quando, ao discutir de uma forma intuitiva a continuidade da função concentração, realiza uma analogia com a ideia de sequência de diferenças para justificar essa diminuição.

Por fim, em [3.3], destaca-se uma ação na categoria "Desafiar", em que o professor solicita à turma justificativas para o fato de que a taxa de variação da concentração se torna cada vez menor. A discussão prossegue com uma dúvida apresentada por um dos alunos conforme transcrição a seguir.

Trecho 4

[4.1] A3: Por que é uma linha [referindo-se à curva contínua] e não um conjunto de pontos, sendo que a gente não consegue ter um intervalo inteiro? Porque a gente fala: em um minuto vai ser tanto, em um minuto e meio vai ser tanto?
[4.2] Professor: Embora nossa referência seja de uma medida por minuto, está caindo sal continuamente. A torneira está ligando, está despejando água com sal. Não dá "aquela parada":

6- Aqui, o professor refere-se a uma discussão anterior a respeito de sequências de diferenças. Mais detalhes sobre esse tema foram discutidos por Trevisan, Fonseca e Palha (2018).

despejou [água com sal], desligou [a torneira], passou um minuto. Despejou [água com sal]... se eu quisesse saber qual a concentração em um minuto e meio, eu sou capaz de calcular, inclusive por meio da fórmula que vocês encontraram aqui [apontando para fórmula escrita na lousa] (**Informar/sugerir**). Se for para pensarmos nisso enquanto uma função, quem é o domínio dessa função aqui, no contexto do problema? (**Desafiar**)
[4.3] A7: D pertence aos reais tal que é maior ou igual a zero.
[4.4] Professor: [anota na lousa e repete a fala de A7] D=$\{t \in \mathbb{R} \ / t \geq 0\}$. Ou seja, essa fórmula é uma função. Em relação ao gráfico, ele é sugestivo de uma concentração que embora esteja aumentando, está se estabilizando. Foi essa a resposta que vocês me deram, e vocês chegaram rapidinho em quanto se estabilizava (**Informar/sugerir**). Qual o argumento de vocês para chegar nessa concentração? [aponta para um grupo] (**Desafiar**)
[4.5] A4: Porque os 5000 litros passam a ser desprezíveis.
[4.6] Professor: Os 5000 litros passam a ser desprezíveis (**Informar/sugerir**). O que vocês acham disso? (**Desafiar**)
[4.7] A7: O valor de *t* vai ser tão grande, que 5000 litros não vai ser quase nada.
[4.8] A5: À medida que passar o tempo, que o *t* for tão grande, vai ter vários 25 litros jogados lá dentro e os 5000 não vai ser nada.
[4.9] Professor: Então vejam que essa questão de valores de tempo grandes é relativo, porque se eu imaginar que é um tanque com uma dimensão que ele pode ficar recebendo, e recebendo, e recebendo água, e eu posso ligar o cronômetro e largar ligado indefinidamente, esses 5000, em algum momento, naquela fórmula [apontando para lousa], passa a ser desprezível (**Informar/sugerir**). Ai, se eu ignoro aquele 5000 na fórmula, vou ter $750t$ dividido por $25t$. O que se conclui disso? (**Desafiar**)
[4.10] A2: Que a concentração vai tender a 30 gramas por litro.

Este trecho inicia-se a partir de uma dúvida apresentada por um dos alunos acerca da continuidade da função concentração (e do seu domínio) e prossegue com uma análise de seu comportamento a longo prazo. As ações do professor alternam-se nas categorias "Informar/sugerir e Desafiar". No primeiro caso, reconhecemos a explicação sobre a continuidade da função [4.2], do seu domínio [4.4] e do fato dos 5000 litros iniciais serem desprezíveis quando se analisa o comportamento da função a longo prazo [4.9]. Todas essas explicações são seguidas de novos questionamentos, agora, na categoria "Desafiar", na qual o professor solicita justificativas (como em [4.4] e [4.9]) e/ou pressiona os alunos para uma maior precisão nas explicações (como em [4.2]). A discussão prossegue, conforme trecho a seguir, com outro foco: a possibilidade de escrever a fórmula da concentração de outro modo e a análise de seu numerador e denominador.

Trecho 5

[5.1] Professor: Essa não foi a única fórmula que apareceu na sala [apontando para a lousa, onde havia escrito $C=\frac{750t}{5000+25t}$]. Embora ela tenha aparecido em alguns grupos, teve alguns que modificaram ela um pouco. Acho que vocês modificaram, né? O que vocês fizeram? [aponta para um grupo]. (**Guiar/apoiar**).
[5.2] A2: A gente simplificou tudo por 25.

> **[5.3] Professor:** Sendo uma fração, a gente pode dividir por uma mesma quantidade o numerador e o denominador. Se eu dividir por 25, eu fico com números menores [Anota $\div 25$ ao lado do numerador e denominador da fórmula na lousa]. **(Informar/Sugerir)**. Quais? **(Guiar/apoiar)**
> **[5.4] A2:** 30*t*, dividido por 200 mais *t*.
> **[5.5] Professor:** [Anota na lousa $C=\frac{30t}{200+t}$]. **(Informar/Sugerir)**. Quando eu olho para o numerador, isso aqui é uma função de que tipo? **(Guiar/apoiar)**
> **[5.6] Vários alunos:** De primeiro grau.
> **[5.7] Professor:** De primeiro grau **(Informar/Sugerir)**. Graficamente, se eu fosse olhar como quantidade de sal muda com o tempo, eu enxergaria o quê? **(Guiar/apoiar)**
> **[5.8] Vários alunos:** Uma reta.
> **[5.9] Professor:** Uma reta pela origem. **(Informar/Sugerir)**. [...] Isso aqui seria o quê [circula o denominador da expressão $\frac{30t}{200+t}$]? **(Guiar/apoiar)**.
> **[5.10] A1:** Uma reta.
> **[5.11] Professor:** Uma reta também! **(Informar/Sugerir)**. E ai o que acontece quando eu divido as duas funções? **(Guiar/apoiar)**.
> [Silêncio]
> **[5.12] Professor:** Forma-se uma nova função, mas ela deixa de ter esse comportamento linear. Eu não tenho mais uma relação que, graficamente, é representada por uma reta. Mas por uma curva côncava para baixo que sugere uma certa estabilidade. **(Informar/Sugerir)**.

Nesse trecho, os questionamentos conduzidos pelo professor têm, como finalidade, saber se os alunos reconhecem ideias matemáticas já exploradas (reta, função de 1º grau) anteriormente e aprofundar, a partir dessa tarefa, o estudo de uma nova família de funções (racionais). As ações do professor alternam-se nas categorias "Guiar/apoiar e Informar/sugerir". No primeiro caso, temos ações que procuram incentivar os alunos a fornecer explicações sobre o que haviam feito como em [5.1] e [5.3]. Já em [5.5], [5.7] e [5.9], a intenção é focar a atenção em aspectos específicos, no caso, a análise do comportamento, separadamente do numerador e do denominador da expressão algébrica da concentração. Em [5.11], combinam-se ambos os comportamentos.

As ações associadas à ação de "Informar/sugerir", por sua vez, ocorrem quando o professor valida as respostas dos estudantes ou registra, na lousa, algo que disseram como em [5.3] e [5.5] ou repetindo suas respostas como em [5.7], [5,9] e [5.11]. Em [5.12], porém, temos uma ação que decorre da falta de resposta da turma à sua pergunta. O professor, então, fornece informações e explicações. Na continuidade (que não será transcrita aqui), define uma função racional (destaca a concentração como um tipo particular, envolvendo uma divisão de dois polinômios em grau 2) e chama a atenção ao fato de que um dos "problemas" a serem investigados envolve o comportamento de função racional para valores de x "próximos" àqueles que anulam seu denominador (levando ao estudo do limite em um ponto). Outro "problema" abordado, conforme transcrito no trecho a seguir e que finaliza a aula, é o comportamento a longo prazo de uma função racional.

Trecho 6

[6.1] Professor: O que a gente tem aqui a partir do contexto da concentração de sal? Uma expectativa de um gráfico que indica uma certa estabilidade e que, numericamente, ou pela análise da fórmula, a gente concluiu que seria 30 gramas por litros. Como é que seria para gente prever os 30 gramas por litro olhando para fórmula? Qual era o argumento de vocês [aponta para um dos grupos]? (**Desafiar**).

[6.2] A4: Só desprezar o termo que não se altera com o tempo.

[6.3] Professor: Esse termo não se altera com o tempo [aponta para o número 5000 na fórmula $C=\frac{750t}{5000+25t}$]. (**Informar/sugerir**). Se eu pensar a longo prazo, ele passa a ser desprezível.

[6.4] A4: Você tem só o 750t sobre 30t, que dá 30.

[6.5] Professor: E se eu tivesse isso aqui? [anota na lousa a fórmula $C=\frac{750t^2}{5000+25t}$]. Saindo totalmente do contexto da concentração. Se eu tivesse uma fórmula como essa, alguma hipótese do que aconteceria ao longo prazo? (**Desafiar**).

[6.6] A8: O 25t ficaria desprezível.

[6.7] Professor: Por quê? (**Desafiar**).

[6.8] A5: O 25t seria insignificante.

[6.9] Professor: O 25t ficaria desprezível. (Informar/sugerir). Por quê? (**Desafiar**).

[6.10] A8: Porque os outros são ao quadrado então eles aumentam muito mais que o 25t.

[6.11] Professor: E se eu tirar esse 5000 daqui e colocar um milhão multiplicando esse $\frac{750t^2}{1000000t}$, ou um número com quantos zeros você quiser? [anota na lousa a fórmula] (**Desafiar**).

[6.12] A4: O um milhão vai virar insignificativo algum momento.

[6.13] Professor: Veja que aqui a gente está trabalhando com algo que foge um pouco de uma aplicação prática imediata. Mas a ideia é... está bom, é um milhão. Mas vai chegar uma hora que esse um milhão vai ficar insignificante comparado com o ao quadrado, e aí o que se conclui? Ela vai se estabilizar em quanto? (**Guiar/apoiar**).

[6.14] Vários alunos: 750.

[6.15] Professor: 750. (Informar/Sugerir). Então, de algum modo, a gente tem um jeito intuitivo de prever o comportamento de funções racionais, é a combinação do numerador e denominador que vai fazer com que a gente consiga saber se ela estabiliza ou não. Qualquer função racional vai ter esse comportamento de estabilidade, ou seja, o gráfico dela sempre se curva para baixo e segue como se fosse uma linha reta [professor faz movimento com as mãos]? (**Desafiar**).

[6.16] A3: Não.

[6.17] Professor: Não, por quê? (**Desafiar**).

[6.18] A8: Se o expoente for maior em cima, toda parte de baixo vai ser desprezível.

[6.19] Professor: Me dê um exemplo (**Desafiar**).

[6.20] A5: 750t sobre10t

[6.21] Professor: [anota na lousa $\frac{750t}{10t}$] 750t sobre 10 é 75t (**Informar/Sugerir**). Isso é uma reta. Tenta melhorar um pouquinho. Mas, de qualquer modo, não estabiliza, a reta é crescente. Tenta ajustar o exemplo dele. (**Desafiar**).

[6.22] A5: 750t ao quadrado sobre 10t.

[6.23] Professor: 750t ao quadrado sobre 10t [anota na lousa a fórmula $\frac{750t^2}{10t}$]. (**Informar/Sugerir**) Pode até colocar 10t mais um milhão, ou qualquer constante com um monte de zeros, que você quiser [anota na lousa a fórmula $\frac{750t}{10t+1000000}$]. A ideia é a mesma, a longo prazo

o que predomina aqui é o que a gente discutiu lá trás, quando eu penso em polinômio, quem vai definir o comportamento do numerador vai ser o 10t, e no numerador o 750t ao quadrado. Então esse milhão passa a ser desprezível em algum momento, e o que se conclui daqui? (**Desafiar**).
[Os alunos tentam elaborar uma resposta, mas não avançam].
[6.24] Professor: Que essa função vai se comportar como a função $75t$, porque o 750 divide pelo 10. E aí, de novo, uma reta (**Informar/sugerir**). A nossa função se estabilizou no 30, vocês seriam capazes de me dar uma função que vai se estabilizar no zero? (**Desafiar**).
[6.25] A1: Só colocar o termo mais significativo embaixo, dividindo: $10t$ sobre $750t$ ao quadrado.
[6.26] Professor: $10t$ sobre $750t$ ao quadrado [anota na lousa a fórmula $\frac{10t}{750t^2}$]. Pode continuar somando aqui [denominador] o que quiser [anota na lousa $\frac{10t}{750t^2+1000000+...}$]. (**Informar/Sugerir**). A longo prazo, o que acontece? (**Guiar/apoiar**)
[6.27] Vários alunos: Tende a zero.
[6.28] Professor: Esses daqui [apontando e riscando as constantes na fórmula] se tornam desprezíveis, quem predomina? Aqui em cima, só tem esse termo [apontando para o termo $10t$ no numerador], e aqui embaixo predomina esse [apontando para $750t^2$ no denominador]. E por que isso vai para zero? (**Desafiar**)
[6.29] A5: Esse valor é [referindo à simplificação na expressão $\frac{10t}{750t^2}$].
[6.30] Professor: [apontando para a expressão $\frac{10t}{750t^2}$]Aqui eu vou ter o 10 e o 750 que simplificam. Aqui, t dividido por t^2 [Escreve $\frac{10t}{750t^2} = \frac{1}{75t}$]. E aí o que a gente conclui disso? (**Desafiar**).
[6.31] A5: Cada vez menor.
[6.32] Professor: O numerador fixou e o denominador continuou crescendo, podemos dizer que isso daqui está cada vez mais próximo de quanto? (**Guiar/apoiar**).
[6.33] Vários alunos: De zero.
[6.34] Professor: De zero. Então basicamente quando a gente trabalha com esse tipo de função, ou ela estabiliza, ou ela não estabiliza. Se ela estabilizar, pode ser um valor constante (positivo ou negativo) ou nulo. Ou, ela pode não estabilizar e continuar crescendo ou decrescendo (**Informar/sugerir**).

Esse trecho evidencia as ações do professor, extrapolando o estudo do gráfico de concentração e ampliando o estudo do comportamento de funções racionais. Em alguns momentos pontuais, as falas enquadram-se na categoria “Guiar/apoiar”, em especial, quando o professor focaliza o pensamento do aluno e/ou encoraja-os a repetirem suas respostas sobre fatos importantes da função racional abordada como em [6.13], [6.26] e [6.32].

Predominam, porém, ações nas categorias “Informar/sugerir e Desafiar”. No primeiro caso, são ações similares àquelas analisadas em trechos anteriores, nas quais o professor valida as respostas dos estudantes ou fornece informações e explicações.

Destacamos, aqui, os vários momentos que se enquadram na categoria “Desafiar”. Em alguns deles, o professor questiona os alunos no intuito de apresentem justificativas para as conjecturas apresentadas a respeito do comportamento a longo prazo da função em análise como em [6.1], [6.7], [6.9], [6.17] e [6.28]. Em outros, encoraja a avaliação e reflexão a partir de novos exemplos, sejam eles trazidos pelo próprio professor ou criados pelos estudantes após serem encorajados pelo professor. É o que ocorre, por exemplo, em [6.5], quando o professor introduz, na discussão, um novo exemplo ou em [6.19] e

[6.21], nos quais ele solicita que o aluno proponha/ajuste um exemplo. A discussão é conduzida de modo que, a partir desses exemplos, os alunos tentem elaborar algum tipo de generalização a respeito do comportamento a longo prazo de uma função racional com base na análise conjunta do seu numerador e denominador. O professor finaliza a discussão e a aula em [6.34], sistematizando, a partir dos exemplos trazidos, os possíveis comportamentos a longo prazo de uma função racional. No caso: a função racional estabilizar ou continuar crescendo/decrescendo indefinidamente.

Discussão dos dados e considerações finais

Nosso objetivo, nesse artigo, foi compreender como as ações do professor, no contexto de uma aula de CDI envolvendo uma discussão a respeito de uma tarefa exploratória, podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes a partir do quadro teórico proposto por Araman, Serrazina e Ponte (2019), composto por quatro categorias: convidar, guiar/apoiar, informar/sugerir e desafiar. Para tal, analisamos seis trechos da discussão em que essas ações foram evidenciadas.

A partir da análise, nota-se que o início da discussão tem origem na ação de "Convidar", na qual os alunos são solicitados a relatar aos demais como resolveram a tarefa. Para Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013), as ações de "Convidar" se definem em momentos nos quais o professor procura levar os alunos a um contato inicial com o que está sendo discutido. No exemplo em questão, esta ação serviu para criar o contexto necessário para que os alunos pudessem expor as suas ideias iniciais e resoluções. Normalmente, são as primeiras ações desempenhadas pelo professor, com o intuito de inserir ou iniciar os alunos na discussão. Depois disso, elas são substituídas por ações das demais categorias (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019).

Posteriormente, podemos observar as ações de "Guiar/Apoiar" em momentos nos quais o professor busca destacar alguns aspectos da fala dos estudantes. Em um primeiro momento clarifica a construção da fórmula, em seguida, destaca alguns aspectos do gráfico e, por fim, extrapola a situação da concentração e investiga o comportamento a longo prazo de funções racionais em geral. As ações da categoria "Guiar/Apoiar" têm um papel dominante em todos os trechos, desde os questionamentos de questões pontuais (acerca da obtenção da expressão matemática, e do comportamento para valores de tempo "muito grandes") até em questões que possam conduzir o pensamento dos alunos ao ponto que a professor deseja (a generalização do conceito de função racional e seu comportamento a longo prazo). Segundo Ellis, Özgür e Reiten (2019), essas ações apresentam uma elevada capacidade para o progresso do raciocínio dos alunos.

Na categoria "Informar/sugerir", as ações se desenvolvem ao longo da discussão, trazendo informações que envolvam definições, nomenclaturas e conceitos que são novos no intuito de sistematizá-los, como nos trechos [3.15], [4.4] e [5.5]. Envolve, também, momentos para validar as respostas corretas, corrigir as incorretas ou, ainda, reelaborar uma resposta e compartilhá-la com os demais alunos, possibilitando a participação de todos os alunos, além de garantir o acesso de todos àquela informação (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019). Por exemplo, ao repetir uma resposta correta dada por um aluno, além de validá-la, o professor possibilita que aquela informação seja compartilhada com os demais alunos. As ações dessa categoria e da categoria anterior subsidiam a discussão da turma, tornando-a cada vez mais produtiva e com possibilidades de desenvolvimento de processos de raciocínio matemático mais elaborados (justificar e generalizar) que, normalmente, culminam com as ações da próxima categoria.

Por fim, a discussão segue de modo que ações da categoria “Desafiar” tornam-se mais presentes nos momentos em que o professor procura aprofundar justificativas de fatos trazidos na situação da concentração. Desse modo, ações dessa categoria podem auxiliar os alunos a esclarecer seus significados e fornecerem razões para justificar e fundamentar seu pensamento (WOOD, 1999). Por exemplo, nos trechos [6.28] e [6.30], nos quais os alunos clarificam suas ideias com conceitos em relação à concentração. Para Ellis, Özgür e Reiten (2019), as ações dessa categoria são as que apresentam maior potencial para o desenvolvimento de processos de raciocínio mais sofisticados como generalizar e justificar. Entretanto, como já dito, esses processos emergem da discussão da tarefa, do seu potencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático e das ações desempenhadas pelo professor nas categorias anteriores.

Reconhecemos um movimento contínuo e crescente das ações do professor durante a condução da plenária, relacionadas essencialmente com o aprofundamento das discussões a partir de elementos trazidos pelos próprios alunos e das oportunidades que se criam para a elaboração de conhecimento matemático nesse processo. Assim, a discussão da tarefa foi iniciada por uma ação de convidar por parte do professor, seguidas de ações de “Guiar/ Apoiar e Desafiar”. As ações de “Guiar/Apoiar” são recorrentes nos primeiros trechos e tem, por intuito, fazer com que os estudantes se envolvam na discussão, expor como fizeram a tarefa, focalizando aspectos importantes da tarefa e conduzir o pensamento dos alunos para aspectos importantes. Já nos últimos trechos, vemos uma presença maior de ações da categoria “Desafiar”, que tem, por intuito, trazer para o estudante a reflexão, a generalização, a justificativa e, principalmente, o desenvolvimento de novos conceitos matemáticos. Ações na categoria “Informar/Sugerir” se fazem presentes ao longo de toda discussão, em momentos pontuais na qual o professor traz novas informações e/ ou valida respostas dos estudantes. Perceber as ações do professor como um movimento contínuo é fundamental para compreender a potencialidade que elas apresentam para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Um fator determinante diz respeito às atitudes e às concepções dos atores envolvidos no contexto da discussão matemática (PONTE, 2005). Destacam-se, aqui, os processos comunicativos que se estabeleceram na sala de aula, centrados tanto em ideias matemáticas importantes quanto no desenvolvimento de significados matemáticos (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2019). Os tipos de questionamentos utilizados pelo professor mobilizaram diferentes processos de raciocínio, possibilitando a negociação de significados entre os envolvidos (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018).

Destaca-se, também, o papel da tarefa proposta e suas potencialidades com relação a esses processos. Seu caráter exploratório com a possibilidade de utilização, em sua resolução, de diferentes registros (verbal, gráfica, tabular e algébrica) ampliou a exploração de representações relevantes ao conceito de funções racionais, o estabelecimento de conexões entre a Matemática e outras áreas (no caso, um contexto da semirrealidade da engenharia) (PONTE, 2005, 2014).

Uma das limitações decorrentes do estudo é que, em alguns momentos, apressadamente, o professor parte para informar os estudantes, em lugar de convidá-los a reelaborar e/ou explicar o que fizeram na resolução da tarefa, aspecto que compromete o desenvolvimento do raciocínio matemático, podendo, também, refletir um baixo número de alunos que participaram da discussão. Como discutido em Trevisan e Mendes (2017), reconhece-se, também, a dificuldade em realizar uma avaliação quantitativa dos impactos dessa forma de trabalho em termos do desempenho dos estudantes na disciplina e eventuais impactos em índices de aprovação. Os autores destacam alguns aspectos que emergem dessa prática: estudantes mais ativos, interessados, com iniciativa para resolver as tarefas propostas em aula se comparados a estudantes de turma submetidas a uma prática "usual" de aula de CDI. Além disso, há estudantes permanecendo nas aulas da disciplina por mais tempo. Quando em uma abordagem tradicional, usualmente, há altos índices de desistência após a primeira prova; mesmo estudantes que reprovam. Além disso, torna-se necessário articular uma avaliação que oportuniza a aprendizagem e uma avaliação somativa, que atenda às demandas político-pedagógicas da instituição de ensino (cumprir uma ementa, atribuir nota, aprovar e reprovar estudantes) como discutido por Alves (2021).

Apesar disso, os resultados obtidos por este estudo evidenciam o potencial da proposta de trabalho com tarefas exploratórias, aliada às ações do professor na condução de discussões matemáticas a partir dessas tarefas, no desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes. Reconhecemos que esse tipo de trabalho se alinha às recomendações presentes nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o curso de graduação em engenharia (BRASIL, 2019), na medida em que possibilitam o desenvolvimento de habilidades necessárias à implantação de soluções de engenharia e propiciam uma comunicação eficaz em suas modalidades oral, escrita e gráfica.

Referências

ALVES, Roberta Marcelino de Almeida. **Análise de um processo avaliativo alinhado a um ambiente de ensino e de aprendizagem de cálculo pautado em episódios de resolução de tarefas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira; SERRAZINA, Maria de Lurdes, PONTE, João Pedro da. "Eu perguntei se o cinco não tem metade": ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 2, p. 466-490, 2019.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Superior. **Resolução n. 2, de 24 de abril de 2019**. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia, Brasília (Brasil), 26 abr. 2019. Diário Oficial da União, Brasília, DF, ed. 89. Seção 1, p. 43, 2019.

CABRAL, Tânia Cristina Baptista. Metodologias alternativas e suas vicissitudes: ensino de matemática para engenharias. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 8, p. 208-245, 2015.
COUTO, Alan Franco; FONSECA, Maycon Odailson dos Santos da; TREVISAN, André Luis. Aulas de cálculo diferencial e integral organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: um convite à insubordinação criativa. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 4, p. 50-61, 2017.

ELLIS, Amy; ÖZGÜR, Zekiye, REITEN, Lindsay. Teacher moves for supporting student reasoning. **Mathematics Education Research Journal**, Sydney, v. 30, n. 2, p. 1-26, 2019.

JEANNOTTE, Doris; KIERAN, Carolyn. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 96, n. 1, p. 1-16, 2017.

LANNIN, John; ELLIS, Amy; ELLIOT, Rebekah. **Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João Pedro da. Promover o raciocínio matemático dos alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781-801, 2018.

MORAIS, Cristina; SERRAZINA, Maria de Lurdes; PONTE, João Pedrp. Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n. 4, p. 552-570, 2018.

PONTE, João Pedro da. Gestão curricular em matemática. *In*: GTI (ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, João Pedro da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da matemática. *In*: PONTE, João Pedro da. (org.). **Práticas profissionais dos professores de matemática**. Lisboa. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 13-27.

PONTE, João Pedro da; MATA-PEREIRA, Joana; QUARESMA, Marisa. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, Lisboa, v. 22, n. 2, p. 55-81, 2013.

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa. Teachers’ professional practice conducting mathematical discussions. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 93, n. 1, p. 51-66, set. 2016.

POWELL, Arthur B.; FRANCISCO, John M.; MAHER, Carolyn A. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. **Bolema**, Rio Claro, v. 17, n. 21, p. 81-140, 2004.

SANTOS, Angela Rocha; BIANCHINI, Waldecir. **Aprendendo cálculo com Maple**: cálculo de uma variável. 1. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002.

SERRAZINA, Maria de Lurdes; RODRIGUES, Margarida; ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira. Envolver os alunos em processos de raciocínio matemático: as ações do professor. **Psicologia em Pesquisa**, Juiz de

Fora, v. 14, p. 18-36, 2020.

STYLIANIDES, Andreas J. The notion of proof in the context of elementary school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 65, n. 1, p. 1-20, 2007.

TREVISAN, André Luis; ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira. Argumentos apresentados por estudantes de cálculo em uma tarefa de natureza exploratória. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 23, p. 591-612, 2021.

TREVISAN, André Luis; ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira. Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, p. 158-178, 2021.

TREVISAN; André Luis; MENDES, Marcele Tavares. Ambientes de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. **Revista Brasileira de Ensino e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 11, n. 1, p. 209-227, 2018.

TREVISAN, André Luis; MENDES, Marcele Tavares. Integral antes de derivada? Derivada antes de integral? Limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de cálculo integral. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 3, p. 353-373, 2017.

TREVISAN, André Luis *et al*. O raciocínio matemático em um episódio de resolução de tarefas de Cálculo. *In:* XLVII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 47., 2019, Fortaleza. **Anais...** v. 1. Fortaleza: Cobenge, 2019. p. 1-11.

WHITE, Nina; MESA, Vilma. Describing cognitive orientation of calculus I tasks across different types of coursework. **ZDM Mathematics Education**, Hamburg, v. 46, n. 675-690, 2014.

WOOD, Terry. Creating a context for argument in mathematics class. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 30, n. 2, p. 171-191, 1999.

Recebido em: 29.04.2021
Revisado em: 19.04.2022
Aprovado em: 10.05. 2022

Editor: Fernando Rodrigues de Oliveira

André Luis Trevisan é doutor em ensino de ciências e educação matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). É professor do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) campus Londrina.

Mariana Vasconcelos Negrini é mestre em ensino de matemática pela Universidade

Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). É professora da educação básica, Secretaria de Educação doParaná (SEED/PR).
Bárbara de Falchi é mestranda em ensino de matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Eliane Maria de Oliveira Araman é doutora em ensino de ciências e educação matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). É professora do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) campus Cornélio Procópio.