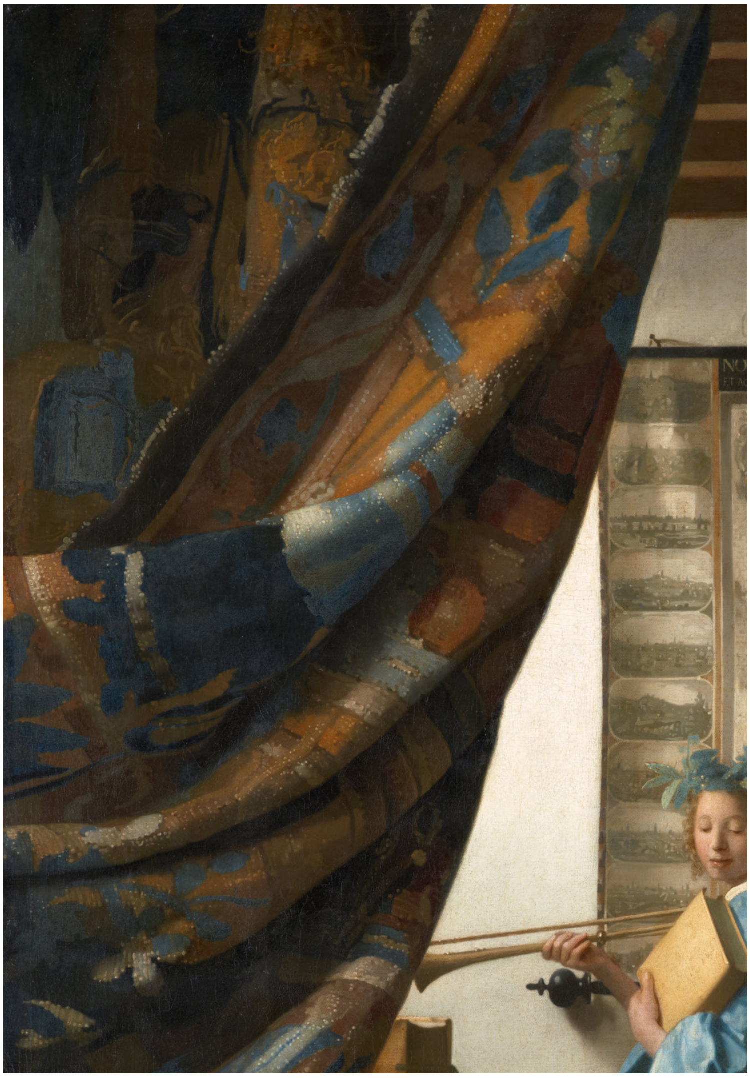
Cadernos Espinosanos



ESTUDOS SOBRE O SÉCULO XVII

n. 42 jan-jun 2020 ISSN 1413-6651

IMAGEM Detalhe de *A arte da pintura,* 1666, óleo sobre tela de Johannes Vermeer.-

ESPINOSA E A CARTA DA PROBABILIDADE

tradução de Samuel Thimounier Ferreira
Mestre, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil
thimounier@gmail.com

Carlos Henrique Melo de Souza
Mestre, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais,
São José dos Campos, Brasil
msouza.ch@gmail.com

ESPINOSA. B. (1677). *De Nagelate Schriften van B.d. S. Als Zedekunst, Staatkunde, Verbetering van' t Verstand, Brieven en Antwoorden, Uit verscheide Talen in de Nederlandse gebragt.* Amsterdam: Jan Rieuwertsz, pp. 582-583.

Escrita em 1º de outubro de 1666, a *Carta* XXXVIII é uma peça singular no bojo da correspondência de Espinosa. Trata-se da única, entre as oitenta e oito cartas supérstites, de conteúdo exclusivamente matemático.[1] A partir dela, portanto, temos a demonstração irrefutável de que o filósofo de engenho matemático[2] não apenas elaborava

1 Um tratado sobre probabilidade intitulado *Reeckening van Kanssen* ("Cálculo das chances"), publicado em 1687, foi durante muito tempo atribuído a Espinosa, mas sobre isso há pouca evidência e hoje já não se costuma incluir o documento entre as suas *opera*. De fato, a matemática aparece em outras cartas de Espinosa, mas frequentemente como parte do ferramental argumentativo sobre algum fenômeno ou experimento físico; exemplos claros disso são as cartas sobre óptica, trocadas com Johannes HUDDE (1628-1704) e Jarig JELLES (ca.1620-1683). Até onde sabemos, o filósofo não escreveu nenhuma obra de conteúdo estritamente matemático, mas era perito no uso da geometria, algo especialmente requerido em seus estudos e experimentos ópticos. Por conseguinte, a matemática não se patenteou nas obras de Espinosa apenas por meio da exposição *more geométrico* (à maneira geométrica), mas também por passagens de matemática que frequentemente aduzem aos *Elementos* de Euclides. Por exemplo, na *Carta* LVI, de 1674, Espinosa afirma: "ao apreender os *Elementos* de Euclides, entendi primeiro que os três ângulos do triângulo são iguais a dois retos, e percebi claramente essa propriedade do triângulo, embora fosse ignaro de muitas outras". Trata-se de uma clara referência à prop. 32 do Livro I dos *Elementos* de Euclides, sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo ser igual a dois retos (180 graus), que pode ser encontrada em muitos escritos de Espinosa, como no *Tratado da emenda do intelecto*, no *Breve Tratado*, na *Ética*, no *Tratado teológico-político* e em várias cartas de sua correspondência. Ademais, quando trata da ciência intuitiva, Espinosa lança mão também da prop. 19 do livro VII dos *Elementos* de Euclides, sobre o quarto número proporcional ou a regra de três simples, em três obras suas: no §23 do *Tratado da emenda do intelecto*, ele aduz: "dados três números, procura-se qual o quarto que está para o terceiro como o segundo para o primeiro"; na *Ética* II, retoma a fórmula no escólio II da prop. XL: "Por. ex., dados os números 1, 2 e 3, ninguém não vê que o quarto número proporcional é 6"; já no *Breve tratado*, ao tratar da razão no cap. XXI, Espinosa menciona, ainda que de passagem: "observamos ao falar do raciocínio e do entendimento claro, por meio do exemplo da regra de três".

2 Aqui tomamos a expressão de Henry Oldenburg (ca.1615-1677), na *Carta* XVI, de 6 de agosto de 1663, endereçada a Espinosa: "... que continues a consolidar os

seus pensamentos filosóficos *more geometrico*, como se costuma dizer, mas também possuía reconhecido domínio da própria matemática.

O endereçado é Jan van der Meer (1639-1686), filho de um financista e corretor de seguros de Leiden, que também havia sido tesoureiro da universidade local. Tal como o pai, é bem provável que ele tenha-se envolvido nos negócios da família. Tanto é que, possivelmente pela tradição familiar, ocupou o cargo de cobrador de impostos da Holanda durante o governo de Jan de Witt (1625-1672), e continuou a fazê-lo após 1672, sob Guilherme III.

A *Carta* XXXVIII responde a uma outra perdida, de Van der Meer. Este, pela resposta de Espinosa, havia levantado uma questão de matemática aplicada sobre jogos de apostas em que é necessário preservar, para todos os jogadores, a mesma chance de ganhar. Mas por que um assunto aparentemente lúdico ensejaria uma explicação tão técnica? De fato, perguntas sobre jogos não serviam apenas à diversão de cavalheiros, mas tinham uma importante aplicação prática à época: a precificação de anuidades (um tipo de pensão assegurada por um período contratado) e apólices de seguro, vendidas pelo Estado holandês. Foi justamente a analogia aos jogos de apostas que possibilitou a Jan de Witt desenvolver o cálculo de anuidades vitalícias, tomando-as como uma média ponderada de anuidades onde os pesos eram probabilidades hipotéticas de mortalidade (GIGERENZER *et al.*, 1989, p. 20).[3] Ao escrever para Espinosa, é provável que Jan van der Meer buscasse respostas para problemas

princípios das coisas conforme a agudeza do teu engenho matemático".

3 Em 1671, Jan de Witt publicou um estudo sobre cálculo de anuidades vitalícias intitulado *Waardije van lyf-renten naer proportie van los-renten* (Haia).

enfrentados no seu próprio cargo ou a mando do seu chefe, o Grande Pensionário De Witt, de quem Espinosa também era amigo e defensor.

⁂

De posse da *Carta* XXXVIII, buscaremos explicar aqui os meandros matemáticos que Espinosa percorre ao responder seu correspondente, tentando deslindar a profundidade que o conteúdo suscita, até mesmo aos matemáticos do nosso tempo. Nesse sentido, fez-se imperioso vertermos a carta diretamente do original holandês, algo inédito em língua portuguesa, vez que o rigor técnico e terminológico subsidiará a nossa análise. Nossa tradução para o português em simultâneo com o texto holandês são dados no Apêndice.

Espinosa inicia sua resposta, já com uma conclusão a respeito da questão que lhe fora passada.

> Enquanto me encontro aqui na solidão do campo, refleti sobre a questão que me propuseste e a descobri muito simples. A prova geral funda-se no fato de que um jogador honesto é aquele que coloca sua chance de ganhar ou perder igual à de seu adversário. Essa chance consiste na sorte e no dinheiro que os adversários apostam e arriscam; isto é, se a sorte é igual para os adversários, então cada um também deve apostar e arriscar a mesma quantia em dinheiro; mas, se a sorte é desigual, então um deve apostar e adicionar tanto mais dinheiro, quanto maior for sua sorte; e com isso a chance será igual em ambos os lados e, por conseguinte, o jogo será justo.

Ora, ao leitor que lê essas primeiras frases desamparadamente, a coisa pode parecer muito obscura, intrincada e, por isso mesmo, enfadonha. Mas é preciso dar azo a Espinosa, mesmo que às vezes lhe falte conjugar à profundidade a clareza exigida. Assim, antes de seguirmos na esteira da carta sobrepondo nossas explicações àquelas do filósofo, forneceremos um panorama histórico e algumas indicações terminológicas.

Os métodos matemáticos de probabilidade surgiram notadamente nas investigações do polímata italiano Girolamo CARDANO (1501-1576), consolidadas na obra *Liber de ludo aleae* ("Livro sobre o jogo de chance"), envolvendo questões como a justa divisão de apostas em um jogo de azar interrompido. Embora publicada só em 1663 (mais de um século depois de escrita), certamente a obra já circulava e era bem conhecida antes disso; tanto que, entre 1654 e 1660, questões semelhantes foram reavivadas e discutidas em cartas trocadas pelos matemáticos franceses Pierre de FERMAT (1601-1665) e Blaise PASCAL (1623-1662). Todavia, foi Christiaan Huygens[4] que levou a discussão a um patamar superior, em seu *De ratiociniis in ludo aleae* ("Sobre os cálculos no jogo de chance", 1657), considerado o primeiro livro de teoria moderna da probabilidade. De fato, o pequeno livro, contendo quatorze proposições, foi escrito em holandês e traduzido pelo matemático e professor da Universidade de Leiden Frans van SCHOOTEN (1615-1660). Ainda que Huygens não seja mencionado nesta carta, é muito provável que Espinosa conhecesse bem seu *De ratiociniis in ludo aleae*, sobretudo porque ele era não menos que seu vizinho e porque esposou, na *Carta* XXXVIII, a mesma terminologia técnica.

4 Christiaan HUYGENS (1629-1695) foi um proeminente matemático, astrônomo e físico holandês. Em 1663 foi eleito membro da Royal Society de Londres, e em 1666, membro eminente da Académie des Sciences, fundada no mesmo ano em Paris. Entre 1664 e 1666, Espinosa visita Huygens em várias ocasiões, ou na mansão Hofwijck, em Voorburg, ou na residência de Haia, para discutir questões de física, principalmente aquelas relacionadas à ótica.

Voltando-nos à carta, logo no início o filósofo esclarece *kans* como sendo *lot* e *gelt* juntos. Em nossa tradução vertemos, rigorosamente, *kans* (latim *exspectatio*) por "chance", *lot* (latim *sors*) por "sorte" e *gelt* por "dinheiro". A tradução latina das *Opera Posthuma* verte *kans* por *exspectatio* ou *aequalitas*, e *lot* por *sors*. Embora essa terminologia soe estranhíssima até aos matemáticos hodiernos, é de notar que uso do termo *probabilitas* ("probabilidade") — com o qual estamos muito mais habituados — só seria difundido no século XVIII, com o francês Jacob Bernoulli (1654-1705), a partir de sua obra *Ars conjecturandi* ("A arte de conjecturar"), publicada em 1703. De todo modo, para evitarmos tanto o estranhamento quanto a confusão que pode gerar o sentido corriqueiro das palavras "sorte" e "chance", estabeleceremos aqui algumas correspondências terminológicas, no rigor das opções de tradução já mencionadas, a fim de auxiliar o acompanhamento e o esclarecimento dos raciocínios de Espinosa ao longo da carta.

Primeiro, por "sorte" devemos entender justamente o termo moderno "probabilidade". Embora haja diferentes teorias que envolvem o conceito de probabilidade, lidaremos aqui com a chamada teoria da frequência, ou seja, sendo p a probabilidade de um evento ocorrer, se são realizadas N ocorrências e o evento ocorre n vezes, então a razão n/N tende a p quando N é relativamente muito grande, ou, no jargão matemático, quando N "tende ao infinito". Mas o que isso quer dizer? Grosso modo, que quanto mais ocorrências houver, tanto mais a recolha dos resultados implicará aquela probabilidade p. Por exemplo, no lançamento de uma moeda não viciada, é de se esperar que as chances de cara ou coroa sejam iguais. Em termos da teoria frequência, isso implica que, após uma série de jogadas, a frequência com que a cara sai seja igual à frequência com que a coroa sai. Definindo a frequência de ocorrência de caras como o número de ocorrências de caras pelo número total de jogadas, tem-se que, após jogar a moeda um grande número de vezes, a ocorrência de caras será aproximadamente metade do número total de jogadas, o que implica uma frequência de aproximadamente 1/2. Esse valor é justamente a probabilidade de sair cara em uma jogada.

Segundo, por "chance" devemos entender "valor esperado" de ganhar, termo também conhecido por "esperança" ou "expectância" (o que é compatível com o latino *expectatio*). Aqui, será preciso recorrermos a Huygens para entender mais acuradamente o uso do termo "chance". Em seu *De ratiociniis in ludo aleae*, os problemas envolvem o valor de uma aposta particular e uma ou mais possibilidade de prêmio. Isto é, se somos convidados a apostar em um jogo com vários prêmios dependendo dos vários resultados, demandamos o prêmio justo de acordo com a aposta que fizemos. E embora a tradução latina de Van Schooten não tenha sido terminologicamente rigorosa, pode-se asserir que, para Huygens (1657, pp. 521-522), *expectatio* é o valor a ser apostado que corresponde ao ganho esperado do jogo. Assim, dizemos que o valor apostado é justo, porque, se a aposta ocorre repetidas vezes, o prêmio esperado será igual ao acumulado dos valores apostados em todas as vezes. Se pagamos mais do que o valor esperado, tenderemos a perder, e se pagamos menos, tenderemos a lucrar. Em suma, na abordagem Huygens — que é idêntica à de Espinosa —, o prêmio justo equivale ao valor da aposta correspondente de um jogador, de tal maneira que

kans ou *expectatio* = *chance* = *valor esperado de ganhar* = *valor apostado*

Matematicamente, o valor esperado é dado pela soma do produto de cada probabilidade de saída do evento pelo seu respectivo valor. Assim, por exemplo, num jogo em que quem ganha recebe o montante

M e quem perde paga R, o valor esperado, para cada jogador, será a multiplicação de M pela probabilidade de ganhar (p) somado à multiplicação de R pela probabilidade de perder $(1 - p)$, ou seja

$$E = \textit{valor esperado de ganhar} + \textit{valor apostado} = M.p + R.(1 - p)$$

E como dito antes, para que a aposta seja justa, o "valor esperado de ganhar" deve ser equivalente ao "valor apostado", ou seja

$$M.p = R.(1 - p)$$

$$M.p - R.(1 - p) = 0$$

Note-se que tais resultados algébricos correspondem ao que Espinosa afirma logo no início da carta: primeiro, que "um jogador justo é aquele que coloca sua chance de ganhar ou perder igual à de seu adversário"; que a "*chance* consiste na sorte e no dinheiro que os adversários apostam e arriscam", ou seja, é proporcional à probabilidade e ao valor da aposta. Pois bem, feito o prelúdio, passemos enfim à análise da carta.

Para responder à questão de Van der Meer, Espinosa lança mão de dois tipos de jogos de apostas, nos quais, dadas algumas condições e variáveis, deve haver chances iguais de ganhar para todos os jogadores. O primeiro tipo é um jogo de ganhar ou perder cuja quantia dada como prêmio resulta da soma das apostas individuais dos jogadores. Já o segundo é um jogo de adivinhação, com no mínimo uma tentativa de acerto, em que o adivinhador recebe uma quantia se ganhar e paga outra quantia se perder. A seguir, dividimos nossa análise em duas, conforme o tipo de jogo, e perpassamos uma a uma, subsequentemente, cada passagem da carta.

[1] *Com efeito, se, por exemplo, A, jogando contra B, tem duas sortes de ganhar e não mais que uma de perder, e, ao contrário, B não tem mais que uma sorte de ganhar e tem duas de perder, aparece claramente que A deve arriscar, para cada sorte, tanto quanto B para a sua; isto é, A deve arriscar o dobro que B.*

Algebricamente, temos para A:

- A tem duas sortes de ganhar: $p_A = 2/3$
- A tem não mais que uma sorte de perder: $1 - p_A = 1/3$

Consequentemente, para B:

- B tem não mais que uma sorte de ganhar: $p_B = 1/3$
- B tem duas sortes de perder: $1 - p_B = 2/3$

Espinosa conclui que as apostas de A e B devem ser proporcionais às suas sortes, isto é, à probabilidade que cada um tem de ganhar. Assim, tem-se que A deve apostar $p_A.M = 2M/3$ e que B deve apostar $p_B.M = M/3$. Esses valores correspondem aos valores esperados de ganhos para cada um dos jogadores, tendo em conta a probabilidade desigual de ganharem. O efeito prático disso é que, após um grande número de jogos (ocorrências), A e B terão ganhado o mesmo valor que cumulativamente apostaram.

[2] *Para mostrar isso ainda mais claramente, suponhamos que três, A, B, C, joguem juntos com chance igual e que cada um aposte a mesma quantia em dinheiro. É manifesto que, porque cada um aposta o mesmo dinheiro, cada um também não arrisca mais que um terço para ganhar dois terços, e que, porque cada*

um joga contra dois, cada um também tem não mais que uma sorte de ganhar contra duas de perder.

Espinosa confere um pouco mais de generalidade acrescentando um terceiro jogador C, e desenvolve o raciocínio a partir da mesma explicação anterior. Algebricamente, expomos as suas conclusões.

Dado que A, B e C têm chance igual de ganhar o prêmio M e que apostam, cada um, o mesmo valor $M/3$, então

$$\textit{valor esperado de ganhar} = \textit{valor apostado}$$

$$p_A.M = p_B.M = p_C.M = M/3$$

• A, B e C têm não mais que uma sorte de ganhar: $p_A = p_B = p_C = 1/3$

• A, B e C têm duas sortes de perder: $1 - p_A = 1 - p_B = 1 - p_C = 2/3$

[3] *Se se supõe que um desses três, a saber, C, desiste antes de ter começado a jogar, então é manifesto que ele deve pegar para si somente o que apostou, isto é, um terço;*

Trata-se de uma versão simplificada do problema de divisão justa do prêmio de um jogo interrompido. Dizemos "simplificada" pois o jogo ainda nem começou e, por isso, a probabilidade de C ganhar corresponde à sua probabilidade inicial de ganhar, isto é, $p_C = 1/3$, como já mostramos.

Por outro lado, num jogo iniciado, as probabilidades podem mudar e alguém que se veja provavelmente muito desfavorecido pode querer desistir. Nesse caso, a fração do prêmio que lhe convém deve ser proporcional à sorte (probabilidade) de ganhar no momento da saída.

[4] *e que B, se quiser comprar a chance de C e tomar o seu lugar, deve apostar tanto quanto C pegou de volta para si;*

Se B ocupar também o lugar de C, aumenta a probabilidade de B ganhar, isto é, a nova probabilidade de B ganhar será

$$p_B' = p_B + p_C$$

Consequentemente, o novo valor esperado para B será

$$p_B'.M = p_B.M + p_C.M$$

Essa última expressão indica que para que as chances entre A e B permaneçam iguais, B agora deve adicionar à sua aposta inicial o valor que C teria apostado se não tivesse desistido, isto é, $p_C.M$.

[5] *contra o que A nada poderá fazer, pois para ele não há diferença se ele deve entrar com uma chance contra duas chances de dois homens diferentes ou de um homem sozinho.*

Acima, Espinosa apenas atesta que quanto a A, num jogo de apostas justas, os resultados são os mesmos se B e C estão jogando ou se apenas B joga cobrindo a aposta C e recebendo a probabilidade de C ganhar.

TIPO 2: UM JOGADOR RECEBE UMA QUANTIA SE GANHAR E PAGA OUTRA QUANTIA SE PERDER

[6] *Se se põe assim, segue-se daí que, quando alguém estende sua mão para deixar um outro adivinhar um de dois números, e se ele adivinha, ganha certa quantia em dinheiro, ou, se ele não adivinha, perde certa quantia igual em dinheiro, segue-se que, digo, a chance é igual para ambos os lados, a saber, tanto para aquele que deixa adivinhar, quanto para aquele que deve adivinhar.*

Se quem estende a mão é A e quem adivinha é B, são dadas as seguintes condições:

- a probabilidade de B acertar: $p_B = 1/2$
- a probabilidade de B errar: $1 - p_B = 1/2$
- se B acertar, B ganha X
- se B errar, B paga X

As chances serão iguais quando as chances de B acertar e errar se anularem, isto é, quando seu valor esperado for zero. Algebricamente, as condições uma aposta justa, vejamos

$$p_B.X - (1 - p_B).X = (1/2).X - (1/2).X = 0$$

Na prática, isso quer dizer que, após muitas jogadas, B tende a ganhar toda a quantia que perdeu. Reciprocamente, o mesmo ocorre com A.

[7] *Além disso, se ele estende sua mão para deixar um outro adivinhar, na primeira vez, um de três números, e se este, adivinhando o número, ganhar certa*

quantia em dinheiro, e se não adivinha, perde metade, então a chance será igual para ambos os lados;

Novamente, se quem estende a mão é A e quem adivinha é B, são dadas as seguintes condições:

- a probabilidade de B acertar: $p_B = 1/3$
- a probabilidade de B errar: $1 - p_B = 2/3$
- se B acertar, B ganha X
- se B errar, B paga $X/2$

O valor esperado nesse caso será

$$p_B.X - (1 - p_B).(X/2) = (1/3).X - (2/3).(X/2) = 0$$

Mais uma vez, as condições implicam chances iguais.

[8] *assim como a chance também é igual para ambos os lados se aquele que estende a sua mão dá ao outro duas vezes para adivinhar, de maneira que, se este adivinha, ganha certa quantia em dinheiro, e se não adivinha, perde o dobro.*

Novamente, se quem estende a mão é A e quem adivinha é B, são dadas as seguintes condições:

- a probabilidade de B acertar: $p_B = 2/3$
- a probabilidade de B errar: $1 - p_B = 1/3$
- se B acertar, B ganha X
- se B errar, B paga $2X$

O valor esperado nesse caso será

$$p_B.X - (1 - p_B).(2X) = (2/3).X - (1/3).(2X) = 0$$

Mais uma vez, as condições implicam chances iguais.

[9] *A chance também é a igual se ele o deixa adivinhar, em três vezes, um de quatro números, para ganhar certa quantia em dinheiro, ou, caso contrário, perder três vezes essa quantia;*

Novamente, se quem estende a mão é A e quem adivinha é B, são dadas as seguintes condições:

- a probabilidade de B acertar: $p_B = 3/4$
- a probabilidade de B errar: $1 - p_B = 1/4$
- se B acertar, B ganha X
- se B errar, B paga $3X$

O valor esperado nesse caso será

$$p_B.X - (1 - p_B).(3X) = (3/4).X - (1/4).(3X) = 0$$

Mais uma vez, as condições implicam chances iguais.

[10] *ou, em quatro vezes, um de cinco números, para ganhar uma ou perder quatro, etc.*

Novamente, se quem estende a mão é A e quem adivinha é B, são dadas as seguintes condições:

- a probabilidade de B acertar: $p_B = 4/5$
- a probabilidade de B errar: $1 - p_B = 1/5$
- se B acertar, B ganha X
- se B errar, B paga $4X$

O valor esperado nesse caso será

$$p_B.X - (1 - p_B).(4X) = (4/5).X - (1/5).(4X) = 0$$

Mais uma vez, as condições implicam chances iguais.

[11] *De tudo isso, segue-se que, para aquele que estende sua mão e deixa adivinhar, dá no mesmo que um outro adivinhe quantas vezes quiser em relação a um número múltiplo, desde que ele, para as vezes que escolheu adivinhar, também aposte e arrisque, contra o outro, tanto quanto resulta do número de vezes dividido pela soma dos números. Por exemplo, se o número é cinco e alguém não deve adivinhar mais do que uma vez, então ele deve apostar 1/5 contra 4/5 do outro; se adivinhar duas vezes, então ele deve arriscar 2/5 contra 3/5 do outro; se três vezes, 3/5 contra 2/5 do outro, e assim por diante, 4/5 contra 1/5 e 5/5 contra 0/5.*

Agora, partimos para a dedução da equação geral que resulta em chances iguais. Se quem estende a mão é A e quem adivinha é B, se B pode adivinhar um número entre N possíveis, e se B pode tentar n vezes, então

- a probabilidade de B acertar: $p_B = n/N$
- a probabilidade de B errar: $1 - p_B = (N - n)/N$

• se B acertar, B ganha $(N - n).X$ e

• se B errar, B paga $n.X$

Nessas condições, o valor esperado será

$$(n/N).(N - n).X - ((N - n)/N).(n.X) = 0$$

Portanto, para que as chances de A e B sejam iguais, se B tenta adivinhar n vezes um número entre N possíveis, ele deve apostar n vezes o valor X e seu prêmio de acerto será $(N - n).X$. Nestas condições o valor esperado será sempre nulo

[12] *E por conseguinte, para aquele que deixa adivinhar, se ele, por exemplo, não arrisca mais que 1/6 do apostado para ganhar 5/6, dará no mesmo que um só adivinhe cinco vezes ou que cinco homens adivinhem uma vez cada um, como acontece na tua questão.*

1º de outubro de 1666.

Espinosa finaliza aqui aduzindo à mesma indiferença de resultados quanto a A, mencionada na conclusão do exemplo do primeiro tipo: seja o adivinhador um único indivíduo adivinhando n vezes, sejam n indivíduos adivinhando cada um uma única vez, se A vence, seu prêmio será sempre $n.X$.

⁂

A tradução e análise da *Carta* XXXVIII é, até onde encontramos, um feito inédito para a comunidade espinosana lusófona, que revela um documento de primeira ordem capaz não só de reafirmar Espinosa como filósofo à guisa de geômetra, mas também de evidenciar seu quinhão de matemático propriamente dito, mais ainda, um digno de ser consultado.

Possivelmente pelas dificuldades impostas, a carta foi até então tratada como um nó górdio entre os estudiosos de Espinosa, dada a parca bibliografia dedicada a ela, e possivelmente inexistente quanto à análise do conteúdo em si. Todavia, como visto, esclarecidos o pano de fundo e a terminologia, a resposta de Espinosa não resulta em grande dificuldade matemática. E embora, à época, a teoria da probabilidade moderna estivesse em seus primórdios, é muito interessante ver que, dentro das condições e dos conceitos empregados, as conclusões engendradas pelo filósofo estavam corretas.

Epistola xxxviii.

Ornatissimo Viro,

JOHANNI VAN DER MEER

B. d. S.

Myn heer,

Terwijl ik my hier in enigheit op 't lant bevind, heb ik mijn gedachten op dit geschil gevest, 't welk gy my voorgestelt hebt, en heb het zelfde zeer eenvoudig bevonden. Het algemeen bewijs daar af steunt hier op, dat dit een oprecht speelder is, die zijn kans van te winnen, of van te verliezen tegen zijn tegenstrever gelijk stelt. Deze *kans* bestaat in 't lot, en in 't gelt, 't welk de tegenstrevers inleggen en wagen: dat is, indien het lot aan wederzijden gelijk is, zo moet ook yder even veel gelt inleggen en wagen: maar indien het lot ongelijk is, zo moet d' een zo veel meer gelt inleggen en byzetten, als zijn lot groter is; en daar meê zal de kans aan wederzijden gelijk, en by gevolg het spel rechtvaerdig wezen. Want indien, tot een voorbeelt, A, tegen B spelende, twee loten om te winnen, en niet meer dan een om te verliezen, en, in tegendeel, B niet meer dan een lot om te winnen, en twee om te verliezen heeft, zo blijkt klarelijk dat A voor yder lot zo veel moet wagen, als B voor het zijne: dat is, A moet het dubbelt van B wagen. Om dit noch klarelijker te tonen, zullen wy stellen dat drie, A. B. C. met gelijke kans te zamen spelen, en dat yder even veel gelt inlegt. Het blijkt dat, dewijl yder even gelt inlegt, yder ook niet meer dan een darde deel waagt, om twee darde delen te winnen, en dat, dewijl yder tegen twee speelt, yder ook niet meer dan een lot, om daar meê te winnen, tegen twee, om daar aan te verliezen heeft. Indien men stelt

Carta XXXVIII

Distintíssimo senhor

JOHANNES VAN DER MEER

B. d. S.

Meu senhor,

Enquanto me encontro aqui na solidão do campo, refleti sobre a questão que me propuseste e a descobri muito simples. A prova geral funda-se no fato de que um jogador honesto é aquele que coloca sua chance de ganhar ou perder igual à de seu adversário. Essa *chance* consiste na sorte e no dinheiro que os adversários apostam e arriscam; isto é, se a sorte é igual para os adversários, então cada um também deve apostar e arriscar a mesma quantia em dinheiro; mas, se a sorte é desigual, então um deve apostar e adicionar tanto mais dinheiro, quanto maior for sua sorte; e com isso a chance será igual em ambos os lados e, por conseguinte, o jogo será justo. Com efeito, se, por exemplo, A, jogando contra B, tem duas sortes de ganhar e não mais que uma de perder, e, ao contrário, B não tem mais que uma sorte de ganhar e tem duas de perder, aparece claramente que A deve arriscar, para cada sorte, tanto quanto B para a sua; isto é, A deve arriscar o dobro que B. Para mostrar isso ainda mais claramente, suponhamos que três, A, B, C, joguem juntos com chance igual e que cada um aposte a mesma quantia em dinheiro. É manifesto que, porque cada um aposta o mesmo dinheiro, cada um também não arrisca mais que um terço para ganhar dois terços, e que, porque cada um joga contra dois, cada um também tem não mais que uma sorte de ganhar contra duas de perder. Se se supõe que um desses três, a saber, C, dat een van deze drie, te weten C, uitscheid, eer men heeft begonnen te spelen, zo blijkt dat hy alleenlijk het geen, 't welk hy ingelegt heeft, dat is een darde deel, naar zich behoeft te nemen: en dat B, zo hy de kans van C wil kopen, en zijn plaats bekleden, zo veel zal moeten inleggen, als C weêr naar zich neemt: daar A niet tegen zal konnen; dewijl 't hem niet verschilt, of hy met een kans tegen twee kanssen van twee verscheide menschen, of van een mensch alleen moet aangaan. Indien men dit vaststelt, zo volgt hier uit, dat, als iemant zijn hant uitsteekt, om aan een ander van twee getallen te laten raden, en, indien hy 't raad, zekere somme gelts te winnen, of, indien hy 't niet raad, gelijke somme te verliezen; dat, zeg ik, de kans aan weêrzijden gelijk is, te weten zo wel voor de geen, die raden laat, als voor de geen, die raden moet. Wijders, indien hy zijn hant uitsteekt, om een ander met d' eerste maal een van drie getallen te laten raden, op dat de zelfde, het getal radende, zekere somme gelts zou winnen, of, indien hy 't niet raad, de helft daar af verliezen, zo zal de kans van wederzijden gelijk wezen: gelijk de kans van weêrzijden ook gelijk is, indien de geen, die zijn hant uitsteekt, aan d' ander twee malen te raden geeft, om, indien de zelfde het raad, zekere somme gelts te winnen, of, indien hy 't niet raad, het dubbelt te verliezen. De kans is ook gelijk, indien hy hem een van vier getallen in drie malen laat raden, om zekere somme te winnen, of in tegendeel driemaal zo veel te verliezen; of in vier malen een van vijf getallen, om een te winnen, of vier te verliezen, enz. Uit dit alles volgt dat het voor de geen, die zijn hant uitsteekt, en raden laat, even veel is dat een ander zo veel malen, als hy begeert, naar een veelvoudig getal raad, als hy slechs voor die malen, die hy aanneemt te raden, ook zo veel tegen d' ander inlegt en waagt, als het getal van de malen, door de somme van de getallen gedeelt, bedraagt. Tot een voorbeelt, indien de getallen vijf zijn, en iemant niet meer, dan eenmal moet raden, zo moet hy slechs een 1/5 tegen het 4/5 van d' ander wagen: indien hy twee malen desiste antes de ter começado a jogar, então é manifesto que ele deve pegar para si somente o que apostou, isto é, um terço; e que B, se quiser comprar a chance de C e tomar o seu lugar, deve apostar tanto quanto C pegou de volta para si; contra o que A nada poderá fazer, pois para ele não há diferença se ele deve entrar com uma chance contra duas chances de dois homens diferentes ou de um homem sozinho. Se se estabelece isto, segue-se daí que, quando alguém estende sua mão para deixar um outro adivinhar um de dois números, e se o outro adivinha, ganha certa quantia em dinheiro, ou, se ele não adivinha, perde uma quantia igual, segue-se que, digo, a chance é igual para ambos os lados, a saber, tanto para aquele que deixa adivinhar, quanto para aquele que deve adivinhar. Além disso, se ele estende sua mão para deixar um outro adivinhar, na primeira vez, um de três números, e se este, adivinhando o número, ganhar certa quantia em dinheiro, e se não adivinha, perder metade, então a chance será igual para ambos os lados; assim como a chance também é igual para ambos os lados se aquele que estende a sua mão dá ao outro duas vezes para adivinhar, de maneira que, se este adivinha, ganha certa quantia em dinheiro, e, se não adivinha, perde o dobro. A chance também é igual se ele o deixa adivinhar, em três vezes, um de quatro números, para ganhar certa quantia em dinheiro, ou, caso contrário, perder três vezes essa quantia; ou, em quatro vezes, um de cinco números, para ganhar uma ou perder quatro, etc. De tudo isso, segue-se que, para aquele que estende sua mão e deixa adivinhar, dá no mesmo que um outro adivinhe quantas vezes quiser em relação a um número múltiplo, desde que ele, para as vezes que escolheu adivinhar, também aposte e arrisque, contra o outro, tanto quanto resulta do número de vezes dividido pela soma dos números. Por exemplo, se o número é cinco e alguém não deve adivinhar mais do que uma vez, então ele deve apostar 1/5 contra 4/5 do outro; se adivinhar duas vezes, então ele deve zal raden, zo moet hy het 2/5 tegen het 3/5 van d' ander wagen: indien drie malen, het 3/5 tegen het 2/5 van d' ander, en zo voort 4/5 tegen 1/5 en 5/5 tegen 0/5. En by gevolg zal het voor de geen, die raden laat, indien hy, tot een voorbeelt, niet meer dan 1/6 van 't ingelegde waagt, om 5/6 te winnen, even veel zijn of een alleen vijf malen raad, of dat vijf menschen yder eens raden; gelijk uw geschil meêbrengt.

1. Octob. 1666.

arriscar 2/5 contra 3/5 do outro; se três vezes, 3/5 contra 2/5 do outro, e assim por diante, 4/5 contra 1/5 e 5/5 contra 0/5. E por conseguinte, para aquele que deixa adivinhar, se ele, por exemplo, não arrisca mais que 1/6 da aposta para ganhar 5/6, dará no mesmo que um só adivinhe cinco vezes ou que cinco homens adivinhem uma vez cada um, como acontece na tua questão.

1º de outubro de 1666.

NOTA DA TRADUÇÃO: Esta carta consta nas *Opera Posthuma* de Espinosa como EPISTOLA XLIII. O original holandês se perdeu, todavia, segundo Gebhardt (ESPINOSA, 1925, IV, p. 408), o texto dos *Nagelate Schriften* é uma reprodução do original, ao passo que o latino apresentado nas *Opera Posthuma* é uma tradução não de Espinosa. Vertemos a partir do texto holandês dos *Nagelate Schriften*. Nas *Opera Posthuma*, indicam-se apenas as iniciais "J. v. M." do correspondente. São Van Vloten & Land que, em sua edição de 1882, dão pela primeira vez o nome inteiro "Johannes van der Meer", e foram seguidos por Gebhardt e demais tradutores.

REFERÊNCIAS BILIOGRÁFICAS

ESPINOSA. B. (1677). *De Nagelate Schriften van B.d. S. Als Zedekunst, Staatkunde, Verbetering van' t Verstand, Brieven en Antwoorden, Uit verscheide Talen in de Nederlandse gebragt.* Amsterdam: Jan Rieuwertsz, pp. 582-583.

__________. (1925). *Spinoza Opera.* Im Auftrag der Heidelberger Akademie der Wissenschaften herausgegeben von Carl Gebhardt. Heildelberg: Carl Winter, v. IV.

GIGERENZER, G. et al. (Ed.). (1989). The Empire of Chance: How Probability Changed Science and Everyday Life, Cambridge: Cambridge University Press.

HUYGENS, C. (1657). De ratiociniis in ludo aleae. In: *De ratiociniis in ludo aleae.* In: *Van Schooten F. Ed. Exercitationem mathematicarum libri quinque.* Leiden: Johannes Elsevir, v. V.