# SUR LE THEOREME DE MENELAÜS ET SES APPLICATIONS DANS *LES SPHERIQUES* DE *L'ISTIKMAL* D'IBN HUD DE SARAGOSSE

*À la mémoire d'Hélène* BELLOSTA

Mohamad AL HOUJAIRI
Université Libanaise, CNRS-Liban (Équipe ERTSA) et
Société Libanaise d'Histoire des Sciences

**RÉSUMÉ** — Cet article porte notamment sur le fameux théorème de Ménélaüs et ses applications dans les *Sphériques* de l'*Istikmāl* du mathématicien saragocien, Ibn Hūd (XI[e] s.). L'étude est basée essentiellement sur les données du manuscrit « Copenhague Or. 82 » et elle comportera trois parties principales : 1) une traduction française des textes manuscrits étudiés ; 2) un commentaire mathématique et historique de leur contenu ; 3) une identification des sources d'Ibn Hūd dans le traitement de ce théorème et ses applications. Le lecteur y trouvera aussi établis et traduits quelques textes (Ibn 'Irāq) qui portent sur le même thème.

**ABSTRACT** — (On the Menelaus's theorem and its applications in the *Spherics* of al-*Istikmāl* of Ibn Hūd from Zaragoza). This paper focuses particularly on the famous theorem of Menelaus and its applications in the *Spherics* of al-*Istikmāl* of mathematician from Zaragoza, Ibn Hūd (11[th] century). The study is essentially based on the data of « Copenhagen manuscript Or 82 » and consists of three main parts: 1) A French translation of the manuscript studied texts; 2) A mathematical and historical comment of their content, 3) An identification of sources of Ibn Hūd in the treatment of this theorem and its applications. The reader will also find some established and translated texts (Ibn 'Irāq) that carry the same theme.

# Introduction

## 1. Vers l'élaboration d'un dossier sur les *sphériques gréco-arabes*

L'élaboration d'un dossier « satisfaisant » sur le développement des *sphériques gréco-arabes* est évidemment une tâche séduisante pour les chercheurs. Pourtant il semble que sa réalisation actuelle soit loin d'être facile. Parmi les difficultés et les facteurs qui entravent une telle réalisation, nous invoquons les suivants : 1) l'obstacle imposé par l'ignorance de la langue : la plupart des chercheurs ignorent l'arabe alors que la plupart des traités sphériques grecs nous sont parvenus grâce aux manuscrits écrits notamment en arabe (traductions et commentaires) ; 2) l'absence d'une collaboration efficace entre les chercheurs ; 3) la dispersion des données manuscrites ; 4) la rareté des données éditées sur l'histoire des sphériques : les travaux scientifiques publiés par les historiens sur les *sphériques gréco-arabes* sont très rares par comparaison avec ceux qui concernent les autres domaines de l'histoire des mathématiques arabes ; 5) dans la plupart des cas, les travaux menés en histoire des sphériques gréco-arabes sont d'aspect sélectif et individuel.

R. Rashed et moi-même avons déjà publié en commun un article portant sur les *Sphériques* de l'*Istikmāl* d'Ibn Hūd [Rashed et Al-Houjairi 2010]. Le présent article n'est qu'une continuation de ce dernier et tous deux visent à présenter aux historiens des mathématiques, un dossier sur les sphériques à l'époque d'Ibn Hūd. Toutefois, dès le début, l'objectivité nous impose de reconnaître que les résultats attendus ne peuvent pas être qualifiés de « strictement achevants » et couvrir intégralement le contenu exact des sphériques à l'époque du mathématicien saragocien. Le problème auquel nous sommes ici confrontés réside dans le fait que tout « achèvement » probable d'un dossier historique concernant un ouvrage séparé, traitant une certaine discipline mathématique, doit dépendre inévitablement de l'élaboration d'un dossier homologue portant sur le développement antérieur de la même discipline. Pour ce qui est du cas des *Sphériques* de l'*Istikmāl* – choisies comme sujet d'étude –, parmi les nombreuses questions qui se posent, nous trouvons, par exemple, les suivantes : sans passer par les contributions de Théodose (107-43 avant J.-C.), Ménélaüs (actif à la fin du premier siècle après J.-C.), Ibn Qurra (mort en 901), Ibn ʻIrāq (mort en 1036) et beaucoup d'autres, comment peut-on extraire les innovations, identifier les lacunes éventuelles et localiser le développement conceptuel dans cette œuvre ? L'étude du texte sphérique de l'*Istikmāl* nous conduit nécessairement à l'étude des textes antérieurs. C'était le cas de notre premier article portant sur le commentaire et la généralisation, par Ibn Hūd, de la proposition III. 11 des *Sphériques* théodosiennes. L'investigation et l'analyse nous ont conduits, en particulier, aux quatre dernières propositions des *Sphériques* de Ménélaüs, outre la découverte d'une grande variété de résultats géométriques intermédiaires, attribués aux mathématiciens, comme Archimède (mort en 212 av. J.-C), Ibn Qurra, Ibn ʻIrāq et autres. Mais ces quatre propositions de Ménélaüs, ainsi que les autres résultats mentionnés, représentent eux-mêmes, chacun, des sujets d'étude importants et relativement indépendants. Le chercheur en histoire des *sphériques gréco-arabes* est appelé alors, à bien apprendre à manipuler un réseau compliqué d'échanges de savoirs. L'étude effective d'un tel réseau par l'historien nécessitera sûrement : 1) une bonne organisation des étapes de recherche ; 2) une adoption d'une voie d'investigation claire et relativement optimale.

Actuellement, il nous semble que la meilleure voie susceptible de conduire à l'élaboration d'un dossier relativement complet sur les sphériques à l'époque d'Ibn Hūd, réside dans le traitement systématique du contenu des *Sphériques* de l'*Istikmāl* : définition par définition et proposition par proposition, par la méthode empirique d'analyse et de comparaison avec tous les textes manuscrits similaires disponibles. Il est évident que cette méthode est primitive. Mais, elle est aussi certainement univoque et fiable. En adoptant cette méthode dans le cas des *Sphériques* de l'*Istikmāl,* ces derniers peuvent servir d'origine de repérage d'un traitement de l'histoire globale des sphériques dans la *Tradition Arabe*, mais sans privilèges spéciaux. Au cours d'une telle étude basée sur « la comparaison des textes », les étapes essentielles d'action sont les suivantes : 1) l'identification des changements conceptuels dans les textes ; 2) l'investigation des sources et des savoirs transférés ; 3) l'extraction des développements propres à l'auteur (innovations propres). De telle manière que l'investigation des sources et la séparation stricte entre les deux genres de savoirs s'appliquent à tout « *objet sphérique* » (concept, définition, proposition, démonstration…) découvert grâce à « *l'analyse comparative* », soit dans les *Sphériques* de l'*Istikmāl*, soit dans les autres documents de comparaison adoptés.

Notre précédent article a été consacré à une proposition d'Ibn Hūd, qui intègre les trois dernières propositions III. 23-25 des *Sphériques* de Ménélaüs (voir [Ibn ʻIrāq 1998, p. 101-103, 105-106 (du texte arabe)] et [Ibn ʻIrāq, MSb, folios : $52^{v}$-$53^{r}$, $55^{r}$-$55^{v}$]) et qui introduit une nouvelle démonstration « *intrinsèque* » (*purement sphérique*) de la généralisation faite par Ibn ʻIrāq (voir [Ibn ʻIrāq 1998, p. 104] et [Ibn ʻIrāq, MSb, folios : $54^{r}$-$54^{v}$]) de proposition III. 11 des *Sphériques* de Théodose [Théodose 1959, p. 111-112]. Il faut souligner que la proposition III. 11, sa généralisation par Ibn ʻIrāq, ainsi que les propositions III. 22-25 de Ménélaüs, traitent des configurations remarquables sur l'étendue sphérique (en particulier, il semble qu'elles expriment des tentatives d'examiner l'analogue sphérique de la configuration euclidienne de Thalès). L'importance conceptuelle évidente de ce contenu nécessite certainement l'achèvement de l'étude commencée dans l'article ci-mentionné. D'autre part, les *Sphériques* de l'*Istikmāl* contiennent deux chapitres couvrant une partie considérable des *Sphériques* de Théodose et de Ménélaüs. En partant de cette double richesse des *Sphériques* d'Ibn Hūd et en se basant sur les résultats établissant la correspondance entre les contenus des livres de chacun de ces trois auteurs (voir [Hogendijk 1991] et [Al-Houjairi 2005, p. 18-19, p. 69-70, p. 352-353]), nous estimons que la tâche de constitution d'un dossier « satisfaisant » sur les sphériques à l'époque d'Ibn Hūd (deuxième moitié du onzième siècle), nécessiterait la rédaction de quatre études supplémentaires. Ces études seraient basées sur des échantillons manuscrits convenablement choisis des textes sphériques disponibles (Ibn ʻIrāq, Ibn Hūd, al-Tūsī (1201-1274) et autres). De telle manière que, outre les études déjà publiées, le dossier planifié renferme les titres suivants : 1) Les propositions III. 22-25 des *Sphériques* de Ménélaüs dans les commentaires des géomètres de la *Tradition Arabe* (Ibn ʻIrāq, Ibn Hūd, al-Tūsī…). 2) Les *Sphériques* de Théodose d'après les commentaires d'Ibn Hūd. 3) Les *Sphériques* de Ménélaüs d'après les commentaires d'Ibn Hūd. 4) L'analyse des cas des propositions des *Sphériques* de Théodose et de Ménélaüs qui manquent à la liste de l'*Istikmāl* (en particulier, la proposition III. 5 de Ménélaüs).

### *2. Émergence de la trigonométrie et le théorème des sinus*

Les recherches astronomiques et cartographiques durant les IX$^{e}$ et X$^{e}$ siècles furent à l'origine d'un développement remarquable en géométrie sphérique. Les méthodes inventées pour résoudre les problèmes métriques des arcs sur la surface sphérique ont abouti, à la fin du X$^{e}$ siècle, à l'émergence d'une nouvelle discipline mathématique indépendante de l'astronomie, de la cartographie et de la géométrie : la trigonométrie, et à une réforme importante de la géométrie sphérique. Une fois libérés du théorème de Ménélaüs, les géomètres comme al-Khujandī (mort en 1000), al-Būzjānī (940-998) et Ibn ʻIrāq ont en effet accumulé des résultats : les formules usuelles de la trigonométrie, le triangle polaire, etc. [Debarnot 1985, 2002]. Après ceux-ci, al-Bīrūnī (973-1041) et Nasīr al-Dīn al-Tūsī menèrent cette recherche trigonométrique plus loin. En géométrie sphérique, Ibn al-Haytham (965-1040) introduisit des méthodes infinitésimales, en assimilant les triangles sphériques « suffisamment petits » à des triangles rectilignes [Rashed 2006]. À côté de ces savants à l'avant-garde de la recherche, d'autres mathématiciens ont continué à étudier l'héritage des anciens : ils ont enrichi le contenu mathématique et amélioré les méthodes. Le mathématicien saragocien, Yūsuf al-Mu'taman Ibn Hūd (mort en 1085 [478 H.]) appartient à cette dernière catégorie des mathématiciens. S'appuyant sur ses prédécesseurs, il développe, dans son livre intitulé *al-*

*Istikmāl* (*La Complétion ou bien La Perfection*), une « théorie classique » – plutôt d'aspect pédagogique – des géométries sphériques de Théodose et de Ménélaüs.

Avant la découverte indépendante du théorème des sinus, à la fin du X^e siècle, par trois géomètres de la *Tradition Arabe* : al-Khujandī, al-Būzjānī et Ibn 'Irāq[1], toute la géométrie sphérique reposait en principe sur le théorème III. 1 des *Sphériques* de Ménélaüs. Bien que ce dernier ait introduit le concept du triangle (trilatère) sphérique, nous remarquons que le théorème mentionné a imposé le quadrilatère sphérique (et non pas le triangle) comme « unité » de manipulation géométrique : pour résoudre des problèmes sphériques – en l'absence du théorème des sinus –, les géomètres étaient obligés d'introduire, à chaque fois, des constructions géométriques supplémentaires dépendant du problème posé et d'appliquer régulièrement le théorème de Ménélaüs. Les caractéristiques métriques invariantes du « *trilatère sphérique* », ainsi que la loi fondamentale de « *dualité* » régissant le rapport existant entre ses éléments géométriques (angles et côtés), sont formulées adéquatement par le théorème découvert des sinus. Cette découverte fut évidemment à l'origine des changements substantiels en mathématiques. Nous nous contenterons de mentionner deux changements observés en géométrie sphérique : 1) le quadrilatère est remplacé, presque partout, par le triangle comme « unité corpusculaire » adoptée dans la déduction géométrique sur l'étendue de la sphère ; 2) les démonstrations sphériques sont considérablement réduites grâce à l'élimination des constructions géométriques supplémentaires et occasionnelles qui étaient autrefois nécessaires pour satisfaire les conditions de validité du théorème de Ménélaüs, dans les cas des différents problèmes géométriques abordés. Notons qu'Ibn 'Irāq a nommé le théorème des sinus « la figure qui dispense, *al-shakl al-mughnī* », visant par cette dénomination à mettre l'accent sur la réduction mentionnée dans les démonstrations sphériques, due à l'application du théorème des sinus à la place de celui de Ménélaüs appelé « *la figure secteur, al-shakl al qattā*' ». (Voir *infra* les commentaires d'Ibn 'Irāq des démonstrations de Ménélaüs. [commentaires d'Ibn 'Irāq 1 ; 2 ; 3]).

### *3. Sphériques de l'Istikmāl d'***Ibn Hūd**

Le volumineux livre mathématique de l'*Istikmāl* est donc attribué[2] au mathématicien andalou Abū 'Amir Yūsuf ibn Hūd Ahmad ibn Hūd, dit al-Mu'taman[3]. Les données sûres, à partir desquelles nous pourrions établir la biographie d'Ibn Hūd comme mathématicien, sont actuellement insuffisantes. Il est bien connu qu'al-Mu'taman est

[1] À propos de la discussion engagée sur la priorité de découverte du théorème des sinus, voir [Debarnot 1985].

[2] Voir : *al-Akfānī*, *Irshād al-qāsid ilā asnā al-maqāsid*, dans [Witkam 1959, p. 54 du texte arabe], qui cite « l'*Istikmāl* d'al-Mu'taman ibn Hūd ».

[3] Sur la vie et les écrits d'Ibn Hūd, voir , [Hogendijk 1991], [Rashed 1996, p. 976-978], [Djebbar 1997] et [Al-Houjairi 2005, p. 1-4, p. 354-356].

décédé en 1085 (478 H.) après avoir gouverné Saragosse pendant quatre ans, de 1081 à 1085 [Ibn al-Abbār 1963, p. 248]. R. Rashed écrit : « l'attribution de l'*Istikmāl* à Ibn Hūd est de l'ordre de la certitude. Il reste toutefois qu'en l'absence de preuve directe, la grande prudence s'impose : aucun manuscrit de l'*Istikmāl*, ou plutôt de l'une ou de l'autre partie de celui-ci, ne porte le nom d'Ibn Hūd. » [Rashed 1996, p. 976]. L'*Istikmāl* est un « manuel encyclopédique » en mathématiques ; la diversité de ses thèmes couvre tous les domaines des mathématiques classiques à l'époque d'Ibn Hūd[4]. Ce livre porte sur l'arithmétique, la géométrie euclidienne, la théorie des nombres amiables, la géométrie des sections coniques et la géométrie sphérique. Le contenu de l'*Istikmāl* est emprunté massivement, et parfois littéralement, à Euclide, Théodose de Tripoli, Ménélaüs, Apollonius, Ibn Qurra, Ibn al-Haytham, al Nayrīzī et aux autres. Il semble que cette « encyclopédie mathématique » ait été écrite à des fins plutôt « pédagogiques » qu'inventives[5], elle devait être destinée aux lecteurs instruits en mathématiques sans être eux-mêmes forcément des mathématiciens créatifs, particulièrement aux philosophes avec lesquels, comme Sā'id al-Andalusī nous en a informés, Ibn Hūd avait bien des intérêts communs[6].

L'*Istikmāl*[7] contient deux chapitres sur la géométrie sphérique[8]. Ces chapitres occupent les folios $76^v$-$90^v$ du manuscrit « Copenhague, Or 82 »[9]. Au début de la partie du

---

[4] Al-Qiftī écrit à propos de ce livre : « al-*Istikmāl* est d'Ibn Hūd en science mathématique, c'est un beau livre sommaire qui nécessite une épreuve. » [Al-Qiftī 1908, p. 319]

"..الاستكمال لابنِ هود في عِلْمِ الرِياضَةِ وَهُو كِتابٌ جامِعٌ جَميلٌ يَحْتاجُ إلى تَحْقيقٍ.."

[5] Par exemple, dans la partie de géométrie sphérique, Ibn Hūd ne mentionne nulle part le théorème des sinus, établi à l'époque d'Ibn Irāq (mort en 1036), une quarantaine d'années avant l'apparition de l'*Istikmāl*. Ce fait serait certainement bien compris si l'on acceptait que, même à l'époque d'Ibn Hūd, le théorème des sinus représentait aussi un saut scientifique très avancé, par comparaison avec le contenu classique hérité de la géométrie sphérique grecque.

[6] Sā'id al-Andalusī mentionne ce que 'Abd al-Raḥmān ibn Sayyid dit : « Quant à Abū 'Āmir ibn al-Amīr ibn Hūd, alors qu'il participe avec ceux-ci (on entend les mathématiciens contemporains de Sā'id al-Andalusī) à la science mathématique, il se distingue parmi eux par la science de la logique, par le soin de la science physique et de la métaphysique. » [al-Andalusī 1985, p. 181].

"وأمّا أبو عامر ابنُ الأمير ابن هود، فَهُوَ مَع مُشارَكَتِهِ لِهَؤلاءِ في العِلْم الرياضِيّ مُنْفَرِدٌ دونَهُم بِعِلْمِ المنطِقِ والعِنايَةِ بِالعِلْمِ الطَبيعيّ والعِلْمِ الإلهي"

[7] « Pour l'heure, il existe en fait les fragments suivants de l'*Istikmāl* : 1) Les parties géométriques de loin les plus substantielles, dans le manuscrit Or. 82 de la Bibliothèque Royale de Copenhague et le manuscrit Or. 123-a de Leyde. 2) Le fragment arithmétique dans le manuscrit du Caire, Dār al-Kutub, Riyāda 40. Une copie de ce manuscrit et de lui seul [...] se trouve à Damas, Zāhiriyya 5648. 3) Enfin le court fragment cité par un commentateur dans un manuscrit de la Bibliothèque Osmaniyye d'Hyderabad [...]. À l'exception de ce dernier fragment où l'*Istikmāl* est cité, aucun ne mentionne ni le titre, ni l'auteur ». Voir [Rashed 1996, p. 976, note 5].

[8] Le texte sur la géométrie sphérique de l'*Istikmāl* est transmis par un seul manuscrit, coté Or. 82 à la Bibliothèque Royale de Copenhague. Nous notons que, dans les propositions mathématiques, le copiste a écrit les lettres qui désignent les points des figures, comme on les prononce – a : alif, b : bā', etc. –. Nous nous sommes permis d'écrire les lettres comme telles et non pas comme on les prononce, par raison d'économie et parce qu'il n'y a aucune confusion à craindre.

[9] Par la suite, cette référence sera désignée par « les *Sphériques* d'Ibn Hūd ».

manuscrit[10] qui concerne la géométrie sphérique, Ibn Hūd expose son plan de travail ultérieur ; il y décrit une classification des objets sphérico-géométriques abordés. Il écrit :

> La seconde espèce de la quatrième espèce sur les propriétés des sphères et des sections qui y sont engendrées sans que les unes soient rapportées aux autres. Elle se partage en deux chapitres : le premier porte sur les propriétés des cercles situés dans la sphère sans que les uns soient rapportés aux autres, le second sur les propriétés des cercles des sphères, de leurs arcs et de leurs cordes rapportés les uns aux autres. [Ibn Hūd, folio 76$^{v}$]
>
> "النَوْعُ الثاني مِنَ النَوْعِ الرابِعِ في خَواصِّ الأُكَرِ والقُطوعِ الحادِثَةِ فيها مِنْ غَيْرِ إضافَةِ بَعْضِها إلى بَعْض، وَهُوَ يَنْقَسِمُ إلى فَصْلَيْنِ: الفَصْلِ الأوّلِ في خَواصِّ الدَوائِرِ الواقِعَةِ في الكُرَةِ، مِنْ غَيْرِ إضافَةِ بَعْضِها إلى بَعْض، والفَصْلِ الثاني في خَواصِّ دَوائِرِ الأُكَرِ وقِسِيِّها وَأوْتارِها بِحَسبِ إضافَةِ بَعْضِها إلى بَعْض".

Nous avons constaté la perte d'une grande partie du premier chapitre[11] ; et sa restauration pose un problème sérieux et difficile à résoudre de façon univoque, car toute restauration possible suppose l'adoption d'une conjecture probable. Les commentaires marginaux du manuscrit, qui auraient pu aider au processus de restauration, sont contradictoires[12]. Quant au deuxième chapitre, il semble qu'il y ait deux paragraphes perdus ainsi qu'une partie du troisième paragraphe.

Quelques paragraphes du texte manuscrit d'Ibn Hūd renferment plusieurs propositions. Nous avons estimé qu'il était raisonnable de séparer les propositions mentionnées par une numérotation auxiliaire qui n'influe pas sur la numérotation des paragraphes initialement adoptée par l'auteur. Les propositions principales (commentaires) sont numérotées à l'aide du symbole (n°). Les propositions intermédiaires de ce type citées au cours de l'étude suivante sont traitées en détail dans notre thèse doctorale [Al-Houjairi 2005]. À noter que, tout au long de notre étude, les *Éléments* d'Euclide (III$^{e}$ siècle av. J.-C.) [Euclide 1993][13] et les *Sphériques* de Ménélaüs [Ibn 'Irāq 1998][14], vont nous servir de références de comparaison. Dans le dernier livre, nous utiliserons la numérotation adoptée pour le texte manuscrit arabe.

En apportant la rectification minimale nécessaire dans le commentaire historico-mathématique qui suit, nous reproduisons, pour les échantillons manuscrits choisis, la démarche de l'auteur en utilisant parfois des notations et des conceptions mathéma-

---

[10] Voir la description de ce manuscrit par R. Rashed [Rashed 1996, p. 980-981].
[11] Nous notons que la perte a déjà été signalée par J. P. Hogendijk. [Hogendijk 1991].
[12] Voir l'analyse des notes marginales dans [Al-Houjairi 2005, p. 48-51].
[13] Par la suite, cette référence sera désignée par « les *Éléments* d'Euclide ».
[14] Ce traité, perdu en grec, nous est parvenu dans une version en arabe due à Ibn 'Irāq. Par la suite, cette référence sera désignée par « les *Sphériques* de Ménélaüs-Ibn 'Irāq ».

tiques modernes et en y ajoutant des figures géométriques, afin de rendre la manipulation démonstrative accessible.

Il nous reste à exposer brièvement le résumé de notre précédente étude, afin de faciliter la lecture de cet article[15].

Dans la géométrie euclidienne, nous trouvons le résultat suivant : si l'une de deux droites concourantes obliques est coupée orthogonalement par des droites, alors le rapport des segments de droites découpés sur les droites concourantes est un rapport invariant.

Dans la proposition III. 11 de ses *Sphériques*, il semble que Théodose tente d'examiner une configuration similaire sur l'étendue de la sphère. Voici l'énoncé de la proposition III. 11 de Théodose (Fig. A1) :

> Si le pôle de parallèles est situé sur la circonférence d'un cercle le plus grand, que coupent à angles droits deux cercles les plus grands, dont l'un est un des parallèles, et dont l'autre est oblique sur les parallèles ; et si un autre cercle le plus grand, passant par les pôles des parallèles, coupe le cercle oblique entre le plus grand des parallèles et celui qui touche le cercle oblique, le rapport du diamètre de la sphère au diamètre du cercle que touche le cercle oblique est plus grand que celui de l'arc du plus grand des parallèles, situé entre le cercle le plus grand primitif et le cercle consécutif passant par les pôles, à l'arc du cercle oblique situé entre ces derniers cercles. [Théodose 1959, p. 111-112]

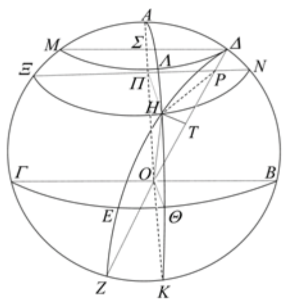


**Fig. A1**

Dans cette proposition, à l'aide d'une démarche « extrinsèque » euclidienne, Théodose démontre une certaine inégalité sur le rapport de deux arcs particulièrement choisis sur deux quadrants des circonférences de deux grands cercles inclinés, où l'un de ces

[15] Dans les commentaires mathématiques, nous avons eu recours aux abréviations suivantes : *arc(AB)* (l'arc *AB*) ; *arc(C)* (la circonférence du cercle *(C)*) ; *diam(C)* (le diamètre du cercle *(C)*) ; *sgm(AB)* (le segment de droite *AB*) ; *crd(AB)* (la corde de *arc(AB)*) ; *hem(A)* (l'hémisphère de sommet le point *A*) ; *cercle(AB)* (un cercle qui passe par les points *A* et *B*) ; *hom(AB)* (homologue de *arc(AB)* ; *Sin(AB)* (Sinus de *arc(AB)* ; par définition : *hom(AB) = crd(*2 *arc(AB))*) et *Sin(AB) =* ½ *crd(*2 *arc(AB)) =* ½ *hom(AB) = R sin(AB)*, où *R* est le rayon du cercle et *sin(AB)* est le sinus au sens actuel) ; *angle(ABC)* (l'angle *ABC)* ; *extr(A)* (l'angle extérieur au sommet *A*) ; par *drt,* nous désignons un angle droit ou bien un quadrant d'un cercle. < > Ces crochets isolent dans le texte arabe ce qui est ajouté pour combler une lacune dans le manuscrit. Dans la traduction française, ils sont maintenus seulement pour les titres ; ils sont introduits pour isoler un ajout au texte arabe, nécessaire à la compréhension du texte français. [ ] Ces crochets sont utilisés seulement dans le texte arabe pour indiquer que les mots ou les passages, ainsi isolés, doivent être supprimés pour assurer la cohérence du texte. / Ce signe indique la fin du folio d'un manuscrit.

arcs est le « projeté orthogonal » de l'autre. Il démontre notamment l'inégalité : $d/d\Delta > \text{arc}(\Theta B)/\text{arc}(H\Delta)$, où $d$ est le diamètre de la sphère ($S$) et $d\Delta = \text{diam}[\text{cercle}(\Delta\Lambda M)]$. Nous résumons cette proposition de la manière suivante.

Considérons la configuration représentée sur la Fig. A1 :

1. le point $A$ est le pôle des cercles parallèles : *cercle(ΔΛM)*, *cercle(NHΞ)* et *cercle(BEΓ)* (ce dernier cercle est le plus grand des parallèles) ;
2. *cercle(ABΓ)* est perpendiculaire aux parallèles ;
3. *cercle(ΔEZ)* est incliné sur les parallèles, mais il est perpendiculaire à *cercle(ABΓ)* ;
4. $H$ est un point arbitraire sur l'arc mineur, *arc(ΔE)* (qui est un quadrant d'une circonférence de grand cercle) ;
5. le point $\Theta$ est le « projeté orthogonal » sphérique du point $H$ sur l'arc mineur *arc(EB)* (qui est un quadrant d'une circonférence de grand cercle).

Sous ces conditions nous aurons :

$$arc(B\Theta)/arc(\Delta H) < d/d_\Delta.$$

La démonstration de Théodose se développe comme suit : $HP$ est sur l'intersection des plans des cercles $NH\Xi$ et $\Delta EZ$ qui sont orthogonaux, chacun, au plan du grand cercle $AB\Gamma$, donc $HP$ est orthogonal à $OP$ et à $P\Pi$. Le triangle $O\Pi P$ est rectangle en $\Pi$, donc $OP > \Pi P$ ; soit $T$ un point de $OP$ tel que $PT = \Pi P$, donc les deux triangles rectangles $HPT$ et $HP\Pi$ sont égaux, d'où *angle(HΠP) = angle(HTP)*. Le triangle $HPO$ est rectangle en $P$ ; nous avons donc $OP/PT >$ *angle(PTH)/angle(POH)*[16]. Nous avons

$$PT = P\Pi \text{ et } angle(PTH) = angle(\Theta OB),$$

par suite

$$OP/P\Pi > angle(\Theta OB)/angle(POH).$$

Mais puisque

$$O\Delta \,/\, \Delta\Sigma = \Delta Z/\Delta M = PO \,/\, P\Pi \text{ et } \Delta Z = d,\ \Delta M = d_\Delta,$$

nous aurons donc

$$d/d_\Delta > arc(\Theta B)/arc(H\Delta).$$

[16] Ce passage n'est pas justifié par Théodose. (Voir [Rashed et Al-Houjairi 2010, p. 230-241.])

Un siècle et demi environ plus tard, Ménélaüs reprend le problème, dans la proposition III. 22 de ses Sphériques (voir [Ibn 'Irāq 1998, p. 97-98] et [Ibn 'Irāq, MSb, folios 50v-52r]), mais avec quelques modifications : il considère la situation plus générale des deux arcs des deux grands cercles inclinés où l'un de ces deux arcs est le « projeté orthogonal » de l'autre ; il démontre l'égalité du rapport des Sinus des arcs au rapport des deux surfaces rectangulaires, qui dépendent du diamètre de la sphère, des diamètres des cercles qui passent parallèlement au plan du cercle de projection par les extrémités de l'arc projeté et du diamètre du cercle qui est tangent à l'un des cercles inclinés et parallèle à l'autre. L'énoncé de cette proposition s'écrit comme suit (Fig. A2) :

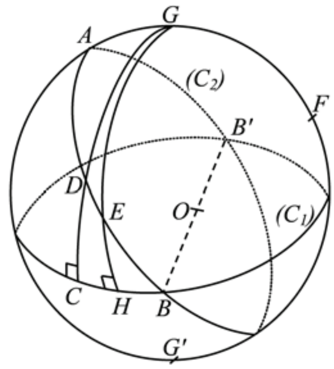



**Fig. A2**

Si, sur la surface d'une sphère, deux grands cercles sont inclinés l'un sur l'autre ; et si l'on marque, sur l'un d'eux, deux points non diamétralement opposés, d'où l'on mène à l'autre cercle, /[51r] deux perpendiculaires ; alors le rapport du Sinus de l'arc situé entre les pieds des deux perpendiculaires, au Sinus de l'arc situé entre les deux points marqués, est comme le rapport du rectangle entouré par le diamètre de la sphère et le diamètre du cercle qui est tangent à l'un des deux cercles et qui est parallèle à l'autre, au rectangle entouré par les diamètres des deux cercles qui passent par les deux points marqués sur l'un des deux cercles, et qui sont parallèles à l'autre

**"الشَكْلُ الثاني والعشرون،**

إذا كانَت في بَسيطِ كُرَةٍ دائِرتانِ مِنَ الدَوائرِ العِظامِ وكانَت كُلُّ واحدةٍ مِنْهُما مائِلَةً على الأُخْرَى وتُعلِّم على إحْداهُما[١] نُقْطَتان غَيْرُ مُتَقابِلَتَيْنِ[٢] على القُطْرِ وأُخْرِجَ مِنْهُما إلى الدائِرَةِ الأُخْرَى /**[٥١و]** عَمودانِ، فإنّ نِسْبَةَ جَيْبِ القَوْسِ الواقِعَةِ فيما بَيْنَ مَسْقَطَيِ العَمودَيْنِ إلى جَيْبِ القَوْسِ الّتي فيما بَيْنَ النُقْطَتَيْنِ اللّتينِ تُعلِّمتا كَنِسْبَةِ السَطْحِ القائِمِ الزوايا الّذي يُحيطُ بِهِ قُطْرُ الكُرَةِ وَقُطْرُ الدائِرَةِ التي تُماسُّ إحْدَى الدائِرَتَيْنِ وَتُوازي الدائِرَةَ الأُخْرى، إلى السَطْحِ القائِمِ الزوايا الّذي يُحيطُ بِهِ قُطرا[٣] الدائِرَتَيْنِ اللّتَيْنِ تَمرّانِ بالنُقْطَتَيْنِ

cercle. » (Voir [Ibn ‘Irāq 1998, proposition III. 22, p. 97-98] [17] et [Ibn ‘Irāq, MSb, folios $50^v$-$52^r$].)

اللّتَيْنِ تُعلِّمتا على إحْدَى الدائِرَتَيْنِ العَظيمَتَيْنِ وَتُوازِيانِ ٤ الدائِرَةَ الأُخْرَى مِنْهُما."

١. إحداهما: إحديهما؛ ٢. متقابلتين: متقابلين؛ ٣. قطرا: قطر؛ ٤. توازيان: توازي.

Dans cette proposition reprise par Ibn Hūd (voir [Ibn Hūd, folio $89^r$] et [Rashed et Al-Houjairi 2010, p. 223, note 28]), nous considérons (voir la Fig A2), dans une sphère *(S)* de diamètre $d$ et de centre $O$, un grand cercle $(C_1)$ de pôles $G$ et $G'$ et nous désignons par $(C_2)$ un autre grand cercle oblique sur $(C_1)$ et de pôle $F$. Nous marquons sur la circonférence de $(C_2)$, deux points $D$ et $E$ qui ne sont pas diamétralement opposés. Nous traçons les demi-circonférences *arc(GDG’)* et *arc(GEG')* qui coupent $arc(C_1)$, respectivement, aux points $C$ et $H$. Nous désignons, par $B$ et $B'$ les points d’intersection de $arc(C_1)$ et $arc(C_2)$, par $A$ le point d’intersection de *cercle(FGG’)* avec $arc(C_2)$, qui est situé sur *hem(G)* et par $d_A$, $d_D$ et $d_E$ les diamètres des cercles qui passent, respectivement, par les points $A$, $D$ et $E$ et qui sont parallèles à $(C_1)$. Sous les conditions considérées, Nous démontrons que

$$hom(HC) / hom(DE) = (d\, d_A) / (d_D\, d_E).$$

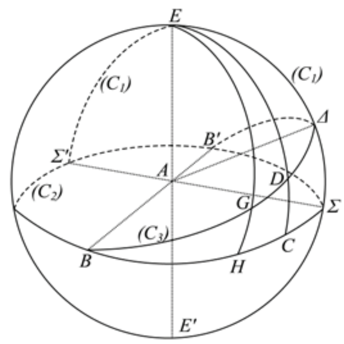
S’appuyant sur cette proposition, Ménélaüs établit, dans les propositions III. 23-25 (voir [Ibn ‘Irāq 1998, p. 101-103, 105-106] et [Ibn ‘Irāq, MSb, folios : $52^v$-$53^v$, $55^r$-$55^r$]) de ses *Sphériques*, quelques inégalités relatives aux arcs considérés, mais il commet quelques erreurs aussi bien dans l’énoncé de la proposition III. 25, que dans les démonstrations des propositions III. 24 et III. 25. Ibn ‘Irāq rectifie ces erreurs, rétablit les démonstrations de Ménélaüs (voir [Ibn ‘Irāq 1998, p. 103-110] et [Ibn ‘Irāq, MSb, folios : $53^r$-$57^r$]) et généralise la proposition III. 11 de Théodose. (Voir [Ibn ‘Irāq 1998, p. 104] et [Ibn ‘Irāq, MSb, folios : $54^r$-$54^v$].)

Dans une proposition de l’*Istikmāl*, Ibn Hūd expose une nouvelle démonstration « *intrinsèque* » de la généralisation faite par Ibn ‘Irāq de la proposition III. 11 de Théodose et reprend les trois propositions III. 23-25 de Ménélaüs. Nous pouvons réécrire l’énoncé de cette proposition d’Ibn Hūd de la manière suivante (voir [Ibn Hūd, folio $89^r$-$90^v$ ] et [Rashed et Al-Houjairi 2010]) :

[17] Voir l’énoncé de cette proposition reprise plus tard par Ibn Hūd. [Ibn Hūd, folio $89^r$].

***Proposition d'Ibn Hūd. (Fig. A3)***

Soient, dans une sphère ($S$) centrée au point $A$ et de diamètre $d$, deux grands cercles ($C_2$) et ($C_3$) et soit ($C_1$) le grand cercle qui passe par les pôles de ($C_2$) et ($C_3$). Désignons par $\Delta$ et $\Delta'$ les points d'intersection de $arc(C_1)$ et $arc(C_3)$, par $\Sigma$ et $\Sigma'$ les points d'intersection de $arc(C_1)$ et $arc(C_2)$, par $B$ et $B'$ les points d'intersection de $arc(C_2)$ et $arc(C_3)$ et par $E$ et $E'$ les pôles de $(C_2)$. Pour fixer les idées, supposons que le point $\Delta$ soit sur l'arc mineur, $arc(E\Sigma)$, et considérons, sur le quadrant $arc(B\Delta)$, deux points $G$ et $D$ ($G$ est entre $B$ et $D$). Traçons les demi-circonférences $arc(EGE')$ et $arc(EDE')$ qui coupent le quadrant $arc(B\Sigma)$, respectivement, aux points $H$ et $C$.




Ultérieurement, pour un point $M$ de $arc(B\Delta)$, nous désignerons par $d_M$ le diamètre du cercle passant par le point $M$ parallèlement à $(C_2)$ et par $\underline{M}$ ($M$ souligné) le point d'intersection de $arc(EME')$ avec $arc(B\Sigma)$.

Ibn Hūd démontre alors les assertions suivantes :

a) $arc(HC) / arc(GD) < d / d_D$,

b) $arc(HC) / arc(GD) > d_\Delta / d_G$,

c) $arc(HC) > arc(GD) \Rightarrow arc(HC) / arc(GD) > d\, d_\Delta / d_D\, d_G$,

d) $arc(HC) < arc(GD) \Rightarrow arc(HC) / arc(GD) < d\, d_\Delta / d_D\, d_G$,

e) $D \equiv \Delta$ [18] $\Rightarrow arc(HC) / arc(GD) > d / d_G$,

f) soit $P$ un point de $arc(B\Delta)$ ; posons $\underline{P} = Q$ ;

si $hom(EP) / d = hom(E\,\Delta) / hom(EP)$, alors $P$ vérifie les propriétés suivantes :

f1) si le point $G$ appartient à l'arc ouvert $arc(BP)$ et si $H = \underline{G}$, $arc(HQ) < arc(GP)$,

f2) si le point $U$ appartient à l'arc ouvert $arc(P\Delta)$ et si $O = \underline{U}$, $arc(OQ) > arc(UP)$.

[18] Dans ce cas $C \equiv \Sigma$.

# I. THÉORÈME DE MÉNÉLAÜS ET SES CONSÉQUENCES DANS L'*ISTIKMĀL*

Par la suite, nous exposons les commentaires, la traduction française et les textes manuscrits établis des propositions de l'*Istikmāl* qui correspondent aux six propositions : III. 1-4, III. 6-7 des *Sphériques* de Ménélaüs.

### *I.1. La proposition III. 5 de Ménélaüs manque à la liste d'Ibn Hūd*

Notons tout d'abord que la proposition III. 5 de Ménélaüs manque à la liste d'Ibn Hūd.

Il faut remarquer que c'est précisément ici (dans la démonstration de cette proposition attribuée à Ménélaüs), nous rencontrons - pour la première fois dans l'histoire connue - l'introduction d'une égalité des rapports de la forme

$$\frac{Si\ \widehat{A\ A}}{Sin A_1A_4} : \frac{Si\ \widehat{A\ A}}{Sin A_2A_4} = \frac{Si\ \widehat{B\ B}}{Sin B_1B_4} : \frac{Si\ \widehat{B\ B}}{Sin B_2B_4} .$$

Cette égalité introduite et utilisée, sans justification par Ménélaüs, exprime, en fait, la propriété d'invariance du rapport anharmonique de quatre circonférences de grands cercles, issues d'un point commun $M$ et qui coupent les circonférences de deux autres grands cercles $B_1B_2B_3$ et $A_1A_2A_3$. (Voir la Fig. A4).

La proposition III. 5 était le thème d'une polémique intensive durant longtemps dans la *Tradition Géométrique* Arabe. Elle a été abordée par plusieurs géomètres : al-Māhānī (mort entre 874 et 880), al-Harawī (930?-990?), Ibn ʻIrāq, Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī, etc. Ibn ʻIrāq lui-même avait traité cette proposition à deux reprises et dans deux travaux séparés. (Voir [Ibn ʻIrāq, MSa, folios 75v-78r] et [Ibn ʻIrāq, MSb, folios 36r-38v].) Dans ces écrits, Ibn ʻIrāq expose l'historique de la proposition, la preuve de Ménélaüs, ainsi que sa propre démonstration basée sur le théorème de sinus. (Voir [Samsò 1969].)

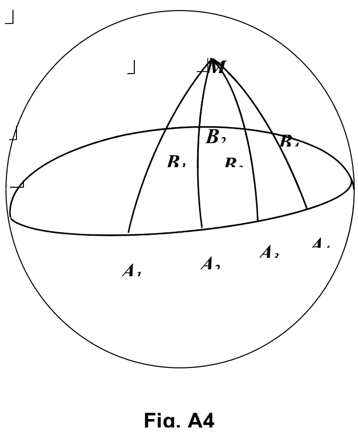



Fig. A4

À propos de **l'historique de cette proposition**, Ibn ʻIrāq a écrit :

J'ai pensé qu'al-Māhānī était mort avant l'achèvement de ce qu'il a entamé de rectification du livre des *Sphériques* de Ménélaüs, qu'un accident était survenu et qu'il n'avait pas pu avec mener à bien son plan ; jusqu'à ce que j'ai lu ce qu'Abū-l-Fadl al-Harawī a apporté de rectification à ce livre. J'ai trouvé qu'il y mentionne, dans l'introduction, qu'un groupe de géomètres auraient voulu rectifier ce livre. Lorsqu'ils n'ont pas pu le faire, ils ont demandé l'aide à al-Māhānī qui, après avoir rectifié le premier chapitre et une partie du second, s'est arrêté, confronté à une proposition dont on a mentionné qu'elle est difficile à aboutir et à prouver. Puis Abū-l-Fadl al-Harawī a montré cette proposition, mais il a suivi dans sa <démonstration> une démarche différente de celle de Ménélaüs. Bien que j'aie eu moi-même l'intention de rectifier ce livre, lorsque j'ai lu ce qu'Abū-l-Fadl a mentionné, j'ai décidé de montrer tout d'abord cette proposition selon la manière qui convient à la démarche de Ménélaüs dans son livre. C'est ce qu'il a mentionné : Ménélaüs a dit : si deux figures trilatères sont telles que deux angles <respectifs> parmi les angles à leurs deux bases sont égaux et aigus et deux angles <respectifs> parmi les angles restants sont droits, et si chacun de leurs deux côtés qui sous-tendent les deux angles restants est inférieur à un quadrant, alors le rapport de l'homologue de la somme de deux arcs entourant l'angle

"قالَ أبو نَصْرٍ: إنّي كُنْتُ أظُنُّ أنّ الماهانِيّ اختَرَمَ قَبْلَ إتْمامِ ابْتِدَائه مِنْ إصْلاحِ كِتابِ مانالاوس في الكُرِيّاتِ وأنّ شَيْئاً عَرَضَ لَمْ يَتَمَكّنْ مَعَهُ مِنْ إكْمالِ الغَرَضِ، إلى أنْ نَظَرْتُ فيما عَمِلَهُ أبو الفَضْلِ الهَـرَوِيُّ مِنْ إصْلاحِ هذا الكِتابِ فَوَجْدْتُهُ يَقولُ في صَدْرِهِ إنّ جَماعَةً مِنَ الـمُهَنْدِسينَ راموا تَصْحيحَ هَذا الكِتابِ، فَلَمّا لَمْ يَقْدِروا عَلَيْهِ استَعانوا بِالماهانيّ فَأصْلَحَ المقالَةَ الأُولَى وَبَعْضَ الثانِيَةِ، وَوَقَفَ عِنْدَ شَكْلٍ، ذَكَروا أنّه صَعْبُ المرامِ عَسيرُ البَيان. ثُمّ بَيَّنَ أبو الفَضْلِ الهَرَوِيُّ ذَلِكَ الشَكْلَ، إلاّ أنّهُ سَلَكَ فيهِ غَيْرَ مَسلَكِ مانالاوس. وأنا وإنْ كُنْتُ أنْوي إصْلاحَ هَذا الكِتابِ، فَأنّي عندما وَقَفْتُ عَلَى ما ذَكَرَهُ أبو الفَضْلِ، رأيْتُ أنْ أُبَيِّنَ هذا الشَكْلَ أوّلاً عَلَى ما يَليقُ بِمَسْلَكِ مانالاوس في كِتابِهِ. وَهَذا هُوَ الّذي ذَكَرَهُ، قالَ مانالاوس : إذا كانَ شَكْلانِ ذَوا[١] ثَلاثَةِ[٢] أضْلاعٍ وكانَتْ زاوِيَتانِ مِنْ زَواياهُما الّتي عَلَى قاعِدَتَيْهِما مُتَساوِيَتَيْنِ[٣] حادَّتَيْنِ[٤] وكانَتْ زاوِيَتانِ مِنْ الزوايا الباقِيَةِ مِنْهُما قائِمَتَيْنِ[٥] وكانَ كُلُّ واحدٍ من ضِلْعَيْهِما اللّذَيْنِ يُوَتِّرانِ[٦] زاوِيَتَيْهِما[٧] الباقيَتَيْن أقَلَّ مِنْ رُبْعِ دائِرةٍ فَإنّ نِسْبَةَ نَظيرِ القَوْسَيْنِ الـمُحيطَتَيْنِ[٨] بِالزاوِيَةِ الحادَّةِ مِنْ أحَدِ الشَكْلينِ مَجْموعَتَيْنِ إلى نَظيرِ فَضْلِ ما بَيْنَهُما كَنِسْبَةِ نَظيرِ القَوْسَيْنِ الـمُحيطَتَيْنِ[٩] بِالزاوِيَةِ الحادّةِ من الشَكْلِ

الآخَرِ مَجْموعَتَيْنِ إلى نَظيرِ فَضْلِ ما بَيْنَهُما، وَنْعْني بِنَظيرِ القَوْسِ وَتَرَ ضِعفِها. وَنَحْنُ نَسْتَعْمِلُ مَكانَ أوْتارِ الضِعْفِ جُيوبَ القِسِيِّ طَلَباً لِلتَخْفيفِ."

١. ذَوا: ذو؛ ٢. ثَلاثَة: ثلث؛ ٣. مُتَساوِيَتَيْن: متساويتان؛ ٤. حادَّتَيْن: حادتان؛ ٥. قائِمَتَيْن: قائمتان؛ ٦. يُوَتِّران: نوتران؛ ٧. زاوِيَتَيْهِما: زاويتهما؛ ٨. الـمُحيطَتَيْن: المحيطين؛ ٩. الـمُحيطَتَيْن: المحيطين.

aigu <égal>, de l'une de deux figures, à l'homologue de leur différence, est comme le rapport de l'homologue de la somme de deux arcs entourant l'angle aigu <égal> de l'autre figure, à l'homologue de leur différence. On entend par homologue de l'arc, la corde du double de l'arc. Pour l'allégement, au lieu des cordes des doubles des arcs, nous utilisons les Sinus des arcs. » [Ibn ʻIrāq, MSa, folio $75^{v}$].

L'histoire de la proposition III. 5 est très ramifiée et étendue. Il est indispensable de consacrer à cette histoire une étude séparée. À la fin de cet article, nous nous contenterons d'exposer brièvement la preuve attribuée à Ménélaüs, ainsi que le texte manuscrit correspondant tiré du livre d'Ibn ʻIrāq établi et traduit en français.

### *I.2. Commentaires des paragraphes § 9 - § 14 de Sphériques de l'Istikmāl*

§ **9 - Proposition n° 34 .**

Soient $(C_1)$ et $(C_2)$ deux grands cercles de la sphère tels que $arc(C_1)$ et $arc(C_2)$ se coupent aux points $A$ et $C$. Si $E$ et $G$ sont deux points arbitraires situés sur la circonférence $arc(C_1)$, différents de $A$ et $C$ et admettant respectivement les points $K$ et $L$ comme projections orthogonales sur le plan du cercle $(C_2)$, alors

$$(1)\quad \frac{crd(2\,arc(AE))}{crd(2\,arc(AG))} = \frac{sgm(EK)}{sgm(GL)}.$$

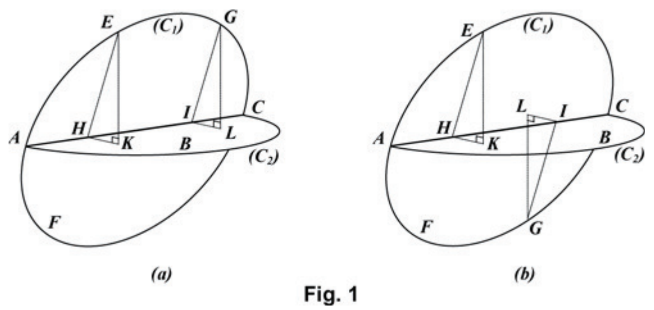


**Fig. 1**

*Preuve.*

Les grands cercles $(C_1)$ et $(C_2)$ se coupent suivant leur diamètre commun $AC$ (voir la Fig. 1). Désignons par $H$ et $I$ respectivement les pieds des perpendiculaires abaissées des points $E$ et $G$ sur la droite $AC$. Si les plans des cercles $(C_1)$ et $(C_2)$ sont perpendiculaires, les points $H$ et $I$ coïncident alors, respectivement, avec $K$ et $L$[19] et la relation (1) est évidemment satisfaite puisque $crd(2\ arc(AE))$ est égal à $2\,sgm(EH)$ et $crd(2\ arc(AG))$ est égal à $2\ sgm(GI)$.

Supposons, à présent, que les plans des cercles $(C_1)$ et $(C_2)$ ne soient pas perpendiculaires. Par suite, le point $H$ est différent de $K$ et le point $I$ est différent de $L$ ; les deux triangles $EHK$ et $GIL$ sont semblables puisqu'ils ont leurs angles égaux deux à

[19] Les *Éléments* d'Euclide : « Si un plan est perpendiculaire à un autre plan, et si d'un point pris dans un de ces plans, on mène une perpendiculaire à l'autre plan, cette perpendiculaire tombera sur la section commune des plans. » [Euclide 1993, proposition 38, livre XI, p. 441].

deux[20] : *angle(EKH)* et *angle(GLI)* sont des angles droits[21], *angle(HEK)* est égal à *angle(IGL)*[22] et par suite, les angles restants *angle(KHE)* et *angle(LIG)* sont égaux aussi ; donc

$$\frac{sgm(EH)}{sgm(GI)} = \frac{sgm(EK)}{sgm(GL)}.$$

Mais

$$\frac{sgm(EH)}{sgm(GI)} = \frac{crd(2arc(AE))}{crd(2arc(AG))},$$

car *sgm(EH)* est égal à *Sin(AE)* et *sgm(GI)* est égal à *Sin(AG)*[23]. En conséquence, nous obtenons

$$\frac{crd(2arc(AE))}{crd(2arc(AG))} = \frac{sgm(EK)}{sgm(GL)}.$$

C.Q.F.D.

Marie-Thérèse Debarnot a indiqué qu'un résultat, presque identique à celui de la proposition n° 34, est dû à Thābit ibn Qurra[24]. Ce résultat conduit, selon Debarnot, à une élégante démonstration du théorème III. 1 des *Sphériques* de Ménélaüs [Debarnot 1985, p. 6]. Cette question est abordée également par Hélène Bellosta [Bellosta 2004, p. 145-168, en particulier p. 158].

### § 10 - Proposition n° 35 (Fig. 2, Fig. 3)

Soient sur la sphère, *arc(AB)*, *arc(BC)*, *arc(AD)* et *arc(EC)* quatre arcs non coplanaires deux à deux, de grandes circonférences, plus petits chacun qu'une demi-cir-

[20] *Ibid.* : « Dans les triangles équiangles, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels ; et les côtés qui soutendent les angles égaux, sont homologues. » [Euclide 1993, proposition 4, livre VI, p. 143].

[21] *Ibid.* : « Une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle fait des angles droits avec toutes les droites qui la rencontrent, et qui sont dans ce plan. » [Euclide 1993, définition 3, livre XI, p. 396].

[22] Chacun des deux angles est aigu et leurs côtés sont deux à deux parallèles.

[23] Nous notons que c'est l'unique passage dans les *Sphériques* d'Ibn Hūd où nous rencontrons le terme « *Sinus* ». Il utilise au début le terme « *corde de l'arc double* » puis il adopte le terme « *homologue de l'arc* » qui est égal, par la définition introduite par Ibn Hūd, à la « *corde de l'arc double* ».

[24] Voir « Extrait du livre de Thabit-Ben-Korrah : *De la figure du quadrilatère et des rapports composés* », dans [Al-Tūsī 1998], livre 5, page 200-201. Al-Tūsī, expose, dans cet extrait attribué à Thābit ibn Qurra, une démonstration identique à celle d'Ibn Hūd.

conférence d'un grand cercle de la sphère et tels que le point *E* appartienne à *arc(AB)* et le point *D* appartienne à *arc(BC)*.

Si *arc(EC)* et *arc(AD)* se coupent au point *F*, alors les deux relations suivantes sont satisfaites :

$$1)\ \frac{crd(2arc(AB))}{crd(2arc(BE))} = \frac{crd(2arc(AD))}{crd(2arc(DF))} \cdot \frac{crd(2arc(FC))}{crd(2arc(CE))},$$

$$2)\ \frac{crd(2arc(AE))}{crd(2arc(BE))} = \frac{crd(2arc(AF))}{crd(2arc(FD))} \cdot \frac{crd(2arc(DC))}{crd(2arc(CB))}.$$

*Preuve.*

1) Abaissons des points *A*, *E* et *F* les perpendiculaires *sgm(AG)*, *sgm(EH)* et *sgm(FI)* au plan de *cercle(BC)* (voir la Fig. 2). D'après la proposition n° 34, nous avons :

$$\frac{sgm(AG)}{sgm(EH)} = \frac{crd(2arc(BA))}{crd(2arc(BE))},\ \frac{sgm(AG)}{sgm(FI)} = \frac{crd(2arc(DA))}{crd(2arc(DF))}.$$

et $$\frac{sgm(FI)}{sgm(EH)} = \frac{crd(2arc(CF))}{crd(2arc(CE))}.$$

En utilisant l'identité $\frac{sgm(AG)}{sgm(EH)} = \frac{sgm(AG)}{sgm(FI)} \cdot \frac{sgm(FI)}{sgm(EH)}$ [25],

nous obtenons

$$\frac{crd(2arc(AB))}{crd(2arc(BE))} = \frac{crd(2arc(AD))}{crd(2arc(DF))} \cdot \frac{crd(2arc(FC))}{crd(2arc(CE))}.$$

[25] Cette identité repose sur la composition des rapports utilisée par Euclide au livre VI des *Éléments*, mais qui ne fait pas l'objet d'une définition explicite. Thābit ibn Qurra consacre un assez long traité à cette « opération » très particulière. (Voir [Crozet 2004]).

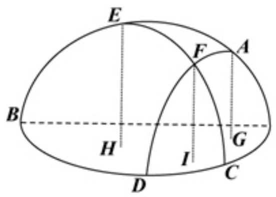



Fig. 2

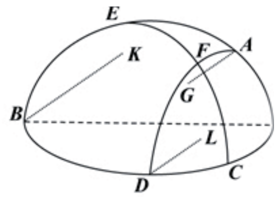



Fig. 3

2) De la même manière, abaissons des points $A$, $B$ et $D$ les perpendiculaires *sgm(AG)*, *sgm(BK)* et *sgm(DL)* au plan de *cercle(CF)* (voir la Fig. 3). D'après la proposition n° 34, nous avons :

$$\frac{sgm(AG)}{sgm(BK)} = \frac{crd(2\,arc(AE))}{crd(2\,arc(EB))}, \qquad \frac{sgm(AG)}{sgm(DL)} = \frac{crd(2\,arc(AF))}{crd(2\,arc(FD))}$$

et

$$\frac{sgm(DL)}{sgm(BK)} = \frac{crd(2\,arc(DC))}{crd(2\,arc(CB))}.$$

En utilisant l'identité $\dfrac{sgm(AG)}{sgm(BK)} = \dfrac{sgm(AG)}{sgm(DL)} \cdot \dfrac{sgm(DL)}{sgm(BK)}$,

nous obtenons

$$\frac{crd(2\,arc(AE))}{crd(2\,arc(BE))} = \frac{crd(2\,arc(AF))}{crd(2\,arc(FD))} \cdot \frac{crd(2\,arc(DC))}{crd(2\,arc(CB))}.$$

Nous trouvons le même résultat chez Ménélaüs[26], mais avec une démonstration différente.

[26] Les *Sphériques de* Ménélaüs-Ibn 'Irāq ([Ibn 'Irāq 1998, livre III, proposition 1, p. 62-64 (du texte arabe), (traduction allemande, p. 194-197)], [Ibn 'Irāq, MSb, folios $33^{r}$-$34^{r}$]) :

**§ 11 - Définition n° 1** : la corde du double de *arc(AB)* s'appelle *homologue* de *arc(AB)*.

**Proposition n° 36** (*règle de quatre quantités*).

Si *ABC* et *DEG* sont deux triangles sphériques tels que *angle(A)* soit égal à *angle(D)*, alors les assertions suivantes sont satisfaites :

si, soit *angle(C)* est égal à *angle(G)*, soit la somme *angle(C)* + *angle(G)* est égale à deux angles droits, alors

$$\frac{hom(AB)}{hom(BC)} = \frac{hom(DE)}{hom(EG)} \;;$$

2) si

$$\frac{hom(AB)}{hom(BC)} = \frac{hom(DE)}{hom(EG)},$$

alors soit *angle(C)* est égal à *angle(G)*, soit la somme *angle(C)* + *angle(G)* est égale à deux angles droits (voir la Fig. 4).

« **Proposition 1** : Les deux arcs CE, BD se coupent au point A. Des deux points C et B on décrit les deux arcs CD et BE qui se coupent au point G. On suppose que chacun de ces quatre arcs soit d'une grande circonférence de la sphère et que chacun soit plus petit qu'une demi-circonférence. Je dis que le rapport du Sinus de l'arc CE au Sinus de l'arc EA est composé du rapport du Sinus de l'arc CG au Sinus de l'arc GD et du rapport du Sinus de l'arc BD au Sinus de l'arc BA. »

**"الشَكْلُ الأوَّلُ** :

قَوْسا ج؟ه ب؟دا تَلْتَقِيانِ عَلَى نُقْطَةِ ا وأُخْرِجَ مِنْ نُقْطَتَيْ ج ب قَوْسا ج؟د ب؟ه مُتَقاطِعَتَيْنِ عَلَى نُقْطَةِ ز وَكُلُّ واحِدَةٍ مِنَ هذه القِسِيِّ الأرْبَع مِنْ مُحيطِ دائِرَةٍ عَظيمَةٍ في الكُرَةِ وَكُلُّ واحِدَةٍ مِنْها أصْغَرُ مِنْ نِصْفِ المحيطِ. فَأقولُ إنّ نِسْبةَ جَيْبِ ج؟ه إلى جَيْبِ ه؟ا مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ج؟ز إلى جَيْبِ قَوْسِ ز؟د <ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟د إلى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ا.>"

**١. ج؟ه ب؟د :ج؟د ب؟ه**

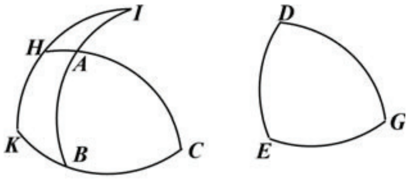



Fig. 4

*Preuve.*

Considérons deux triangles sphériques *ABC* et *DEG* tels que *angle(A)* soit égal à *angle(D)*. Prolongeons *arc(CA)* du côté de *A* jusqu'au point *H*, de telle manière que *arc(AH)* soit égal à *arc(DG)* ; prolongeons *arc(AB)* du côté de *A* jusqu'au point *I*, de telle manière que *angle(AHI)* soit égal à *angle(EGD)* ; et prolongeons *arc(CB)* et *arc(IH)* respectivement du côté de *B* et *H*, qu'ils se coupent en un point que l'on désigne par *K*. D'après la proposition n° 28 (cas $G_1$)[27], les deux triangles *EGD* et *IHA* sont égaux puisqu'ils ont *angle(IAH)* égal à *angle(D)*, *angle(IHA)* égal à *angle(G)* et le côté *arc(AH)* égal au côté *arc(DG)*. Donc *angle(AIH)* est égal à *angle(E)*, *arc(HI)* est égal à *arc(GE)* et *arc(IA)* est égal à *arc(ED)*.

1) Supposons, tout d'abord, que *angle(C)* soit égal à *angle(G)*, alors *angle(C)* est égal à *angle(IHA)* puisque ce dernier est égal à *angle(G)*. Par suite, d'après la réciproque de la proposition n° 24[28], la somme *arc(HK)* + *arc(KC)* sera égale à une demi-circonférence de grand cercle[29], c.-à-d. *arc(HK)* et *arc(KC)* sont des arcs supplémentaires et admettent, par conséquent, le même homologue. Supposons maintenant que la somme *angle(C)* + *angle(G)* soit égale à deux angles droits. Donc la somme *angle(C)* + *angle(IHA)* est égale à deux angles droits puisque *angle(G)* est égal à *angle(IHA)*. Mais la somme *angle(CHK)* + *angle(IHA)* est égale à deux angles droits, donc *angle(CHK)* est égal à *angle(C)*. Par suite, d'après la proposition n° 21[30], le côté *arc(HK)* du triangle *HKC* est égal à l'autre côté *arc(KC)* et par conséquent, les deux arcs possèdent le même homologue. Ainsi *hom(HK)* et *hom(KC)* sont égaux, soit

[27] « Les deux triangles spériques *ABC* et *DEG* sont égaux si *arc*(*AC*)=*arc*(*DG*), *angle*(*A*)=*angle*(*D*) et *angle*(*C*)=*angle*(*G*) » [Al-Houjairi 2005, proposition n° 28, cas $G_1$, p. 107].

[28] « Si dans un triangle sphérique *ABC*, *arc(AC)* + *arc(CB)* = 2 *drt* alors *extr(B)* = *angle(A)* » [Al-Houjairi 2005, proposition n° 24, p. 102].

[29] Bien que l'assertion soit vraie indépendamment de ce passage logico-géométrique, cette « déduction » est vraie à condition que la figure *HKC* soit un triangle au sens de Ménélaüs. Il semble qu'Ibn Hūd ainsi que Ménélaüs supposent, implicitement, que la somme *arc(AC)* + *arc(DG)* est plus petite qu'une demi circonférence de grand cercle. Dans le cas contraire, la preuve nécessite un complément de démonstration.

[30] « Dans un triangle sphérique *ABC*, nous avons : *angle(A)* = *angle(B)* ⇔ *arc(AC)* = *arc(BC)* » [Al-Houjairi 2005, propositions n° 20 et n° 21, p. 95, 99].

lorsque *angle*(*C*) est égal à *angle(G)*, soit lorsque la somme *angle(C)* + *angle(G)* est égale à deux angles droits. D'autre part, d'après la proposition n° 35[31], nous avons :

$$(1)\quad \frac{hom(IH)}{hom(KH)} = \frac{hom(IA)}{hom(AB)} \cdot \frac{hom(BC)}{hom(CK)} .$$

Mais puisque *hom(CK)* = *hom(KH)*, nous aurons :

$$\frac{hom(IH)}{hom(CK)} = \frac{hom(IA)}{hom(AB)} \cdot \frac{hom(BC)}{hom(CK)},$$

d'où

$$\frac{hom(IH)}{hom(BC)} = \frac{hom(IA)}{hom(AB)} .$$

Et en utilisant les relations

$$arc(IH) = arc(EG) \text{ et } arc(AI) = arc(ED),$$

nous obtenons

$$\frac{hom(EG)}{hom(BC)} = \frac{hom(ED)}{hom(AB)} .$$

En conséquence,

$$\frac{hom(AB)}{hom(BC)} = \frac{hom(DE)}{hom(EG)} .$$

Réciproquement.

2) Supposons que

$$\frac{hom(AB)}{hom(BC)} = \frac{hom(DE)}{hom(EG)} .$$

[31] L'hypothèse de la proposition n° 35 exige que chacun des quatre arcs de la configuration soit plus petit qu'une demi-circonférence de grand cercle. Pour que la démonstration soit acceptable, il faut admettre qu'Ibn Hūd et également Ménélaüs supposent, implicitement, que chacune des sommes *arc(AC)* + *arc(DG)* et *arc(BA)* + *arc(AI)* soit plus petite qu'une demi-circonférence de grand cercle.

Procédons de la même manière que précédemment. Les côtés *arc(DE)* et *arc(EG)* du triangle *EGD* sont respectivement égaux aux côtés *arc(IA)* et *arc(IH)* du triangle *BCA*, donc

$$\frac{hom(BC)}{hom(AB)} = \frac{hom(IH)}{hom(IA)} \text{ , ou bien } \frac{hom(IH)}{hom(BC)} = \frac{hom(IA)}{hom(AB)} \text{ .}$$

En « multipliant les deux membres de l'égalité » par $\frac{hom(BC)}{hom(CK)}$ , nous obtenons (voir la note 25 [la composition des rapports])

$$\frac{hom(IH)}{hom(BC)} \cdot \frac{hom(BC)}{hom(CK)} = \frac{hom(IA)}{hom(AB)} \cdot \frac{hom(BC)}{hom(CK)} \text{ .}$$

Mais d'après la proposition n° 35[32], nous avons :

$$\frac{hom(IA)}{hom(AB)} \cdot \frac{hom(BC)}{hom(CK)} = \frac{hom(IH)}{hom(KH)},$$

donc,

$$\frac{hom(IH)}{hom(KH)} = \frac{hom(IH)}{hom(BC)} \cdot \frac{hom(BC)}{hom(CK)}$$

et par suite, *hom(KH)* est égal à *hom(CK)*. Ainsi, ou bien *arc(KH)* est égal à *arc(CK)*, ou bien la somme *arc(KH)* + *arc(CK)* est égale à une demi-circonférence de grand cercle. Dans le premier cas, d'après la proposition n° 20 (voir note 30 [proposition n° 20]), *angle(IHA)* et *angle(C)* sont supplémentaires ; dans le deuxième cas, d'après la proposition n° 24 (voir la note 28 [proposition no 24]), *angle(IHA)* et *angle(C)* sont égaux. Par suite, *angle(G)* et *angle(C)* sont soit égaux, soit supplémentaires.

Remarquons que la proposition reste vraie même lorsque *angle(A)* et *angle(D)* sont supplémentaires. En particulier, si les conditions suivantes sont satisfaites :

a) *angle(A)* et *angle(D)* sont supplémentaires,

[32] Pour que l'application de la proposition n° 35 soit légitime avec la configuration choisie par Ménélaüs et Ibn Hūd, il faut supposer que chacune des deux sommes *arc(AH)* + *arc(CA)* et *arc(AB)* + *arc(AI)* est plus petite qu'une demi-circonférence d'un grand cercle. Ce qui équivaut à supposer que chacune des deux sommes *arc(DG)* + *arc(CA)* et *arc(AB)* + *arc(DE)* est plus petite qu'une demi-circonférence d'un grand cercle.

b) la somme *angle(G)* + *angle(C)* est inférieure à deux angles droits,

c) $\frac{hom(AB)}{hom(BC)} = \frac{hom(DE)}{hom(EG)}$,

alors angle($G$) = angle($C$)[33].

Nous trouvons le même résultat chez Ménélaüs. Bien qu'Ibn Hūd utilise dans sa proposition le terme « *homologue* » au lieu du terme « *Sinus* » utilisé par Ménélaüs, la formulation[34] textuelle ainsi que la démarche démonstrative de la proposition n° 36 coïncident, presque littéralement, avec celles de la proposition correspondante de Ménélaüs

Afin d'effectuer une comparaison concrète, nous exposons, par la suite, la proposition mentionnée de Ménélaüs.

**Proposition** (*Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibn 'Irāq, proposition III. 2. [Ibn 'Irāq 1998, p. 64-65], [Ibn 'Irāq, MSb, folios $34^v$-$35^r$]) :

/[$34^v$] Si, dans deux figures trilatères, deux angles sont <respectivement> égaux et deux autres angles <respectifs> sont soit égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits, alors les rapports des Sinus des deux côtés qui sous-tendent les deux angles respectivement égaux, aux Sinus des autres côtés qui sous-tendent les deux autres angles - qui sont soit égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits -, sont deux rapports égaux ; et réciproquement (voir la Fig.4).

<*Exemple*>:

soient les deux figures trilatères *ABC* et *DEG* ; supposons que l'angle en A de la première figure soit égal à l'angle *D* de l'autre ; que leurs angles en *C* et *G* soient égaux ou bien de somme égale à deux

**"الشَكْلُ الثاني،**

/[**٣٤ظ**] إذا كانَتْ[١] زاوِيَتانِ مَن زَوايا شَكْلَيْنِ[٢] مِنَ الأشْكالِ ذَواتِ الأضْلاعِ الثَلاثَةِ مُتَساوِيَتَيْنِ، وَكانَتْ زاوِيَتانِ أُخْرَيانِ إمّا مُتَساوِيَتَيْنِ وإمّا مُساوِيَتَيْنِ إذا جُمِعَتا لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ، فَإنّ نِسْبتَيْ[٣] جَيْبَيِ الضِلْعَيْنِ اللّذَيْنِ يُوَتِّرانِ الزاوِيَتَيْنِ الـمُتَساوِيَتَيْنِ <إلَى جَيْبَيِ الضِلْعَيْنِ الآخَرَيْنِ اللّذَيْنِ يُوَتِّرانِ الزاوِيَتَيْنِ الأُخْرَيَيْنِ الـمُتَساوِيَتَيْنِ> أو الـمُساوِيَتَيْنِ لِقائِمَتَيْنِ <إذا جُمِعَتا>، نِسْبَتانِ مُتَساوِيَتانِ[٤]، وَعَكْسُ ذَلِكَ أيْضاً. فَلْيَكُنْ شَكْلانِ ذَوا[٥] ثَلاثَةِ أضْلاعٍ، عَلَيْهما ا ب ج د ه ز، وَلْتَكُنِ الزاوِيَةُ الَّتي عِنْدَ ا من أحَدِهِما مُساوِيَةً لِلزاوِيَةِ الَّتي عِنْدَ د من الآخَرِ.

[33] Cette propriété va être utilisée implicitement, sous cette forme, dans le paragraphe 14 (proposition n° 39).
[34] Voir la proposition 36 dans la traduction.

angles droits. Je dis que le rapport du Sinus de *AB* au Sinus de *BC* est égal au rapport du Sinus de *DE* au Sinus de *EG*.

<*Démonstration* :>

prolongeons les deux arcs *CA* et *BA* jusqu'en *H* et *I* respectivement, faisons l'arc *AH* égal à l'arc *DG* et l'angle *AHI* égal à l'angle *EGD* et achevons la figure. Ainsi l'arc *AI* est égal à l'arc *DE* et l'arc *IH* est égal à l'arc *EG*. Puisque les deux angles BCA, AHI sont égaux ou bien de somme égale à deux angles droits, le Sinus de l'arc *CK* est égal au Sinus de l'arc *HK* ; et puisque la figure reste inchangée, le rapport du Sinus de l'arc *KC* au Sinus de l'arc *BC* est composé du rapport du Sinus de l'arc *KH* au Sinus de l'arc *HI* et du rapport du Sinus de l'arc *IA* au Sinus de l'arc *AB* ; mais le Sinus de l'arc *CK* est égal au Sinus de l'arc *KH*, de sorte que le rapport du Sinus de l'arc *HI* au Sinus de l'arc *BC* est égal au rapport du Sinus de l'arc *IA* au Sinus de l'arc *BA*. Si nous permutons, <les rapports> restent également proportionnels, mais l'arc *HI* est égal à l'arc *EG*, et l'arc *AI* est égal à l'arc *DE*, donc le rapport du Sinus de l'arc *CB* au Sinus de l'arc AB est égal au rapport du Sinus de l'arc *EG* au Sinus de l'arc *ED*.

<*Réciproquement :*>

Supposons de même que l'angle en A soit égal à l'angle en *D*, et que le rapport du Sinus de l'arc *CB* au Sinus de l'arc *AB* soit égal au rapport du Sinus de l'arc *EG* au Sinus de l'arc *ED*. Je dis que les deux angles en *C* et *G* sont, soit égaux, soit de somme égale à deux angles droits.

<*Démonstration* :>

Si nous faisons comme précédemment, le rapport du Sinus de

وَلْتَكُنِ الزاوِيَتانِ مِنْهُما اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ جـ ز إمّا مُتَساوِيَتَيْنِ وإمّا مُساوِيَتَيْنِ[٦] لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ <إذا جُمِعَتا>. فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ جَيْبِ ا؟ب إلَى جَيْبِ ب؟جـ كَنِسْبَةِ جَيْبِ د؟هـ إلَى جَيْبِ هـ؟ز. لأنّا نُخْرِجُ قَوْسَيْ جـ؟ا؟ح ب؟ا؟ط وَنَجْعَلُ قَوْسَ ا؟ح مُساوِيَةً لِقَوْسِ د؟ز، وَزاوِيَةَ ا؟ح؟ط لِزاوِيَةِ هـ؟ز؟د؛ وَنُتَمِّمُ الصورَةَ، فَتَكونُ قَوْسُ ا؟ط مُساوِيَةً لِقَوْسِ د؟هـ، وقَوْسُ ط؟ح لِقَوْسِ هـ؟ز. ولأنّ زاوِيَتَيْ ب؟جـ؟ا ا؟ح؟ط إمّا أنْ تَكونا مُتَساوِيَتَيْنِ، وإمّا مُساوِيَتَيْنِ[٧] لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ إذا جُمِعَتا، يَكونُ جَيْبُ قَوْسِ جـ؟ك مُساوِياً لِجَيْبِ قَوْسِ ح؟ك. وَلأنّ الصورَةَ عَلَى ما هِيَ عَلَيْهِ، تَكونُ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ك؟جـ إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟جـ مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ك؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ ح؟ط ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ط؟ا إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب، وَلَكِنّ جَيْبَ قَوْسِ جـ؟ك مُساوٍ لِجَيْبِ قَوْسِ ك؟ح <فَتَكونُ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ح؟ط إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟جـ كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ط؟ا إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ا> وإذا بَدّلْنا أيْضاً تَكونُ مُتَناسِبَةً. وَلَكِنّ قَوْسَ ح؟ط مُساوِيَةٌ[٨] لِقَوْسِ هـ؟ز، وقَوْسُ ا؟ط مساويةٌ لِقَوْسِ د؟هـ، فَنِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ جـ؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ هـ؟ز إلَى جَيْبِ قَوْسِ هـ؟د. أيْضاً فَإنّا نَجْعَلُ الزاوِيَةَ <الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ ا مُساوِيَةً لِلزاوِيَةِ> الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ د، وَلْتَكُنْ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ جـ؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ هـ؟ز إلَى جَيْبِ قَوْسِ هـ؟د. فَأقولُ إنّ الزاوِيَتَيْنِ اللّتَيْنِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ جـ ز إمّا أنْ تَكونا مُتَساوِيَتَيْنِ وإمّا أنْ تَكونا إذا جُمِعَتا مُعادِلَتَيْنِ لِقائِمَتَيْنِ. لأنّا إذا عَمِلْنا مِثْلَ

l'arc *CB* au Sinus de l'arc *AB* sera égal au rapport du Sinus de *HI* au Sinus de *IA* ; et de même, si nous permutons, <les rapports> restent proportionnels ; et si la figure reste inchangée, le Sinus de l'arc *KH* sera égal au Sinus de l'arc *KC* ; et par suite, les deux angles *IHA*, *ACB*, qui sont aux deux points *C* et *G*, seront /[35r] soit égaux soit de somme égale à deux angles droits. C'est ce que nous voulions montrer.

العَمَلِ المَذْكورِ كانَتْ نِسْبَةُ جَيْبِ ج؟ب إلَى جَيْبِ ا؟ب كَنِسْبَةِ جَيْبِ ح؟ط إلَى جَيْبِ ط؟ا. وأيْضاً إذا بَدّلْنا كانَتْ مُتَناسِبَةً. وإذا كانَتِ الصورَةُ عَلَى ما هِيَ عَلَيْهِ فإنّ جَيْبَ قَوْسِ ك؟ح يَكونُ مُساوِياً لِجَيْبِ قَوْسِ ك؟ج، وَتَكونُ لِذَلِكَ زاوِيَتا ط؟ح؟ا ا؟ج؟ب اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ج ز إمّا /[٣٥و] مُتَساوِيَتَيْنِ وإما مُساوِيَتَيْنِ إذا جُمِعَتا[٩] لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ؛ وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّنَ."

**١. كانت: كان؛ ٢. شكلين: شكل؛ ٣. نسبتي: نسبة؛ ٤. متساويتان: متساوين؛ ٥. ذوا: ذو؛ ٦. مساويتين: مساوين؛ ٧. مساويتين: مساوين؛ ٨. مساوية: كلمة مكرّرة؛ ٩. جمعتا: جمعا.**

**Ibn 'Irāq discute la démonstration de la proposition III. 2 de Ménélaüs**. Il écrit ([Ibn 'Irāq 1998, p. 65], [Ibn 'Irāq, MSb, folio 35r]) :

"وَإذا تَأمّلَ مُتَأمِّلٌ وَقاسَ بَيْنَ عَمَلِنا في الشَكْلِ الـمُغْني وَما عَمِلَهُ مانالاوس[١] في الشَكْلِ القَطّاعِ وَكَثْرَةِ ما يُحْتاجُ إلَيْهِ مِنَ البَراهينِ، وَعَرَفَ أنّهُ إذا كانَتْ زاوِيَتا ا د في الـمُثَلّثَيْنِ مُتَساوِيَتَيْنِ وَنِسْبَةُ جَيْبِ ب؟ج إلَى جَيْبِ ب؟ا كَنِسْبَةِ جَيْبِ ه؟ز إلَى جَيْبِ ه؟د، عَلِمَ بِسُرْعَةٍ مِنْ غَيْرِ إطالَةِ كَلامٍ وَشُروعٍ في بُرْهانٍ، سِوَى التَقَدُّمِ في الشَكْلِ الـمُغْني الّذي يَقومُ مَقامَ الشَكْلِ القَطّاعِ، أنّ زاوِيَتَيْ ز ج إذ[٢] جَيْباهُما مُتَساوِيانِ، تَكونانِ مُتَساوِيَتينِ[٣] إمّا مُساوِيَتينِ[٤]، إذا جُمِعَتا[٥]، لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ."

Si on observe de près et si l'on compare ce que nous avons fait dans *« La figure qui dispense »* et ce que Ménélaüs a fait dans *« La figure secteur »* qui exige plusieurs démonstrations, et si l'on sait que les deux angles *A* et *D* des deux triangles sont égaux et que le rapport du Sinus de l'arc *BC* au Sinus de l'arc *BA* est égal au rapport du Sinus de l'arc *EG* au Sinus de l'arc *ED*, il devient clair, rapidement, sans long discours et sans entamer aucune démonstration, à part l'utilisation de *'La figure qui dispense'* - qui remplace *'La figure secteur'* -, que les deux angles *G* et *C* sont soit égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits, puisque leurs deux Sinus sont égaux. »

**١. مانالاوس: مالاناوس؛ ٢. إذ: إذا؛ ٣. متساويتين: متساويين؛ ٤. مساويتين: مساويتان؛ ٥. إذا جُمِعَتا: او معادلتان.**

***Commentaire sur la note d'Ibn 'Irāq.***

D'après le théorème du sinus, nous aurons (voir la Fig. 4) :

$$\frac{Sin(angl(G))}{Sin(arc(DE))} = \frac{Sin(angl(D))}{Sin(arc(GE))} \text{ et } \frac{Sin(angl(C))}{Sin(arc(AB))} = \frac{Sin(angl(A))}{Sin(arc(CB))}.$$

D'autre part, nous avons :

$$angle(A) = angle(D)$$

et

$$\frac{Sin(arc(GE))}{Sin(arc(DE))} = \frac{Sin(arc(CB))}{Sin(arc(AB))}.$$

Par conséquent[35],

$$Sin(angle(G)) = Sin(angle(C))\ ;$$

par suite, *angle(G)* et *angle(C)* sont soit égaux, soit supplémentaires.

**§ 12 - Proposition n° 37** (règles des tangentes).

Soient *ABC* et *DEG* deux triangles sphériques sur la même sphère. Désignons par *H (*resp. *I*) le pôle de *cercle(AC)* (resp. *cercle(DG)*) qui est du même côté que *B* (resp. *E*) par rapport au *cercle(AC)* (resp. *cercle(DG)*). Si

$$angle(A) = angle(D) = drt \quad et \quad angle(C) = angle(G) \neq drt,$$

alors les deux relations suivantes sont satisfaites (voir la Fig. 5) :

$$1) \quad \frac{hom(AB)}{hom(AC)} = \frac{hom(ED)}{hom(DG)} \times \frac{hom(BH)}{hom(EI)}$$

$$2) \quad \frac{hom(BC)}{hom(CA)} = \frac{hom(EG)}{hom(DG)} \times \frac{hom(BH)}{hom(EI)}$$

[35] Nous trouvons l'énoncé et la traduction du texte du théorème d'Abū Nasr (*la figure qui dispense*), par exemple, dans [Debarnot 1985, p. 111]. Al-Bīrūnī a écrit : « Voie suivie par Abū Nasr, pour la « *figure qui dispense* », dans la lettre qu'il m'a adressée : les rapports, les uns aux autres, des Sinus des côtés d'un triangle formé d'arcs de grands cercles d'une sphère sont égaux aux rapports respectifs des Sinus des angles qui leurs sont opposés… ».

"طَرِيقُ أَبِي نَصْرٍ فِي الشَّكْلِ الـمُغْنِي مِنْ رِسالَتِهِ إِلَيَّ : نِسْبَةُ جُيوبِ الأَضْلاعِ فِي الـمُثَلَّثِ الكائِنِ مِنْ قِسِيٍّ عِظامٍ عَلَى سَطْحِ الكُرَةِ، بَعْضُها إِلَى بَعْضٍ، عَلَى نِسْبَةِ جُيوبِ الزَوايا الَّتِي تُقابِلُها، بَعْضُها إِلَى بَعْضٍ، النَظيرُ إِلَى النَظيرِ..."

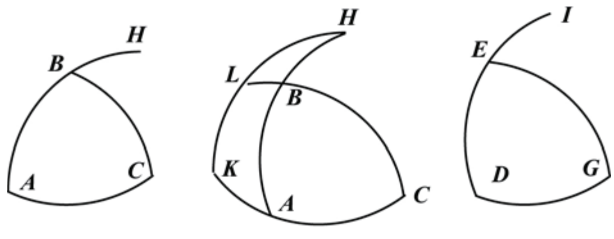



Fig. 5

*Preuve.*

Éliminons le cas trivial qui correspond à l'égalité *arc(AC) = arc(DG)* ; dans ce cas, d'après la proposition n° 28 (voir la note 27 [proposition n° 28]), les deux triangles *ABC* et *DEG* sont égaux et par conséquent, les deux relations 1) et 2) sont évidemment satisfaites.

Sans restreindre la généralité de la démonstration, nous pouvons supposer que *arc(DG)* est plus grand que *arc(AC)*. Soit *K* un point de *cercle(CA)* tel que *arc(CAK) = arc(DG)*.

Désignons par *L* le point d'intersection de *arc(BC)* et *arc(HK)*.

D'après la proposition n° 35 (relation 2), nous avons :

$$\frac{hom(HL)}{hom(LK)} = \frac{hom(HB)}{hom(BA)} \cdot \frac{hom(AC)}{hom(CK)},$$

d'où

$$(3) \quad \frac{hom(AB)}{hom(CA)} = \frac{hom(BH)}{hom(LH)} \cdot \frac{hom(LK)}{hom(KC)}.$$

Mais d'après la proposition n° 28 (voir la note 27 [proposition n° 28]), les deux triangles *LKC* et *EDG* sont égaux.

Par conséquent, *arc(KL) = arc(DE)* et par suite *arc(LH) = arc(EI)*.

En remplaçant *arc(KL)* et *arc(LH)* par leurs valeurs dans la relation (3), nous obtenons

$$\frac{hom(AB)}{hom(CA)} = \frac{hom(ED)}{hom(DG)} \cdot \frac{hom(BH)}{hom(EI)}.$$

D'après la proposition n° 36, nous avons :

$$\frac{hom(BC)}{hom(AB)} = \frac{hom(EG)}{hom(ED)}.$$

« Composons »[36] cette proportion avec la proportion 1), nous obtenons

$$\frac{hom(AB)}{hom(AC)} \cdot \frac{hom(BC)}{hom(AB)} = \frac{hom(ED)}{hom(DG)} \cdot \frac{hom(BH)}{hom(EI)} \cdot \frac{hom(EG)}{hom(ED)}.$$

D'où

$$\frac{hom(BC)}{hom(CA)} = \frac{hom(EG)}{hom(DG)} \cdot \frac{hom(BH)}{hom(EI)}.$$

Nous trouvons le même résultat chez Ménélaüs [Ibn 'Irāq 1998, proposition III. 3, p. 65-66]. Hormis le fait qu'Ibn Hūd utilise dans sa proposition le terme "homologue" au lieu du terme "*Sinus*" utilisé par Ménélaüs.

Nous remarquons, comme auparavant, une pseudo-coïncidence textuelle dans les propositions correspondantes des deux auteurs.

Exposons, ensuite, la proposition de Ménélaüs.

**Proposition** (Les Sphériques de Ménélaüs-Ibn 'Irāq, proposition III. 3. [Ibn 'Irāq 1998, p. 65-66], [Ibn 'Irāq, MSb, folios 35$^r$-35$^v$]) :

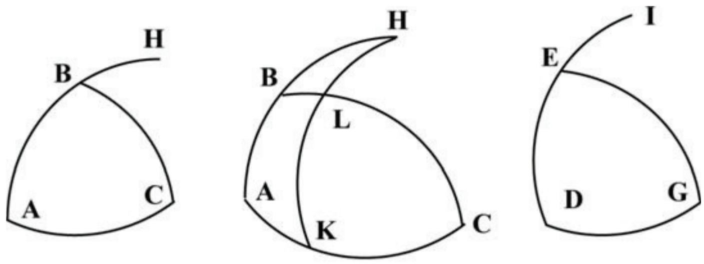



**Fig. 5a**

[36] Il s'agit d'une multiplication terme à terme des membres des proportions. (Voir la note 25 [la composition des rapports]). Pour cette opération, Ibn Hūd utilise le terme « ajoutons ».

Si deux figures trilatères sont telles que parmi leurs angles à la base, deux sont droits ; si les deux angles restants aux deux bases sont égaux et non droits, alors le rapport des deux Sinus des deux côtés entourant l'angle droit de l'une des deux figures, l'un à l'autre, est composé du rapport correspondant des deux Sinus des deux côtés entourant l'angle droit de l'autre figure, l'un à l'autre, et du rapport du Sinus de l'arc qui est entre le point du sommet de la première figure et le pôle de sa base, au Sinus de l'arc, qui est entre le point du sommet de l'autre figure et le pôle de sa base (voir la Fig. 5a).

<*Exemple* :>

Soient deux figures trilatères *ABC*, *DEG*. Que les deux angles qui sont aux deux points A et *D* soient droits, que les deux angles qui sont aux deux points *C* et *G* soient égaux et non droits et que *H* et *I* soient les deux pôles des deux arcs *AC* et *DG*.

Je dis alors que le rapport du Sinus de l'arc AB au Sinus de l'arc *AC* est composé du rapport du Sinus de l'arc *ED* au Sinus de l'arc *DG* et du rapport du Sinus de l'arc *BH* au Sinus de l'arc *EI*.

<*Démonstration* :>

faisons l'arc *CK* égal à l'arc *DG* et traçons l'arc *HK*, <qui rencontre *BC* en *L*>. L'arc *KL* est égal à l'arc DE et l'arc *LH* est égal à l'arc *EI*, mais puisque la figure reste inchangée, le rapport du Sinus de l'arc *AB* au Sinus de l'arc *BH* est composé du rapport du Sinus de l'arc *AC* au Sinus de l'arc *CK* et du rapport du Sinus de l'arc *KL* au Sinus de l'arc *LH*/[35$^{v}$] ; donc le rapport du Sinus de l'arc *BA* au Sinus de l'arc *CA* est composé du rapport du Sinus de l'arc *BH* au Sinus de l'arc *LH* et du rapport du Sinus de l'arc *LK* au Sinus de l'arc *KC* ;

**"الشَكْلُ الثالِثُ،**

إذا كانَ شَكْلانِ ذَوا[١] ثَلاثَةِ[٢] أضْلاعٍ وَكانَتْ زاوِيَتانِ مِن زَواياهُما الّتي عَلَى القاعِدَةِ قائِمَتَيْنِ، وكانَتِ الزاوِيَتانِ الباقِيَتانِ مِن الزَوايا الّتي عَلَى القاعِدَتَيْنِ مُتَساوِيتَيْنِ غَيْرَ قائِمَتَيْنِ فإنّ نِسْبَةَ جَيْبَيِ الضِلْعَيْنِ الـمُحيطَيْنِ بِالزاوِيَةِ القائِمَةِ مِن أحَدِ الشَكْلَيْنِ، أحَدُهُما إلَى الآخَرِ، مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبَيِ الضِلْعَيْنِ الـمُحيطَيْنِ بِالزاوِيَةِ القائِمَةِ مِنَ الشَكْلِ الآخَرِ، إذا أُخِذَتْ[٣] عَلَى مِثْلِ ما أُخِذَتْ[٤] عَلَيْهِ النِسْبَةُ الأُولَى، ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ القَوْسِ الّتي تَكونُ فيما بَيْنَ نُقْطَةِ رأسِ الشَكْلِ الأوّلِ وبَيْنَ قُطْبِ قاعِدَتِهِ إلَى جَيْبِ القَوْسِ الّتي تَكونُ فيما بَيْنَ نُقْطَةِ رأسِ الشَكْلِ الآخَرِ وبَيْنَ قُطْبِ قاعِدَتِهِ. فَلْيَكُنْ شَكْلانِ ذَوا ثَلاثَةِ أضْلاعٍ عَلَيْهِما ا ب جـ د هـ ز وَلْتَكُنِ الزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ا د مِنْهُما قائِمَتَيْنِ والزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ جـ ز مُتَساوِيتَيْنِ[٥] غَيْرَ قائِمَتَيْنِ وَلْيَكُنْ قُطْبا قَوْسَيْ ا؟جـ د؟ز نُقْطَتَيْ ح ط، فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟جـ مؤلّفةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ هـ؟د[٦] إلَى جَيْبِ قَوْسِ د؟ز ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ هـ؟ط، لأنّا نَجْعَلُ قَوْسَ جـ؟ك[٧] مُساوِيَةً لِقَوْسِ د؟ز وَنُخْرِجُ قَوْسَي ح؟ك <ب؟جـ فتَلْتَقِيان عَلَى نقطة ل>، فَيَكونُ قَوْسُ ك؟ل مُساوِيَةً لِقَوْسِ د؟هـ وقَوْسُ ل؟ح لِقَوْسِ هـ؟ط، وَلَكِنْ مِنْ أجْلِ أنّ الصورَةَ عَلَى ما هِيَ عَلَيْهِ يَكونُ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ح مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ا؟جـ إلَى جَيْبِ قَوْسِ جـ؟ك ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ك؟ل إلَى جَيْبِ قَوْسِ ل؟ح /[٣٥ظ] وَيَكونُ <نِسْبَةُ> جَيْبِ قَوْسِ <ب؟ا إلَى جَيْبِ قَوْسِ جـ؟ا مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ> ب؟ح إلَى <جَيْبِ> قَوْسِ ل؟ح ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ل؟ك إلَى

mais l’arc *KC* est égal à l’arc *DG*, l’arc *KL* est égal à l’arc *DE* et l’arc *LH* est égal à *EI*, d’où le rapport du Sinus de l’arc *AB* au Sinus de l’arc AC est composé du rapport du Sinus de l’arc *DE* au Sinus de l’arc *DG* et du rapport du Sinus de l’arc *BH* au Sinus de l’arc *EI*. Il est clair aussi que le rapport du Sinus de l’arc *BC* au Sinus de l’arc *CA* est composé du rapport du Sinus de l’arc *EG* au Sinus de l’arc *DG*, et du rapport du Sinus de l’arc *BH* au Sinus de l’arc *EI*. C’est ce que nous voulions démontrer.

جَيْبِ قَوْسِ ك؟ج، وَلَكِنّ قَوْسَ ك؟ج مُساوِيَةٌ لِقَوْسِ د؟ز وقَوْسَ ك؟ل مُساوِيَةٌ لِقَوْسِ د؟ه وقَوْسَ ل؟ح لِقَوْسِ ه؟ط، فنِسْبَةُ[٨] جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟ج مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ د؟ه إلَى جَيْبِ قَوْسِ د؟ز ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ ه؟ط. ومِنَ البَيِّنِ أيْضاً أنّ نِسْبَةَ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ج إلَى جَيْبِ قَوْسِ ج؟ا مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ه؟ز إلَى جَيْبِ قَوْسِ د؟ز ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ح[٩] إلَى جَيْبِ قَوْسِ ه؟ط. وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّنَ."

**١. ذوا: ذو؛ ٢. ثلاثة: ثلثة؛ ٣.أخذت: احدث؛ ٤. أخذت: احدث؛ ٥. متساويتين: متساويين؛ ٦. ه؟د: ه؟ز؛ ٧. ج؟ك: ح؟ك؛ ٨. فنِسْبَةُ: ونسبة؛ ٩. ب؟ح: ل؟ح.**

**Ibn ‘Irāq commente la démonstration de la proposition III. 3 de Ménélaüs.** Il écrit ([Ibn ‘Irāq 1998, p. 66-67], [Ibn ‘Irāq, MSb, folio 35$^{v}$]) (voir la Fig. 5a) :

Même si c’était comme l’auteur mentionne, lorsqu’il démontre - en se basant sur la *figure ‘secteur’* - que le rapport du Sinus de l’arc *AB* au Sinus de l’arc *BH* est composé du rapport du Sinus de l’arc *KL* au Sinus de l’arc *LH* et du rapport du Sinus de l’arc *AC* au Sinus de l’arc *KC*, puis il dit que le rapport du Sinus de l’arc *AB* au Sinus de l’arc *AC* - le cinquième - est composé du rapport du Sinus de l’arc *BH* - le second - au Sinus de l’arc *LH* - le quatrième - et du rapport du Sinus de l’arc *KL* - le troisième - au Sinus de l’arc *KC* - le sixième -, il a besoin d’une démonstration supplémentaire ; mais puisque le rapport du Sinus de l’arc *AB* au

"هَذا، وإنْ كانَ كَما يَذْكُرُهُ صاحِبُ الكِتابِ فإنّهُ حينَ تَبَيَّنَ بِما قَدَّمَ مِنَ الشَكْلِ القَطّاعِ أنّ نِسْبَةَ جَيْبِ ا؟ب إلَى جَيْبِ ب؟ح مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ ك؟ل[١] إلَى جَيْبِ ل؟ح ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ ا؟ج إلَى جَيْبِ ك؟ج، ثُمّ يَقولُ إنّ نِسْبَةَ جَيْبِ ا؟ب إلَى جَيْبِ ا؟ج، الخامِسِ، مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ ب؟ح، الثاني، إلَى <جَيْبِ> ل؟ح، الرابِعِ، ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ ك؟ل[٢]، الثالِثِ، إلَى جَيْبِ ك؟ج، السادِسِ، فإنّه يَحْتاجُ إلَى زِيادَةِ بُرْهانٍ، وَلَكِن لأنّ نِسْبَةَ جَيْبِ ا؟ب إلَى جَيْبِ ا؟ج كَنِسْبَةِ جَيْبِ زاوِيَة ج إلَى جَيْبِ زاوِيَةِ ب،

Sinus de l'arc *AC* est égal au rapport du Sinus de l'angle C au Sinus de l'angle *B*, le rapport du Sinus de l'arc *ED* au Sinus de l'arc *DG* est égal au rapport du Sinus de l'angle *G* au Sinus de l'angle *E* et les deux angles *G*, *C* sont égaux ; alors le rapport du Sinus de l'arc *AB* au Sinus de l'arc *AC* est composé du rapport du Sinus de l'arc *ED* au Sinus de l'arc *DG* et du rapport du Sinus de l'angle E au Sinus de l'angle *B* ; mais le rapport du Sinus de l'arc *BH* au Sinus de l'arc *LH* est égal au rapport du Sinus de l'angle *L* – qui est égal à l'angle *E* – au Sinus de l'angle extérieur *B* dont la somme avec l'angle intérieur *B* est égale à deux angles droits. Par conséquent, le rapport du Sinus de l'arc *AB* au Sinus de l'arc *AC* est composé du rapport de l'arc *BH* au Sinus de l'arc *LH* – qui est égal au rapport du Sinus de l'angle *E* au Sinus de l'angle *B* – et du rapport du Sinus de l'arc *KL* au Sinus de l'arc *KC*. C'est ce qu'il fallait montrer. »

ونِسْبَةُ جَيْبِ ه؟د إلَى جَيْبِ د؟ز كَنِسْبَةِ جَيْبِ زاوِيَةِ ز إلَى جَيْبِ زاوِيَةِ ه وزاوِيَتا ز ج مُتَساوِيتانِ فَنِسْبَةُ جَيْبِ ا؟ب إلَى جَيْبِ ا؟ج مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ ه؟د إلَى جَيْبِ د؟ز ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ زاوِيَةِ ه إلَى جَيْبِ زاوِيَةِ ب[٣]، لَكِنّ نِسْبَةَ جَيْبِ ب؟ح إلَى جَيْبِ ل؟ح كَنِسْبَةِ جَيْبِ زاوِيَةِ ل الـمُساوِيَةِ لِزاوِيَةِ ه إلَى جَيْبِ زاوِيَةِ ب الخارِجَةِ الّتي هِيَ مع الداخِلَةِ مَجْموعتَيْنِ مُعادِلتانِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ؛ فَنِسْبَةُ جَيْبِ ا؟ب إلَى جَيْبِ ا؟ج مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ ب؟ح[٤] إلَى جَيْبِ ل؟ح الـمُساوِيَةِ لِنِسْبَةِ جَيْبِ زاوِيَةِ ه إلَى جَيْبِ زاوِيَةِ ب <ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ ك؟ل إلَى جَيْبِ ك؟ج>. وذَلِكَ ممّا يَنْبَغي أن يُبَيّنَ."

**١. ك؟ل: ك؟د؛ ٢. ك؟ل: ك؟د؛ ٣. ب: د؛ ٤. ب؟ح: ب؟لح.**

## Commentaire sur la note d'Ibn 'Irāq.

Ibn 'Irāq indique que l'implication[37]

$$\frac{Sin(arc(AB))}{Sin(arc(BH))} = \frac{Sin(arc(KL))}{Sin(arc(LH))} \cdot \frac{Sin(arc(AC))}{Sin(arc(KC))}$$

$$\Rightarrow \frac{Sin(arc(AB))}{Sin(arc(AC))} = \frac{Sin(arc(BH))}{Sin(arc(LH))} \cdot \frac{Sin(arc(KL))}{Sin(arc(KC))},$$

utilisée par Ménélaüs n'est pas bien fondée. Il propose sa propre démonstration basée sur « *la figure qui dispense* »[38].

[37] Contrairement à Ménélaüs, Ibn Hūd explique ce passage logique. Il écrit que cette implication a lieu, d'après la quatrième méthode parmi les dix-huit méthodes de composition des rapports (voir la traduction, proposition n° 37).

Nous avons

$$\frac{Sin(arc(AB))}{Sin(arc(AC))} = \frac{Sin(angl(C))}{Sin(angl(B))},\ \frac{Sin(arc(ED))}{Sin(arc(DG))} = \frac{Sin(angl(G))}{Sin(angl(E))}$$

et *angle(G)* = *angle(C)* ; par suite, nous obtenons (voir la note 25 [la composition des rapports]) :

$$\begin{aligned}\frac{Sin(arc(AB))}{Sin(arc(AC))} &= \frac{Sin(angl(C))}{Sin(angl(B))}\cdot\frac{Sin(angl(E))}{Sin(angl(E))}\\ &= \frac{Sin(angl(G))}{Sin(angl(E))}\cdot\frac{Sin(angl(E))}{Sin(angl(B))}\\ &= \frac{Sin(arc(ED))}{Sin(arc(DG))}\cdot\frac{Sin(angl(E))}{Sin(angl(B))},\end{aligned}$$

mais

$$\frac{Sin(arc(BH))}{Sin(arc(LH))} = \frac{Sin(angl(L))}{Sin(angl(ext(B)))}$$

et puisque

$$angle(L) = angle(E)$$

et que

$$angle(B) + angle(ext(B)) = 2\ drt,$$

nous trouvons

$$\frac{Sin(arc(BH))}{Sin(arc(LH))} = \frac{Sin(angl(E))}{Sin(angl(B))}.$$

En conséquence

$$\frac{Sin(arc(AB))}{Sin(arc(AC))} = \frac{Sin(arc(ED))}{Sin(arc(DG))}\cdot\frac{Sin(arc(BH))}{Sin(arc(LH))}.$$

C.Q.F.D.

---

[38] Dans la démonstration d'Ibn ʻIrāq, puisqu'il a choisi le cas où arc*(DG)* > arc*(AC)*, il faut considérer la Fig. 5a. Le choix indiqué n'influe pas sur le résultat final de la proposition n° 37, puisque les sinus de deux angles supplémentaires sont égaux.

## § 13 - Proposition n° 38.

Soient *ABC* et *DEG* deux triangles sphériques sur la même sphère ; et soit *K* (resp. *L*) le pôle de *cercle(AC)* (resp. *cercle(DG)*) qui est du même côté que *B* (resp. *E*), par rapport au *cercle(AC)* (resp. *cercle(DG)*). Désignons par *H* le point d'intersection de *arc(KB)* et de *arc(AC)* et par I celui de *arc(LE)* et de *arc(DG)*.

Si *angle(A) = angle(D) ≠ drt* et *angle(C) = angle(G) ≠ drt*, alors

$$\frac{hom(AH)}{hom(HC)} = \frac{hom(DI)}{hom(IG)}.$$ (Voir la Fig. 6)

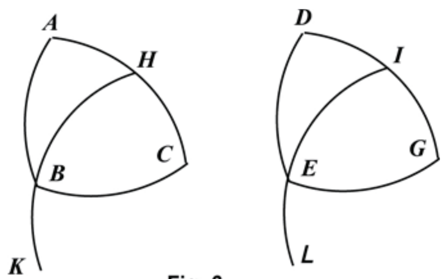


Fig. 6

*Preuve.*

Considérons les deux triangles *BHC* et *EIG*. Nous avons

*angle(H) = angle(I) = drt et angle(C) = angle(G) ≠ drt.*

D'après la proposition n° 37 (relation 1), nous déduisons

$$\frac{hom(IE)}{hom(IG)} = \frac{hom(BH)}{hom(CH)} \cdot \frac{hom(EL)}{hom(BK)}$$

D'où

$$(1)\quad \frac{hom(CH)}{hom(GI)} = \frac{hom(BH)}{hom(EI)} \cdot \frac{hom(EL)}{hom(BK)}.$$

Procédons, par analogie, pour les deux triangles *BHA* et *EID*, nous trouvons

$$(2)\quad \frac{hom(AH)}{hom(DI)} = \frac{hom(BH)}{hom(EI)} \cdot \frac{hom(EL)}{hom(BK)}.$$

En comparant les deux dernières relations, nous obtenons

$$\frac{hom(AH)}{hom(DI)} = \frac{hom(CH)}{hom(GI)}.$$

C.Q.F.D.

Nous trouvons, comme auparavant, le même résultat chez Ménélaüs [Ibn ʻIrāq 1998, proposition III. 4, p. 67-68]. Hormis le fait qu'Ibn Hūd utilise dans sa proposition le terme « *homologue* » au lieu du terme « *Sinus* » utilisé par Ménélaüs, nous remarquons une quasi-coïncidence textuelle dans les propositions correspondantes des deux auteurs. Pour démontrer les deux relations (1) et (2) de la proposition n° 38, Ménélaüs et Ibn Hūd doivent considérer, dans leurs démonstrations, deux couples de triangles rectangles intermédiaires : (*AHB*, *DIE*) et (*BHC*, *EIG*). En comparant les textes des deux auteurs, nous trouvons qu'Ibn Hūd démontre seulement la relation (1) qui peut être démontrée, en considérant le premier couple de triangles. Le texte d'Ibn Hūd contient une longue phrase répétée. Il semble qu'il y ait une erreur de copiste. Malgré la différence indiquée, la démonstration conserve la même forme chez les deux auteurs.

Exposons, par la suite, la proposition mentionnée de Ménélaüs.

**Proposition** (*Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibn ʻIrāq, proposition III. 4. [Ibn ʻIrāq 1998, p. 67-68], [Ibn ʻIrāq, MSb, folios $35^v$-$36^r$])

Soient deux figures trilatères telles que les angles à la base sont non droits et égaux, chacun à son angle homologue. Si on mène des sommets des deux figures leurs hauteurs, alors les Sinus des arcs découpés sur la base sont proportionnels. (Voir la Fig. 6).

<*Exemple* :>

soient deux figures trilatères ABC et DEG. Que l'angle en A soit égal à l'angle en D, que l'angle/[$36^r$] en C soit égal à l'angle en *G* et qu'aucun de ces angles ne soit droit. Menons des deux points *B* et *E* deux perpendiculaires aux bases *AC* et *DG*, soient *BH* et *EI*. Je dis que le rapport du Sinus de l'arc *AH* au Sinus de l'arc *HC* est égal au rapport du Sinus de l'arc *DI* au Sinus de l'arc IG.

<*Démonstration* :>

**"الشَكْلُ الرابِعُ،**

إذا كانَ شَكْلانِ ذَوا[١] ثَلاثَةِ أضْلاعٍ وكانَت زَواياهما الّتي عَلَى القاعِدَةِ مُتَساوِيَةً، كلُّ زاوِيَةٍ وَنَظيرَتها، وَلَمْ يَكُنْ زاوِيَةٌ مِنْهُما بقائِمَةٍ وَأُخْرِجَ عَمودا الشَكْلَيْنِ[٢] من نُقْطَتَيْ رَأسَيْهِما فَإنّ جُيوبَ القِسِيِّ الّتي تَنْفَصِلُ مِنَ القاعِدَةِ مُتَناسِبَةٌ.

فَلْيَكُنْ شَكْلانِ ذَوا[٣] ثَلاثَةِ أضْلاعٍ، عَلَيْهِما ا ب جـ د هـ ز وَلْيَكُنِ الزاوِيَةُ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ ا مُساوِيَةً لِلزاوِيَةِ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ د والّتي عِنْدَ[٤] نُقْطَةِ /[٣٦و] جـ لِلزاوِيَةِ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ ز وَلا يَكونُ واحِدَةٌ مِنْ هَذِهِ الزَوايا قائِمَةً وَنُخْرِجُ مِنْ نُقْطَتَيْ ب هـ عَمودَيْنِ عَلَى قاعِدَتَيْ ا؟جـ د؟ز وَهُما ب؟ح هـ؟ط. فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ جَيْبِ قَوْسِ ا؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ ح؟جـ[٥] كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ د؟ط إلَى

posons les pôles des deux arcs *AC* et *DG* les deux points *K* et *L*. Puisque les deux angles aux points *H* et *I* sont droits, les deux angles aux deux points *D* et *A* sont égaux et que les deux points K et L sont les pôles des deux arcs *AC* et *DG*, donc le rapport du Sinus de l'arc *AH* au Sinus de l'arc *DI* est composé du rapport du Sinus de l'arc *BH* au Sinus de l'arc *EI* et du rapport du Sinus de l'arc *EL* au Sinus de l'arc *BK*. De même, les deux angles en *H* et *I* des deux bases sont droits et les deux angles en *C* et *G* sont égaux et non droits, donc le rapport du Sinus de l'arc *CH* au Sinus de l'arc *GI* est composé du rapport du Sinus de l'arc *BH* au Sinus de l'arc *EI* et du rapport du Sinus de l'arc *EL* au Sinus de l'arc *BK*. Par conséquent, le rapport du Sinus de l'arc *AH* au Sinus de l'arc *DI* est égal au rapport du Sinus de l'arc *CH* au Sinus de l'arc *GI*. Si l'on permute, ils seront également proportionnels. C'est ce que nous voulions démontrer.

جَيْبِ قَوْسِ ط؟ز. لأنّا نَجْعَلُ قُطْبَيْ قَوْسَيْ ا؟ج د؟ز نُقْطَتَيْ ك ل. فَلأنّ الزاوِيَتَيْنِ اللّتَيْنِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ح ط قائِمَتانِ وأنّ الزاوِيَتَيْنِ اللّتَيْنِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ د ا مُتَساوِيَتانِ وَأنّ نُقْطَتَيْ ك ل هُما قُطْبا[٦] قَوْسَيْ ا؟ج د؟ز يَكونُ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ا؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ د؟ط مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ ه؟ط ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ه؟ل إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ك، وأيْضاً فَإنّ الزاوِيَتَيْنِ اللّتَيْنِ عِنْدَ القاعِدَتَيْنِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ح <ط> قائِمَتانِ، والزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ج ز مُتَساوِيَتانِ وَلَيْسَتا بقائِمَتَيْنِ، فَيَكونُ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ج؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ ز؟ط مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ ه؟ط ومِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ه؟ل إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ك وَيَكونُ لِذَلِكَ نِسْبَةُ[٧] جَيْبِ قَوْسِ ا؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ د؟ط كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ج؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ ز؟ط وَإذا بَدّلْنا <أيْضاً> تَكونُ مُتَناسِبَةً. وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّنَ."

**١. نَوا: نو؛ ٢. الشكلين: للشكلين؛ ٣. نَوا: نو ؛ ٤. نُقْطَةِ د والّتي عِنْدَ: أضيفت على الهامش الأيمن؛ ٥. ح؟ج: ك؟ج؛ ٦. قُطْبا: قُطْبي ٧. نِسْبَةُ: تشبه.**

## § 14 - Proposition n° 39.

1. Si *ABC* est un triangle sphérique et si *D* est un point de *arc(AC)*, alors *arc(BD)* est bissecteur de *angle(ABC)* si et seulement si

$$(1)\quad \frac{hom(BA)}{hom(AD)} = \frac{hom(BC)}{hom(CD)}.$$

2. Si *DBC* est un triangle sphérique et si *A* est un point sur le prolongement de *arc(CD)*, alors *arc(BA)* est bissecteur de l'angle adjacent supplémentaire de *angle(CBD)* si et seulement si

$$(2)\quad \frac{hom(DB)}{hom(BC)} = \frac{hom(DA)}{hom(AC)}.$$

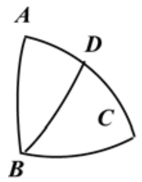



Fig. 7

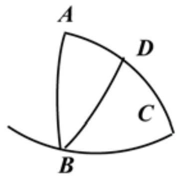



Fig. 7a

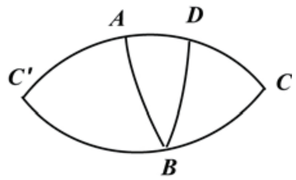



Fig. 7b

*Preuve.*

1. Supposons que *angle(ABD) = angle(DBC)*, (voir la Fig. 7).

Nous trouvons, d'après la relation

$$angle(BDA) + angle(BDC) = 2\ drt,$$

que les deux triangles *BAD* et *BCD* vérifient l'hypothèse de la proposition n°36 (1). Par conséquent

$$\frac{hom(BA)}{hom(AD)} = \frac{hom(BC)}{hom(CD)}.$$

Réciproquement (voir la Fig. 7), si la relation (1) est satisfaite, les deux relations *angle(BDA)* + *angle(BDC)* = 2 *drt* et *angle(CBA)* < 2 *drt*, entraînent l'égalité

$$angle(CBD) = angle(DBA$$ [39].

2. Considérons maintenant les deux triangles *ABD* et *ABC* (voir la Fig. 7a). L'angle *A* est commun aux triangles *ABD* et *ABC* et la somme *angle(DBA)* + *angle(CBA)* est égale à deux angles droits, donc ces deux triangles vérifient l'hypothèse de la proposition n° 36 et par suite

$$\frac{hom(DB)}{hom(BC)} = \frac{hom(DA)}{hom(AC)}.$$

Réciproquement, supposons que la relation (2) soit satisfaite et désignons par *C'* le point diamétralement opposé au point *C* (voir la Fig. 7b). Nous avons :

$$hom(BC) = hom(BC') \text{ et } hom(AC) = hom(AC').$$

Ce qui entraîne la relation

[39] Voir le commentaire de la proposition n° 36.

$$\frac{hom(DB)}{hom(BC')} = \frac{hom(DA)}{hom(AC')}.$$

En appliquant le résultat de la proposition n° 36 au couple des triangles *ABD*, *ABC'*, nous trouvons

*angle(DBA) = angle(ABC')*.

C.Q.F.D.

Nous trouvons, chez Ménélaüs, les mêmes résultats formulés dans deux propositions exposées par la suite :

**Proposition** (*Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibn ‘Irāq, proposition III. 6. [Ibn ‘Irāq 1998, p. 72-73], [Ibn ‘Irāq, MSb, folios $38^{v}$-$39^{r}$])

Si l’angle d’une figure trilatère est divisé en deux moitiés, les rapports des Sinus de deux côtés aux Sinus des arcs découpés sur la base sont égaux. La réciproque et la permutation sont également valables.

<*Exemple* :>

soit la figure trilatère ABC. Que l’arc BD partage l’angle B en deux moitiés.

Je dis que le rapport du Sinus de l’arc AB au Sinus de l’arc AD est égal au rapport du Sinus de l’arc BC au Sinus de l’arc DC, (voir la Fig. 7).

<*Démonstration* :>

Puisque ABD et CBD sont des figures trilatères ayant les angles ABD et CBD égaux et les angles en D sont de somme égale à deux angles droits, donc le rapport du Sinus de l’arc BA au Sinus de l’arc AD est égal au rapport du Sinus de

**"الشَكْلُ السادِسُ،**

إذا قُسِمَتْ زاوِيَةُ شَكْلٍ ذي ثَلاثَةِ أضْلاعٍ بِنِصْفَيْنِ فإنّ نِسْبَتَيْ جَيْبَي الضِلْعَيْنِ إلَى جَيْبَيْ قِسْمَي القاعِدَةِ نِسْبَتانِ مُتَساوِيَتانِ وعَكْسُ ذَلِكَ أيْضاً وَعَلَى الإبْدالِ أيْضاً، فَلْيَكُنْ شَكْلٌ ذو ثَلاثَةِ أضْلاعٍ عَلَيْهِ ا ب ج، ولتَقْسِمْ قَوْسُ ب؟د الزاوِيَةَ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ ب بِنِصْفَيْنِ، فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟د كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ج إلَى جَيْبِ قَوْسِ د؟ج، لأنّ شَكْلَيْ ا؟ب؟د ج؟ب؟د ذَوا[١] ثَلاثَةِ أضْلاعٍ وَزاوِيَتا ا؟ب؟د ج؟ب؟د مِنْهُما مُتَساوِيَتانِ والزاوِيَتانِ مِنْهُما اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَةِ د إذا جُمِعَتا[٢] مُساوِيَتانِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ فَيَكونُ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ا إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟د كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ج إلَى جَيْبِ قَوْسِ ج؟د. وإذا بَدَّلْنا أيْضاً تَكونُ مُتَناسِبَةً وَلِيَكُنْ أيْضاً هَهُنا نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ج كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ا؟د إلَى جَيْبِ قَوْسِ د؟ج، فَأقولُ إنّ قَوْسَ ب؟د قَدْ قَسَمَتْ زاوِيَةَ ب[٣] بِنِصْفَيْنِ، لأنّ

l'arc BC au Sinus de l'arc CD. Si l'on permute, ils restent également proportionnels. Que maintenant le rapport du Sinus de l'arc AB au Sinus de l'arc BC soit égal au rapport du Sinus de l'arc AD au Sinus de l'arc DC.

Je dis alors que l'arc BD partage l'angle B en deux moitiés, (voir : Fig. 7a et Fig. 7b).

<*Démonstration* :>

Puisque les deux angles en D sont aussi d'une somme égale à deux angles droits, le rapport du Sinus de l'arc AB au Sinus de l'arc AD est égal au rapport du Sinus de l'arc BC au Sinus de l'arc CD et que les angles /[39r] ABD et DBC ne sont pas de somme égale à deux angles droits, l'angle ABD est égal donc à l'angle DBC. »

الزاوِيَتَيْنِ اللّتَيْنِ عِنْدَ نُقْطَةِ د هُما أيْضاً مُعادِلتانِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ ونِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟د كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ج[٤] إلَى جَيْبِ قَوْسِ ج؟د وَلَيْسَ زاوِيَةُ /[٣٩و] ا؟ب؟د وَزاوِيَةُ د؟ب؟ج إذا جُمِعَتا[٥] مُساوِيَتَيْنِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ فَزاوِيَةُ ا؟ب؟د مُساوِيَةٌ لِزاوِيَةِ د؟ب؟ج."

**١. ذَوا: ذو؛ ٢. جُمِعَتا: جمعنا؛ ٣. ب: ب؟د؛ ٤. ب؟ج: م؟ج؛ ٥. جُمِعَتا: حمعنا.**

## Ibn ʻIrāq commente la démonstration de Ménélaüs, il écrit :

Ménélaüs a construit ceci, en se basant sur ce qu'il a montré dans la proposition 2 (livre III). L'application de la « *figure qui dispense* » nous dispense de cette construction qui devient comme une répétition. ([Ibn ʻIrāq 1998, p. 73], [Ibn ʻIrāq, MSb, folios 39r])

"قَدْ بَنَى هَذا مانالاوس عَلَى ما قَدَّمَهُ في الشَكْلِ الثاني، وبالشَكْل الـمُغْني يُسْتَغْنَى عَنْ هَذا فَإنّهُ يَكونُ كَالـمُعادِ."

**Proposition** (*Les Sphériques* de Ménélaüs-Ibn ʻIrāq, proposition III. 7. [Ibn ʻIrāq 1998, p. 73-74], [Ibn ʻIrāq, MSb, folio 39r]) :

Supposons, de la même manière, que l'angle qui succède à l'angle *ABC'*[40] soit divisé en deux moitiés par l'arc BD (voir la Fig. 7b). Je dis que le rapport du Sinus de l'arc AB au

**"الشَكْلُ السابِعُ،**

وأيْضاً فَإنّا نَجْعَلُ الزاوِيَةَ الّتي <تَلي> زاوِيَةَ ا؟ب؟ج مَقْسومَةً بِنِصْفَيْنِ بقَوْسِ ب؟د. فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ

[40] C'est-à-dire l'angle adjacent supplémentaire à l'angle ABC.

Sinus de l’arc *BC’* est égal au rapport du Sinus de l’arc *AD* au Sinus de l’arc *DC’* et réciproquement.

<*Démonstration* :>

Puisque les deux figures *ABD* et *C’BD* sont trilatères ayant l’angle D commun et la somme des angles *ABD* et *C’BD* égale à deux angles droits, le rapport du Sinus de l’arc *AB* au Sinus de l’arc *AD* est égal donc au rapport du Sinus de l’arc *BC’* au Sinus de l’arc *C’D*. La permutation est valable aussi et la réciproque est évidente.

جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ج كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ا؟د إلَى جَيْبِ قَوْسِ د؟ج وعَكْسُ ذَلِكَ <أيْضاً>، لأنّ شَكْلَيْ ا؟ب؟د ج؟ب؟د ذوا[١] ثَلاثَةِ أضْلاعٍ والزاوِيَةُ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ د واحِدَةٌ مُشْتَرَكَةٌ لَهُما وَزاوِيَتا ا؟ب؟د ج؟ب؟د [و]إذا جُمِعَتا مُساوِيَتانِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ فَيَكونُ لِذَلِكَ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ا؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ا؟د كَنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ج إلَى جَيْبِ قَوْس، ج؟د[٢]، وَإبدالُ ذَلِكَ أيْضاً وَأمّا عَكْسُ ذَلِكَ فَهُوَ بَيِّنٌ."

**١. ذوا: ذو؛ ٢. ج؟د: ا؟د.**

## II. Conclusion

Bien que l'on trouve, dans *Les Sphériques* de l'*Istikmāl*, des énoncés plus généraux que ceux de Théodose[41], le niveau des contenus mathématiques et démonstratifs de ces propositions d'Ibn Hūd ne dépasse pas, dans la plupart des cas, celui des *Sphériques* de Théodose et de Ménélaüs. En effet, Ibn Hūd rassemble des propositions des *Sphériques* de Théodose et de Ménélaüs ; mais le(s) auteur(s) de l'*Istikmāl* n'utilise(nt) presque nulle part la technique avancée du triangle sphérique pour réduire les démonstrations. Il faut noter ici que Ménélaüs a lui-même procédé à la reformulation de quelques énoncés de Théodose. Mais, il faut également remarquer que l'*Istikmāl* contient des démonstrations dignes d'attention. Par exemple, dans le deuxième chapitre, Ibn Hūd énonce et démontre un théorème remarquable en géométrie sphérique. C'est le théorème déjà mentionné qui généralise la proposition III. 11 des *Sphériques* de Théodose et intègre les propositions III. 23-25 des *Sphériques* de Menelaüs [théorème d'Ibn Hūd]. C'est pour établir ce théorème – contrairement à Ibn 'Irāq qui expose une démonstration euclidienne – que le(s) auteur(s) de l'*Istikmāl* procède(nt) par une méthode de géométrie « *intrinsèque* ». Ibn Hūd a-t-il lui-même fait cette découverte, ou l'a-t-il empruntée pour l'intégrer à un livre à vocation synthétique et encyclopédique comme l'*Istikmāl ?* Nous l'ignorons mais n'avons trouvé pour l'heure aucun prédécesseur d'Ibn Hūd qui ait entrepris une telle recherche et démontré ce théorème de géométrie sphérique de cette manière [Rashed et Al-Houjairi 2010]. La démonstration de l'égalité des angles à la base d'un triangle sphérique isocèle[42] semble comporter également un aspect innovant. Cette démonstration est basée sur les deux premiers cas d'égalité d'un couple de triangles sphériques (c'est-à-dire, lorsque les côtés des deux triangles sont respectivement égaux ou bien lorsqu'un angle de l'un des triangles est égal à un angle de l'autre et que les côtés qui entourent l'un de ces angles sont respectivement égaux à leurs homologues de l'autre triangle). Malheureusement, les démonstrations des deux cas mentionnés se trouvaient vraisemblablement dans les paragraphes perdus du deuxième chapitre. Bien que la plupart des tournures terminologiques de l'*Istikmāl* soient empruntées, nous remarquons que le langage utilisé dans les énoncés ainsi que dans les textes des démonstrations est parfois moins exact et moins judicieux que chez les autres mathé-

[41] La généralisation est ici, en général, d'aspect purement accumulatif consistant à reformuler plus d'une proposition en une seule ; voir par exemple les propositions des paragraphes 18 et 19 des *Sphériques* d'Ibn Hūd [Al-Houjairi 2005, vol. 1 : p. 255, 285 ; vol. 2 : p. 46, 53].
[42] Voir les propositions n° 20 et n° 21 [Al-Houjairi 2005, p. 73, 74].

maticiens connus comme al-Khayyām ou Ibn ʻIrāq. Le texte manuscrit contient un nombre élevé de fautes grammaticales. Nous rencontrons parfois dans les propositions des conditions superflues ainsi que des passages géométriques erronés. Dans plusieurs cas, les démonstrations ne couvrent pas toutes les possibilités que l'on doit considérer, elles se limitent à des cas particuliers.

Il faut avouer cependant, que l'apparition d'un nouveau style de rédaction « encyclopédique » en mathématiques dans un livre comme l'*Istikmāl*, nous place devant un problème épistémologique. Roshdi Rashed écrit : « Toute la question en revanche reste de savoir quand et pourquoi ce style de rédaction encyclopédique en mathématiques, qui était jusque-là l'apanage des philosophes, comme Ibn Sinā dans *al-Shifā'*, a été récupéré à l'ouest islamique par les mathématiciens, à l'exemple d'Ibn Hūd. Celui-ci, héritier des grands mathématiciens – Banū Mūsā, Ibn Qurra, Ibn Sinān, Ibn al-Haytham, Ibn al-Samh…– pouvait engager cette rédaction encyclopédique. » [Rashed 1996, p. 979].

À l'époque d'Ibn Hūd, l'*Istikmāl* représentait un grand ouvrage scientifique alors que sa composition exigeait, sans doute, une longue formation polyvalente en mathématiques et un travail quasi-perpétuel sur la rédaction des textes. Il est donc très peu probable, que ce livre ait pu être composé pendant les intervalles de repos d'un dirigeant politique. Nous sommes enclins à penser que l'*Istikmāl* a été écrit par un groupe d'auteurs sous la direction d'un dirigeant politique qui est probablement Ibn Hūd. Il semble également que l'écriture d'un tel « manuel encyclopédique » en mathématiques ait été une partie d'une plus grande tâche consistant à rédiger des livres portant sur d'autres disciplines scientifiques : l'analyse du texte manuscrit montre, par les emprunts littéraux et massifs aux prédécesseurs, que l'*Istikmāl* devait être un genre classique d'un manuel encyclopédique en mathématiques et il était alors planifié pour inclure l'astronomie, l'optique et l'harmonique.

L'*Istikmāl* ne couvre pas entièrement le contenu des *Sphériques* de Théodose et de Ménélaüs. Certaines propositions de ces livres manquent à la liste d'Ibn Hūd. C'est le cas, par exemple, de la proposition III. 5 de Ménélaüs qui était un sujet d'un débat intensif dans la *Tradition Géométrique Arabe*. Bien qu'Ibn ʻIrāq, en se basant sur le théorème de sinus, ait démontré cette proposition à deux reprises bien connues, les auteurs de l'*Istikmāl* soit n'étaient pas au courant de cette démonstration, soit ils étaient décidés à ne pas franchir la limite connue et bien comprise des *sphériques grecques classiques*.

Enfin, il faut noter qu'en comparant le texte d'Ibn Hūd avec celui de Ménélaüs (tel qu'on trouve dans le livre d'Ibn ʻIrāq) et avec les commentaires propres d'Abū Nasr, nous remarquons que les *Sphériques* de l'*Istikmāl* reflètent une tendance – bien que très faible en l'absence du théorème des sinus – vers une reprise par des démonstrations « *intrinsèques* » de quelques théorèmes sphériques.

## III. TEXTES MANUSCRITS ET TRADUCTIONS

**§ 9 -. <Proposition n° 34>** (*Les Sphériques* d'Ibn Hūd) [Ibn Hūd, folios 82v-83r], (voir la Fig. h1)

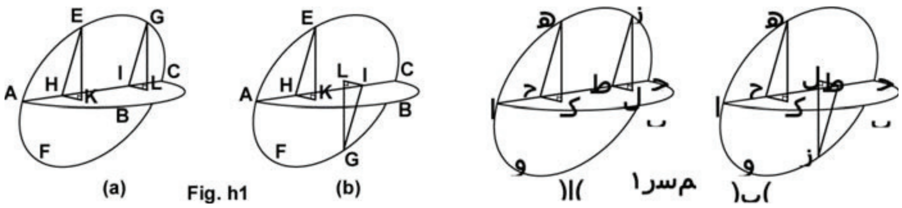



Fig. h1

**ط** <شكل رقم ٣٤> **(رسم ١)**

كُلُّ دائِرَتَيْنِ مِنَ الدَوائِرِ العِظامِ الّتي تَقَعُ في بَسيطِ الكُرَةِ، تُفْصَلُ مِنْ إحْداهُما قَوْسانِ اقَلُّ مِنْ نِصْفَيْ دائِرَةٍ مِمّا يَلي إحْدَى نُقْطَتَيْ تَقاطُعِهِما، ويُخْرَجُ مِنْ طَرَفَي القَوْسَيْنِ عَمودانِ عَلَى سَطْحِ الدائِرَةِ الأُخْرَى؛ فَإنّ نِسْبَةَ وَتَرِ ضِعْفِ إحْدَى القَوْسَيْنِ إلَى وَتَرِ ضِعْفِ القَوْسِ الأُخْرَى مِنْهُما كَنِسْبَةِ العَمودِ الخارِجِ مِنْ طَرَفِها إلَى العَمودِ الخارِجِ مِنْ طَرَفِ القَوْسِ الأُخْرَى، كانَتِ القَوْسانِ جَميعاً في جِهَةٍ واحِدَةٍ أو في جِهَتَيْنِ مُخْتَلِفَتَيْنِ؛ مِثالُ ذَلِكَ: دائِرَتا ا؟ب؟ج؟د ا؟ه؟ج<و>، وَهُما مِنَ الدَوائِرِ العِظامِ الّتي في بَسيطِ

Soient deux grands cercles sur la surface de la sphère, sur l'un desquels on sépare, à partir de l'un de leurs deux points d'intersection, deux arcs, chacun plus petit qu'un demi-cercle. On mène de l'extrémité de <chacun de ces> deux arcs, deux perpendiculaires au plan de l'autre cercle. Alors le rapport de la corde du double de l'un des deux arcs à la corde du double de l'autre arc, est comme le rapport de la perpendiculaire menée de l'extrémité du <premier arc> à la perpendiculaire menée de l'extrémité de l'autre arc, que les arcs soient du même côté ou non.

*Exemple* : soient, sur la surface de la sphère, les deux grands cercles ABCD, AEC<F> /[83$^{r}$] qui se coupent en deux points A et C. On sépare du cercle ACEF deux arcs AE et AG, chacun plus petit qu'un demi-cercle. On mène de E et G, deux perpendiculaires au plan du cercle ABCD.

Je dis que le rapport de la corde du double de l'arc AE à la corde du double de l'arc AG, est comme le rapport de la perpendiculaire menée du point E à la perpendiculaire menée du point G.

*Démonstration :* l'intersection des deux cercles ABCD, AECF est leur diamètre, que ce soit AC. Des deux points E et G, menons deux perpendiculaires sur AC, soient EH et GI. Si elles étaient perpendiculaires au plan du cercle ABC, on aurait démontré ce que nous voulions, car elles seraient dans ce cas les Sinus des deux arcs AE et AG. Sinon, menons des deux points E et G, deux perpendiculaires au plan du cercle ABCD, soient EK et GL. Elles sont parallèles. Menons également les deux droites LI, KH. Les deux droites EH et GI sont également parallèles. Mais si deux droites entourant un certain angle sont parallèles à deux autres droites entourant un autre angle, alors les deux angles sont égaux[43], par conséquent, l'angle

الكُرَة / [٨٣و] وَقَدْ تَقاطَعَتا عَلَى نُقْطَتَيْ ا ج، وفُصِلَ[١] مِنْ دائِرَةِ ا؟ج؟ه؟و قَوْسانِ كُلُّ واحِدَةٍ[٢] مِنْهُما أَقَلُّ من نِصْفِ[٣] دائِرَةٍ، وهُما ا؟ه ا؟ز. وأُخْرِجَ[٤] مِنْ ه ز عَمودانِ عَلَى سَطْحِ دائِرَةِ ا؟ب؟ج؟د. فَأقولُ: إنّ نِسْبَةَ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ه إلَى وَتَرِ[٥] ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ز كَنِسْبَةِ العَمودِ الّذي أُخْرِجَ مِنْ نُقْطَةِ ه إلَى العَمودِ الّذي أُخْرِجَ مِنْ نُقْطَةِ ز. بُرهانُ[٦] ذَلِكَ، أنّ الفَصْلَ المشْتَرَكَ لِدائِرَتَيْ ا؟ب؟ج؟د ا؟ه؟ج؟و هُوَ قُطْراهُما، فَلْيَكُنْ قُطْرَ[٧] ا؟ج، ونُخْرِجُ من نُقْطَتَيْ ه ز عَمودَيْنِ عَلَى ا؟ج وَهُما ه؟ح ز؟ط؛ فَإنْ كانا عَمودَيْنِ عَلَى سَطْحِ دائِرَةِ ا؟ب؟ج فَقَدْ تَبيَّنَ ما أرَدْنا، لأنّهُما جَيْبا قَوْسَيْ ا؟ه ا؟ز. وإنْ لم يَكونا كذَلِكَ، فأنّا نُخْرِجُ من نُقْطَتَيْ ه ز عَمودَيْنِ عَلَى سَطْحِ دائِرَةِ ا؟ب؟ج؟د، وهما ه؟ك ز؟ل ، فَيَكونا مُتَوازِيَيْنِ؛ ونُخْرِجُ أيْضاً خَطَّيْ ل؟ط ك؟ح. وخَطّا ه؟ح ز؟ط أيْضاً مُتَوازِيانِ؛ وإنْ وازَى خَطّانِ يُحيطانِ بِزاوِيَةٍ خَطَّيْنِ آخَرَيْنِ يُحيطانِ بِزاوِيَةٍ أُخْرَى، فَإنّ الزاوِيَتَيْنِ مُتَساوِيَتان[٨]؛ فَزاوِيَةُ ح؟ه؟ك مُساوِيَةٌ لِزاوِيَةِ ط؟ز؟ل. وزاوِيَتا ه؟ك؟ح ز؟ل؟ط قائِمَتان؛ فَمُثَلّثا ه؟ح؟ك ز؟ط؟ل مُتَشابِهانِ؛ فنِسْبَةُ ه؟ح إلَى ز؟ط كَنِسْبَةِ ه؟ك إلَى ز؟ل، وَلَكِنّ نِسْبَةَ ه؟ح إلَى ز؟ط كَنِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ه إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ز، لأنّهُما جَيْباهما؛ فنِسْبَةُ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ه إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ز

[43] Cette affirmation manque de précision. Les angles peuvent être supplémentaires.

HEK est égal à l'angle IGL. Mais les deux angles EKH, GLI sont droits, donc les deux triangles EHK, GIL sont semblables ; par suite, le rapport de EH à GI est comme le rapport de EK à GL. Mais le rapport de EH à GI est comme le rapport de la corde du double de l'arc AE à la corde du double de l'arc AG - puisque ce sont leurs Sinus - donc le rapport de la corde du double de l'arc AE à la corde du double de l'arc AG est égal au rapport de la perpendiculaire EK à la perpendiculaire GL.

Si l'un des deux arcs AE, AG est du côté de AF, on montre ce que nous avons dit de la même manière. C'est ce que nous voulions montrer. »

كَنِسْبَةِ عَمودِ ه؟ك إلَى عَمودِ ز؟ل. وكذَلِكَ نُبَيِّنُ كما قُلْنا، لَوْ أنّ إحْدَى[٩] قَوْسَيْ ا؟ه ا؟ز مِنْ جِهَةِ ا؟و. وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّن.

---

**٠ إحدى: احد؛ ١. فصل : اللاّم مَطْموسة؛ ٢. واحِدَة : واحد؛ ٣. نصف : حرفا الصاد والفاء مطموسان؛ ٤. وأُخرج : حرفا الراء والجيم مطموسان؛ ٥. إلى وتر : حرفا الألف المقصورة والواو مطموسان؛ ٦. برهان : أحرف الباء والراء والهاء مطموسة؛ ٧. فليكن قطر : حرفا النون والقاف مطموسان؛ ٨. هذا الحكم غير دقيق، فقد يكون، مثلاً، مجموع الزاويتين مساوياً لقائمتين؛ ٩. إحدى : أضافها الناسخ على الهامش، بعد أن ضرب بالقلم فوق كلمة نسبة.**

**§ 10 - <Proposition n° 35>** (*Les Sphériques* d'Ibn Hūd) [Ibn Hūd, folios 83$^{r}$-83$^{v}$], (voir : Fig. h2 et Fig. h3).

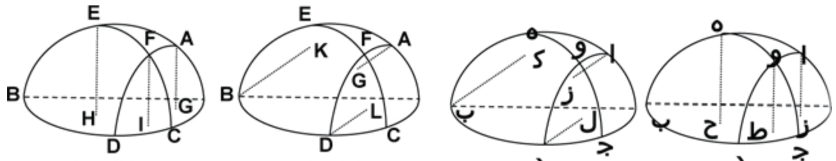



Fig. h2 Fig. h3 رسم٣ رسم٢

**ي** <شكل رقم ٣٥> **(رسم ٢و٣)**

وإذْ قَدَّمْنا هَذِهِ الـمُقَدِّمَةَ، فَلْتَتَقاطَعْ فيما بَيْنَ قَوْسَيْ ا؟ب ب؟ج قَوْسا ا؟د ج؟ه عَلَى نُقْطَةِ و، ولْتَكُنْ هَذِهِ القِسِيُّ من الدَوائِرِ العِظامِ الّتي تَقَعُ في الكُرَةِ، ولْتَكُنْ كُلُّ قَوْسٍ مِنْها أَقَلَّ مِنْ نِصْفِ دائِرَةٍ؛ فَأقولُ، إنّ نِسْبَةَ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ب إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ب؟ه مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟د إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ د؟و، وَمِنْ نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ و؟ج إلَى وَتَرِ ضِعْفِ[١] قَوْسِ ج؟ه. وبُرْهانُ ذَلِكَ: أنّا نُخْرِجُ من نُقَطِ[٢] ا ه و أعْمِدَةً عَلَى سَطْحِ دائِرَةِ قَوْسِ ب؟ج، وهِيَ أَعْمِدَةُ ا؟ز ه؟ح و؟ط، وَنَجْعَلُ عَمودَ و؟ط وَسَطاً في النِسْبَةِ بَيْنَ عَمودَيْ ا؟ز ه؟ح؛ فَتَكونُ نِسْبَةُ ا؟ز إلَى ه؟ح مُؤَلَّفَةً من نِسْبَةِ ا؟ز إلَى و؟ط وَمِنْ نِسْبَةِ و؟ط إلَى ه؟ح. فَأمّا نِسْبَةُ عَمودِ ا؟ز إلَى عَمودِ ه؟ح فَقَدْ بَيّنّا بِالـمُقَدِّمَةِ، أنّها كَنِسْبَةِ وَتَرِ

Après avoir introduit ce qui précède, que les deux arcs AD et CE se coupent entre les deux arcs AB et BC au point F, et qu'ils soient des arcs de grands cercles situés sur une sphère, et que chacun d'eux soit plus petit qu'un demi-cercle.

Je dis que le rapport de la corde du double de l'arc *AB* à la corde du double de l'arc *BE* est composé du rapport de la corde du double de l'arc *AD* à la corde du double de l'arc *DF* et du rapport de la corde du double de l'arc *FC* à la corde du double de l'arc *CE*.

*Démonstration* (voir la Fig. h2) : menons des points *A*, *E*, *F*, des perpendiculaires au plan du cercle de l'arc BC, soient les perpendiculaires *AG*, *EH*, *FI*, et posons la perpendiculaire *FI* moyenne proportionnelle entre les deux perpendiculaires *AG* et *EH*. Alors, le rapport de *AG* à *EH* est composé du rapport de AG à FI et du rapport de *FI* à *EH*. Quant au rapport de la perpendiculaire *AG* à la perpendiculaire *EH*, nous avons montré dans ce qui précède, qu'il est comme le rapport de la corde du double de l'arc *AB* à la corde du double de l'arc *BE* ; quant au rapport de la perpendiculaire *AG* à la perpendiculaire *FI*, il est comme le rapport de la corde du double de l'arc *AD* à la corde du double de l'arc *DF* ; et quant au rapport de la perpendiculaire *FI* à la perpendiculaire *EH*, nous montrons qu'il est comme le rapport de la corde du double de l'arc FC à la corde du double de l'arc *CE*.

Alors le rapport de la corde du double de l'arc *AB* à la corde du double de l'arc *BE*, est composé du rapport de la corde du double de l'arc *AD* à la corde du double de l'arc *FD* et du rapport de la corde du double de l'arc *CF* à la corde du double de l'arc *CE*.

Je dis également que, dans le cas de la diérèse, le rapport de la corde du double /[83v] de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *BE* est composé du rapport de la corde du double de l'arc *AF* à la corde du double de l'arc *FD* et du rapport de la corde du double de l'arc *CD* à la corde du double de l'arc *CB*.

*Démonstration* (voir la Fig. h3) : menons des points *A*, *B* et *D*, au plan du cercle de l'arc CFE, les perpendiculaires *AG*, *BK*, *DL* et posons *DL*

ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ب إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ب؟ه، وأمّا نِسْبَةُ عَمودِ ا؟ز إلَى عمود و؟ط فكَنِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟د إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ د؟و، وأمّا نِسْبَةُ عَمودِ و؟ط إلَى عَمودِ ه؟ح فَتَتَبَيَّنُ أنّها كَنِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ و؟ج إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ج؟ه. فنِسْبَةُ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ب إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ب؟ه مُؤَلَّفَةٌ[٣] مِنْ نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟د إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ و؟د، وَمِنْ نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ[٤] قَوْسِ ج؟و إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ج؟ه؛ وَأقولُ أيْضاً إنّهُ عَلَى جِهَةِ التَفْصيل تَكونُ نِسْبَةُ وَتَرِ ضِعْفِ /[**٨٣ظ**] قَوْسِ ا؟ه إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ب؟ه مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ <وَتَرِ>[٥] ضِعْفِ قَوْسِ ا؟و إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ و؟د، وَمِنْ نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ج؟د إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ج؟ب. وَبُرْهانُ ذَلِكَ: أنّا نُخْرِجُ من نُقَطِ[٦] ا ب د إلَى سَطْحِ دائِرَةِ قَوْسِ ج؟و؟ه أعْمِدَةَ ا؟ز ب؟ك د؟ل، وَنَجْعَلُ د؟ل وَسَطاً في النِسْبَةِ بَيْنَ عَمودَيْ ا؟ز ب؟ك، فَتَكونُ نِسْبَةُ عَمودِ[٧] ا؟ز إلَى عَمودِ ب؟ك مُؤَلَّفَةً من نِسْبَةِ عَمودِ ا؟ز إلَى عَمودِ د؟ل، وَمِنْ نِسْبَةِ عَمودِ د؟ل إلَى عَمودِ ب؟ك. فأمّا نِسْبَةُ عَمودِ ا؟ز إلَى عَمودِ ب؟ك فكَنِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ه إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ب؟ه، وأما نِسْبَةُ عَمودِ ا؟ز إلَى عَمودِ د؟ل، فكَنِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟و إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ و؟د، وأمّا نِسْبَةُ عَمودِ د؟ل إلَى عَمودِ ب؟ك، فهِيَ كَنِسْبَةِ وَتَرِ

ضِعْفِ قَوْسِ د؟ج إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ج؟ب، كَما تَبَيَّنَ في الـمُقَدِّمَةِ الّتي قَدَّمْنا. فنِسْبَةُ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟ه إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ه؟ب مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ا؟و إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ و؟د، وَمِنْ نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ج؟د إلَى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ ج؟ب؛ وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّنَ.

**[١]. كُتِبَ على الهامِشِ : "وَنَبْدَأُ عَلَى التَرْتيبِ وأمّا عَلَى <العَكْسِ>، فَنِسْبَةُ وَتَرِ <ضِعْفِ قَوْسِ ألف ها> إلى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ با ها مُؤلَّفَةٌ مِن نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ <ألف واو> إلى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ واو دال وَمِن نِسْبَةِ وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ جيم دال إلى وَتَرِ ضِعْفِ قَوْسِ جيم با"؛ [٢]. نقط : نقطة؛ [٣]. مؤلَّفة : حرفا اللام والفاء مطموسان؛ [٤]. ضعف : حرف الفاء مطموس؛ [٥]. <وتر> : مطموسة ؛ [٦]. نقط : نقطة؛ [٧]. عمود : أحرف العين والميم والواو مطموسة؛**

moyenne proportionnelle entre les deux perpendiculaires AG et BK. Le rapport de la perpendiculaire *AG* à la perpendiculaire *BK* est donc composé du rapport de la perpendiculaire *AG* à la perpendiculaire *DL* et du rapport de la perpendiculaire *DL* à la perpendiculaire *BK*. Quant au rapport de la perpendiculaire *AG* à la perpendiculaire *BK*, il est comme le rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *BE* ; quant au rapport de la perpendiculaire *AG* à la perpendiculaire *DL*, il est comme le rapport de la corde du double de l'arc *AF* à la corde du double de l'arc *FD* ; et quant au rapport de la perpendiculaire *DL* à la perpendiculaire *BK*, il est comme le rapport de la corde du double de l'arc *DC* à la corde du double de l'arc *CB*, comme on l'a montré dans ce qui précède. Alors le rapport de la corde du double de l'arc *AE* à la corde du double de l'arc *EB* est composé du rapport de la corde du double de l'arc *AF* à la corde du double de l'arc *FD* et du rapport de la corde du double de l'arc *CD* à la corde du double de l'arc *CB*. C'est ce que nous voulions montrer.

**§ 11 - <Proposition n° 36>** (*Les Sphériques* d'Ibn Hūd) [Ibn Hūd, folios $83^{v}$-$84^{r}$], (voir la Fig. h4).

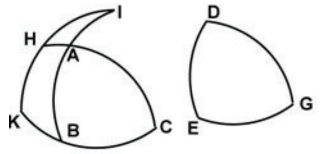
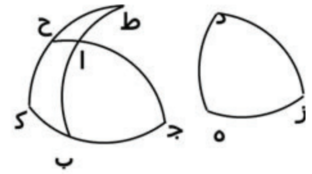



Fig. h4




رسم ٤

« Si, sur la surface de la sphère, deux figures trilatères ont un angle égal à un angle, et si deux autres de leurs angles <pris chacun dans une des figures> sont soit égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits, alors les rapports des homologues des deux côtés qui sous-tendent les deux angles égaux, aux homologues des deux côtés qui sous-tendent les deux autres angles qui sont égaux ou <d'une somme> égale à deux droits, sont deux rapports égaux. Et réciproquement.

J'entends par l'expression *homologue de l'arc*, la ligne droite qui sous-tend <l'arc> double.

<*Exemple*:> soient ABC et DEG deux figures trilatères ; supposons que l'angle qui est en A soit égal à l'angle D et que les angles qui sont aux deux points C et G soient égaux ou bien soient d'une somme égale à deux angles droits. Je dis que le rapport de l'homologue de AB à l'homologue de BC est égal au rapport de l'homologue de DE à l'homologue de EG.

*Démonstration* : prolongeons les deux arcs CA et BA jusqu'en H et I et posons l'arc AH égal à l'arc DG et l'angle AHI égal à l'angle EGD ; pro-

**يا** <شَكْل رقم ٣٦> **(رسم ٤)**

إذا كانَتْ زاوِيَتانِ مِنْ زَوايا شَكْلَيْنِ مِنَ الأشْكالِ ذَواتِ الأضْلاعِ الثَلاثَةِ عَلَى بَسيطِ كُرَةٍ مُتَساوِيتَيْنِ؛ وكانَتْ زاوِيَتانِ أُخْرَيانِ مِنْ زَواياهُما إمّا مُتَساوِيتَيْنِ وإمّا مُساوِيَتَيْنِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ إذا جُمِعَتا[١]؛ فإنّ نِسْبَةَ نَظيرَيِ الضِلْعَيْنِ اللّذَيْنِ يُوَتِّرانِ الزاوِيَتَيْنِ[٢] المُتَساوِيتَيْنِ إلَى نَظيرَيِ الضِلْعَيْنِ اللّذَيْنِ يُوَتِّرانِ الزاوِيَتَيْنِ <الأُخْرَيَيْنِ> المُتَساوِيتَيْنِ[٣] أو المُساوِيَتَيْنِ لِقائِمَتَيْنِ <إذا جُمِعَتا>، هُما نِسْبَتان مُتَساوِيتانِ، وعَكْسُ ذَلِكَ أيْضاً؛ وأعْني بقَوْلي نظير القَوْسِ الخَطَّ المُسْتَقيمَ الّذي يُوَتِّرُ ضِعْفَها؛ فَلْيَكُنْ شَكْلانِ ذَوا ثَلاثَةِ أضْلاعٍ، عَلَيْهِما ا ب جـ د ه ز وَلْتَكُنِ الزاوِيَةُ الّتي عِنْدَ ا من أحَدِهِما مُساوِيَةً لِلزاوِيَةِ الّتي عِنْدَ د مِنَ الآخَرِ؛ وَلْتَكُنِ الزاوِيَتانِ مِنْهُما اللّتانِ عِنْدَ نقطَتَي[٤] جـ ز إمّا مُتَساوِيتَيْنِ وإمّا مُساوِيَتَيْنِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ<إذا جُمِعَتا>؛ فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ نَظيرِ ا؟ب إلَى نَظيرِ ب؟ج كَنِسْبَةِ نَظيرِ د؟ه إلَى نَظيرِ ه؟ز[٥]؛ بُرْهانُهُ: أنّا نُخْرِجُ قَوْسَيْ ج؟ا؟ح ب؟ا؟ط[٦]، وَنَجْعَلُ قَوْسَ ا؟ح مِثْلَ قَوْسِ د؟ز، وزاوِيَةُ ا؟ح؟ط مُساوِيَةٌ لِزاوِيَةِ ه؟ز؟د؛ وَنُخْرِجُ

longeons les deux arcs CB et HI jusqu'à ce qu'ils se coupent au point K, ainsi l'arc AI est égal à l'arc ED et l'arc IH est égal à l'arc EG. Puisque les deux angles BCA et AHI sont, soit égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits, l'homologue de l'arc CK est égal à l'homologue de l'arc KH ; et puisque la figure reste inchangée[44], le rapport de l'homologue de l'arc IH à l'homologue de l'arc KH est composé du rapport de l'homologue de l'arc IA à l'homologue de l'arc AB et du rapport de l'homologue de l'arc BC à l'homologue de l'arc CK ; mais l'homologue de l'arc CK est égal à l'homologue de l'arc KH, de sorte que le rapport de l'homologue de l'arc HI à l'homologue de l'arc KC est composé du rapport de l'homologue de l'arc IA à l'homologue de l'arc AB et du rapport de l'homologue de l'arc BC à l'homologue de l'arc CK.

Posons BC moyenne proportionnelle entre HI et CK, alors le rapport de l'homologue de l'arc HI à l'homologue de l'arc /[**84$^r$**] CK est composé du rapport de l'homologue de l'arc HI à l'homologue de l'arc CB et du rapport de l'homologue de l'arc CB à l'homologue de l'arc CK. Si nous enlevons[45] le rapport de l'homologue de l'arc CB à l'homologue CK des deux rapports, il reste le rapport de l'homologue de l'arc HI à l'homologue de l'arc BC égal au rapport de l'homologue de l'arc IA à l'homologue de l'arc AB. Si nous permutons, ils restent également propor-

قَوْسَيْ ج؟ب ح؟ط حَتَّى تَلْتَقِيا عَلَى نُقْطَةِ ك فتَكونُ قَوْسُ ا؟ط مُساوِيَةً لِقَوْسِ ه؟د وقَوْسُ ط؟ح لِقَوْسِ ه؟ز؛ وَلأنّ زاوِيَتَيْ ب؟ج؟ا ا؟ح؟ط إمّا مُتَساوِيتانِ[٧] وإمّا مُساوِيَتانِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ إذا جُمِعَتا؛ يَكونُ نَظيرُ قَوْسِ ج؟ك مُساوِياً[٨] لِنَظيرِ قَوْسِ ك؟ح؛ ولأنّ الصورَةَ عَلَى ما هِيَ عَلَيْهِ، تَكونُ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ط؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ك؟ح مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ط؟ا إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب، ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟ك؛ وَلَكِنَّ نَظيرَ قَوْسِ ج؟ك مُساوٍ لِنَظيرِ قَوْسِ ك؟ح، فتَكونُ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ح؟ط إلَى نَظيرِ قَوْسِ ك؟ج مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ط؟ا إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب، ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟ك؛ وَنَجْعَلُ ب؟ج وَسَطاً في النِسْبَةِ بَيْنَ ح؟ط وَ ج؟ك؛ فتَكونُ أيْضاً نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ح؟ط إلَى نَظيرِ قَوْسِ /[**84و**] ج؟ك مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ح؟ط إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟ب، ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ج؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟ك، فَإذا طَرَحْنا نِسْبَةَ نَظيرِ قَوْسِ ج؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟ك مِنْ كِلْتا[٨] النِسْبَتَيْنِ تَبْقَى نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ح؟ط إلَى نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ط؟ا إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب. وَإذا بَدَّلْنا أيْضاً تَكونُ مُتَناسِبَةً؛ وَلَكِنَّ قَوْسَ ط؟ح مُساوِيَةٌ لِقَوْسِ ه؟ز، وَقَوْسُ ا؟ط مُساوِيَةٌ لِقَوْسِ ه؟د، فَنِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ج؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب

[44] C.-à-d., comme le cas précédent (proposition n° 35).
[45] Il s'agit d'une simplification.

tionnels ; mais l'arc IH est égal à l'arc EG et l'arc AI est égal à l'arc ED, donc le rapport de l'homologue de l'arc CB à l'homologue de l'arc AB est égal au rapport de l'homologue de l'arc EG à l'homologue de l'arc ED.

<*Réciproquement*> De même, supposons que l'angle qui est au point A soit égal à l'angle qui est au point D et que le rapport de l'homologue de l'arc CB à l'homologue de l'arc AB soit égal au rapport de l'homologue de l'arc EG à l'homologue de l'arc ED.

Je dis que les deux angles qui sont aux deux points C et G sont soit égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits.

*Démonstration* : si nous procédons comme précédemment, le rapport de l'homologue de l'arc CB à l'homologue de l'arc AB est comme le rapport de l'homologue de HI à l'homologue de AI et si nous permutons ils restent également proportionnels ; puisque la figure reste inchangée, l'homologue de l'arc HK est égal à l'homologue de l'arc KC et par suite, les deux angles IHA et ACB qui sont aux deux points C et G sont soit égaux, soit d'une somme égale à deux angles droits. C'est ce que nous voulions montrer. »

كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ه؟ز إلَى نَظيرِ قَوْسِ ه؟د. وأيْضاً فَإنّا نَجْعَلُ الزاوِيَةَ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ ا مُساوِيَةً لِلزاوِيَةِ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ د، وَلْتَكُنْ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ج؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ه؟ز إلَى نَظيرِ قَوْسِ ه؟د. فَأقولُ إنّ الزاوِيَتَيْنِ اللّتَيْنِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ج ز إمّا مُتَساوِيَتانِ[٩] وإمّا مُساوِيَتانِ <إذا جُمِعَتا> لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ. وَبُرْهانُهُ، أنّا إذا عَمِلْنا مِثْلَ العَمَلِ المُتَقَدِّمِ كانَتْ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ج؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب كَنِسْبَةِ نَظيرِ ح؟ط إلَى نَظيرِ ا؟ط، وإذا بَدَّلْنا كانَتْ أيْضاً مُتَناسِبَةً؛ فَإذا كانَتِ الصورَةُ عَلَى ما هِيَ عَلَيْهِ فَإنّ نَظيرَ قَوْسِ ح؟ك يَكونُ مُساوِياً لِنَظيرِ قَوْسِ ك؟ج، وتَكونُ لِذَلِكَ زاوِيَتا ط؟ح؟ا ا؟ج؟ب اللّتانِ هُما الزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ج ز إمّا مُتَساوِيَتَيْنِ[١٠] وإمّا مُساوِيَتَيْنِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ إذا جُمِعَتا؛ وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّنَ.

**[١]. يتبيّن من هذا وممّا يلي أنّ المقصود زاويتان مساويتان لِزاويتين قائمتين إذا جُمِعتا وذلك على الرغم من تكرار الخطأ المتمثّل باستعمال كلمة "قائمتان" عِوضاً عن كلمة "متساويتان"؛ [٢]. الزاويتين : الزاويتان؛ [٣]. الأُخريين المتساويتين : القائمتين؛ [٤]. نقطتي : نقطة؛ [٥]. زاي : دال؛ [٦]. ج؟ا؟ح ب؟ا؟ط: ج؟ا؟ج ب؟ا؟ط؛ [٧]. متساويتان : قائمتين؛ [٨]. وضع الناسخ إشارة فوق كلمة "مساويا" وكتب على الهامش : "تبيّن ذلك في الشكل الثالث من هذا الفصل إذاً تدبّر."؛ [٨]. كلتا: كلتي؛ [٩]. متساويتان : قائمتان؛ [١٠]. متساويتين : قائمتين.**

**§ 12 - <Proposition n° 37>** (*Les Sphériques* d'Ibn Hūd) [Ibn Hūd, folios $84^r$-$84^v$], (voir la Fig. h5).

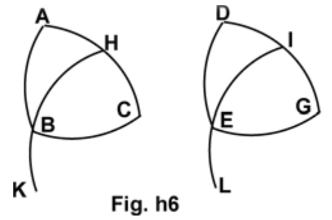
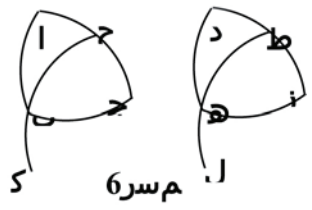



Fig. h6




رسم 6

Si deux figures trilatères sont telles que deux angles <respectifs> parmi leurs angles à la base, sont égaux chacun à un angle droit et si les deux angles restants à la base sont égaux et non droits, le rapport des deux homologues des deux côtés entourant l'angle droit de l'une des deux figures, l'un à l'autre, est alors composé du rapport correspondant des deux homologues des deux côtés entourant l'angle droit de l'autre figure, l'un à l'autre, et du rapport de l'homologue de l'arc qui est entre le point du sommet de la première figure et le pôle de sa base, à l'homologue de l'arc, qui est entre le point du sommet de l'autre figure et le pôle de sa base.

<*Exemple*> :

soient deux figures trilatères *ABC* et *DEG*. Que les deux angles qui sont aux deux points A et D soient droits, que les deux angles qui sont aux

**يب** <شَكْل رقم ٣٧> (رسم ٥)

إذا كانَ شَكْلانِ ذَوا ثَلاثَةِ أضْلاعٍ، وكانَتْ زاوِيَتانِ من زَواياهما الّتي عَلَى القاعِدَةِ، كلُّ واحِدَةٍ مِنْهُما قائِمَةً، وَكانَتِ الزاوِيَتانِ الباقِيَتانِ مِنَ الزَوايا الّتي عَلَى القاعِدَةِ[1] مُتَساوِيتَيْنِ غَيْرَ قائِمَتَيْنِ، فَإنّ نِسْبَةَ نَظيرَيِ الضِلْعَيْنِ المُحيطَيْنِ بِالزاوِيَةِ القائِمَةِ مِن أحَدِ الشَكْلَيْنِ، أحَدُهُما إلَى الآخَرِ، مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ نَظيرَيِ الضِلْعَيْنِ المُحيطَيْنِ بِالزاوِيَةِ القائِمَةِ مِنَ الشَكْلِ الآخَرِ، أحَدُهُما إلَى الآخَرِ، إذا ما أُخِذَتْ عَلَى ما أُخِذَت عَلَيْهِ النِسْبَةُ الأُولَى، ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ القَوْسِ الّتي تَكونُ فيما بَيْنَ نُقْطَةِ رَأسِ الشَكْلِ الأوّلِ وبَيْنَ قُطْبِ قاعِدَتِهِ إلَى نَظيرِ القَوْسِ الّتي تَكونُ فيما بَيْنَ نُقْطَةِ رأسِ الشَكْلِ الآخَرِ وبَيْنَ قُطْبِ قاعِدَتِهِ.

<مِثالُ ذَلِكَ>: فَلْيَكُنْ شَكْلانِ ذَوا ثَلاثَةِ أضْلاعٍ، عَلَيْهِما ا ب ﺟ د ه ز، وَلْتَكُنِ الزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ

deux points *C* et *G* soient égaux et non droits et que *H* et *I* soient les deux pôles <respectifs> des deux arcs *AC* et *DG*.

Je dis que le rapport de l’homologue de l’arc *AB* à l’homologue de l’arc *AC* est composé du rapport de l’homologue de l’arc *ED* à l’homologue de l’arc *DG* et du rapport de l’homologue de l’arc *BH* à l’homologue de l’arc EI.

*Démonstration* : posons l’arc *CK* égal à l’arc *DG* et menons l’arc *HK* <qui rencontre *BC* en L>. L’arc *KL* est égal à l’arc *DE* et l’arc *LH* est égal à l’arc *EI*, mais puisque la figure reste inchangée, le rapport de l’homologue de l’arc *AB* à l’homologue de l’arc *BH* est composé du rapport de l’homologue de l’arc *AC* à l’homologue de l’arc *CK* et du rapport de l’homologue de l’arc *KL* à l’homologue de l’arc *LH*, et le rapport de l’homologue de l’arc *BA* à l’homologue de l’arc *CA* est composé du rapport de l’homologue de l’arc *BH* à l’homologue de l’arc *LH* et du rapport de l’homologue de l’arc *LK* à l’homologue de l’arc *KC*, d’après le quatrième cas parmi les 18 cas de composition des rapports. Mais l’arc *KC* est égal à l’arc *DG*, l’arc *KL* est égal à l’arc *DE* et l’arc *LH* est égal à *EI*. Donc le rapport de l’homologue de l’arc *AB* à l’homologue de l’arc *AC* est composé du rapport de l’homologue de l’arc *ED* à l’homologue de l’arc *DG* et du rapport de

نُقْطَتَيْ ا د مِنْهُما قائِمَتَيْنِ، وَلْتَكُنِ الزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ جز مُتَساوِيتَيْنِ غَيْرَ قائِمَتَيْنِ، وَلْيَكُنْ قُطْبا قَوْسَيْ ا؟جد؟ز نُقْطَتَيْ ح ط. فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟ج مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ه؟د إلَى نَظيرِ قَوْسِ د؟ز ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ه؟ط. وبُرْهانُ ذَلِكَ: أنّا نَجْعَلُ قَوْسَ ج؟ك مُساوِيَةً لِقَوْسِ د؟ز ونُخْرِجُ قَوْسَ ح؟ك <لِتَلْقَى ب؟ج عَلَى نُقْطَةِ ل>[٢]، فتَكونُ قَوْسُ ك؟ل مُساوِيَةً[٣] لِقَوْسِ د؟ه وقَوْسُ ل؟ح لِقَوْسِ ه؟ط، وَلَكِنْ مِنْ أجْلِ أنّ الصورَةَ عَلَى ما هِيَ عَلَيْهِ، تَكونُ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ب؟ح مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ا؟ج إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟ك ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ك؟ل إلَى نَظيرِ قَوْسِ ل؟ح، وتَكونُ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ا إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟ا مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ل؟ح ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ل؟ك إلَى نَظيرِ قَوْسِ ك؟ج[٤]، لأنّهُ الوَجْهُ الرابِعُ مِن الوُجوهِ الثَمانِيَةِ عَشَرَ في تَأليفِ النِسْبَةِ، وَلَكِنّ قَوْسَ ك؟ج مُساوِيَةٌ لِقَوْسِ د؟ز وقَوْسُ ك؟ل لِقَوْسِ د؟ه وقَوْسُ ل؟ح لِقَوْسِ ه؟ط، فنِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟ج مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ه؟د إلَى نَظيرِ قَوْسِ د؟ز، ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ه؟ط، ومِنَ البَيِّنِ أيْضاً أنّ نِسْبَةَ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟ا مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ

l'homologue de l'arc *BH* à l'homologue de l'arc *EI*. Il est clair aussi que le rapport de l'homologue de l'arc *BC* à l'homologue de l'arc *CA* est composé du rapport /[**84**v] de l'homologue de l'arc *EG* à l'homologue de l'arc *DG* et du rapport de l'homologue de l'arc *BH* à l'homologue de l'arc *EI*, parce que, si nous inversons le premier rapport, le rapport de l'homologue de *CA* à l'homologue de l'arc *AB* sera égal au rapport de l'homologue de *DG* à l'homologue de *DE* multiplié par le rapport de l'homologue de *EI* à l'homologue de *BH*.

Si nous ajoutons[46] aux deux rapports équivalents le rapport de l'homologue de *AB* à l'homologue de *BC* qui est égal - comme l'on a montré dans la proposition précédente - au rapport de l'homologue de *DE* à l'homologue EG, le rapport de l'homologue de *CA* à l'homologue de *AB* multiplié par le rapport de l'homologue de *AB* à l'homologue de *BC*, qui est égal au rapport de l'homologue de *AC* à l'homologue de *BC*, devient équivalent au rapport de l'homologue de l'arc *DG* à l'homologue de *DE* multiplié par le rapport de l'homologue de *DE* à l'homologue de *EG*, qui est égal au rapport de l'homologue de l'arc *DG* à l'homologue de *GE*, multiplié par le rapport de l'homologue de *EI* à l'homologue de *BH*, il reste alors le

/[**84ظ**] نَظيرِ قَوْسِ ه؟ز إلَى نَظيرِ قَوْسِ د؟ز، ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ه؟ط، وذَلِكَ أنّا إذا قَلَبْنا النِسْبَةَ الأُولَى، كانَتْ نِسْبَةُ نَظيرِ ج؟ا إلَى نَظيرِ ا؟ب كَنِسْبَةِ نَظيرِ د؟ز إلَى نَظيرِ د؟ه مُثَنّاة بنِسْبَةِ نَظيرِ ه؟ط إلَى نَظيرِ ب؟ح. فإذا زِدْنا عَلَى النِسْبَتَيْنِ المتعادلتَيْنِ نِسْبَةَ نَظيرِ ا؟ب إلَى ب؟ج الّتي هِيَ، عَلَى ما قَدْ[٥] تَبَيَّنَ ذَلِكَ في الشَكْلِ الّذي قَبْلَ هَذا، كَنِسْبَةِ[٦] نَظيرِ د؟ه إلَى نَظيرِ ه؟ز، كانَتْ نِسْبَةُ نَظيرِ ج؟ا إلَى نَظيرِ ا؟ب مُثَنّاة بنِسْبَةِ نَظيرِ ا؟ب إلَى نَظيرِ ب؟ج الّتي هِيَ كَنِسْبَةِ[٧] نَظيرِ ا؟ج إلَى نَظيرِ ب؟ج، مُعادِلَةً لِنِسْبَةِ نَظيرِ د؟ز إلَى نَظيرِ د؟ه مُثَنّاة بنِسْبَةِ نَظيرِ د؟ه إلَى نَظيرِ ه؟ز الّتي هِيَ كَنِسْبَةِ نَظيرِ د؟ز إلَى نَظيرِ ز؟ه مُثَلَّثَةً بنِسْبَةِ نَظيرِ ه؟ط[٨] إلَى نَظيرِ ب؟ح[٩] فَتَبْقَى نِسْبَةُ نَظيرِ ا؟ج إلَى نَظيرِ ج؟ب كَنِسْبَةِ نَظيرِ د؟ز إلَى نَظيرِ ه؟ز مُثَنّاة بنِسْبَةِ نَظيرِ ه؟ط إلَى نَظيرِ ح؟ب، فإذا قَلَبْنا النِسْبَةَ، كانَت نِسْبَةُ نَظيرِ ب؟ج إلَى نَظيرِ ج؟ا كَنِسْبَةِ نَظيرِ ه؟ز إلَى نَظيرِ ز؟د مُثَنّاة بنِسْبَةِ نَظيرِ ح؟ب إلَى نَظيرِ ط؟ه. وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّنَ.

[46] Il s'agit d'une multiplication.

[١] . كلّ واحدةٍ منهما قائمة، وكانت الزاويتان الباقيتان من الزوايا على القاعدة : أضافها الناسخ على الهامش؛[٢] . إضافة هذه الجملة تجعل النصّ سويّاً؛[٣] . مساوية : وضع الناسخ فوقها إشارة وكتب على الهامش "تبيّن ذلك

rapport de l'homologue de *AC* à l'homologue de *CB* égal au rapport de l'homologue de *DG* à l'homologue de *EG*, multiplié par le rapport de l'homologue de *EI* à l'homologue de *HB* ; si nous inversons le rapport, le rapport de l'homologue de *BC* à l'homologue de *CA* devient égal au rapport de l'homologue de *EG* à l'homologue de *GD* multiplié par le rapport de l'homologue de *HB* à l'homologue de *IE*. C'est ce que nous voulions montrer. »

**في الشكل الرابع من هذا الفصل "؛[٤] . كاف : أثبتها الناسخ على الهامش؛[٥] . على ما قد : أضيفت فوق السطر؛[٦] . أُضيفَتْ على الهامِشِ؛[٧] . وَضَعَ الناسِخُ إشارَةً فَوْقَ كَلِمَةِ "كنسبةِ" وَكَتَبَ على الهامِشِ : من أجْلِ أنّ نَظيرَ ألف با وَسَطٌ في النِسْبَةِ <بين نظيرَي> ألف جيم، جيم با؛[٨] . ها طا : با ها؛[٩] . با حا : ها طا؛**

## § 13 - <Proposition n° 38> (*Les Sphériques* d'Ibn Hūd) [Ibn Hūd, folio 84v], (voir la Fig. h6).

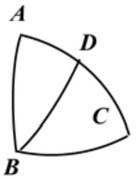



Fig. 7

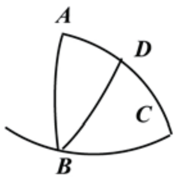



Fig. 7a

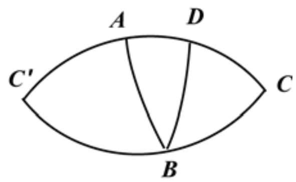



Fig. 7b

Si deux figures trilatères sont telles que leurs angles à la base soient respectivement égaux et non droits, alors si l'on mène des sommets les deux hauteurs de deux figures, les homologues des arcs découpés sur les deux bases sont proportionnels.

<*Exemple* :>

soient *ABC* et *DEG* deux figures trilatères. Que l'angle en A soit égal à l'angle en D, que l'angle en C soit égal à l'angle en G et qu'aucun de

**يج** <شَكْل رقم ٣٨> **(رسم ٦)**

إذا كانَ شَكْلانِ ذَوا[١] ثَلاثَةِ أضْلاعٍ، وكانَتْ زَواياهما الّتي عَلَى القاعِدَةِ مُتَساوِيةً، كُلُّ زاوِيَةٍ لِنَظيرَتِها، وَلَمْ تَكُنْ زاوِيَةٌ مِنها قائِمَةً، وأُخْرِجَ عَمودا الشَكْلَيْنِ مِن نُقْطَتَيْ رَأسَيْهِما، فَإنّ نَظائِرَ القِسِيِّ الّتي تَنْفَصِلُ مِنَ القاعِدَتَيْنِ تَكونُ مُتَناسِبَةً.

<مِثالُ ذَلِكَ>: فَلْيَكُنْ شَكْلانِ ذَوا ثَلاثَةِ أضْلاعٍ عَلَيْهِما، ا ب ﺟ د ﻫ ز. وَلْتَكُنِ الزاوِيَةُ الّتي عِنْدَ <نُقْطَةِ> ا مُساوِيَةً لِلزاوِيَةِ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ د،

ces angles ne soit droit. Menons des deux points *B* et *E* deux perpendiculaires respectives aux bases *AC* et *DG*, soient *BH* et *EI*.

Je dis que le rapport de l'homologue de l'arc *AH* à l'homologue de l'arc *HC* est égal au rapport de l'homologue de l'arc *DI* à l'homologue de l'arc *IG*.

*Démonstration* :

posons les pôles des deux arcs *AC* et *DG* les deux points respectifs *K* et *L*. Puisque les deux angles aux points *H* et *I* sont droits et les deux angles aux deux points *C* et *G* sont égaux et non droits, le rapport de l'homologue de l'arc *CH* à l'homologue de l'arc *GI* est alors composé du rapport de l'homologue de l'arc *BH* à l'homologue de l'arc EI et du rapport de l'homologue de l'arc *EL* à l'homologue de l'arc *BK*, de sorte que le rapport de l'homologue de l'arc *AH* à l'homologue de l'arc *DI* est égal au rapport de l'homologue de l'arc *CH* à l'homologue de l'arc *GI* ; si on permute ils seront également proportionnels. C'est ce que nous voulions montrer. /[**85**[r]]

والزاوِيَةُ الّتي عِنْدَ ج مِثْلُ الزاوِيَةِ الّتي عِنْدَ ز، ولا تَكونُ واحِدَةٌ مِن هَذِهِ الزَوايا قائِمَةً. ولنُخْرِجْ مِنْ نُقْطَتَيْ ب ه عَمودَيْنِ عَلَى قاعِدَتَيْ ا؟ج د؟ز وَهُما ب؟ح ه؟ط. فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ نَظيرِ قَوْسِ ا؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ح؟ج كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ د؟ط إلَى نَظيرِ قَوْسِ ط؟ز. وبُرْهانُ ذَلِكَ أنّا نَجْعَلُ قُطْبَيْ قَوْسَيْ ا؟ج د؟ز نُقْطَتَيْ ك ل. فَلأنّ الزاوِيَتَيْنِ اللّتَيْنِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ح ط قائِمَتانِ، والزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ج ز مُتَساوِيتانِ وَلَيْسَتا بِقائِمَتَيْنِ، تَكونُ نِسْبَةُ[٢] نَظيرِ قَوْسِ ج؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ز؟ط مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ه؟ط [مُؤَلَّفَة مِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ه ط][٣]، ومِنْ نِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ه؟ل إلَى نَظيرِ قَوْسِ ب؟ك. وتَكونُ لِذَلِكَ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ا؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ د؟ط كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ج؟ح إلَى نَظيرِ قَوْسِ ز؟ط، وإذا بَدَّلْنا أيْضاً[٤] تَكونُ مُتَناسِبَةً. وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّنَ./ **[85و]**

**١ . ذوا : ذواتا؟ ٢ . وُضِعَتْ إشارَةٌ فَوْقَ كَلِمَةِ "نسبة" وكُتِبَ على الهامِشِ : هذا هو الوَجْهُ التاسِعُ من الوُجوهِ الثَمانِيَةِ عَشَرَ في تَأليفِ النِسْبَةِ؟ ٣ . تكرار في النسخ ينبغي حذفه؟ ٤ . وإذا بدّلنا أيضا : أُثْبِتَت على الهامِشِ بعد أن ضُرِبَ بالريشَةِ فوق العبارة التي وردت في النصّ خطأً.**

**§ 14 - <Proposition n° 39>** (*Les Sphériques* d'Ibn Hūd) [Ibn Hūd, folio 85r], (voir : Fig. h7 et Fig. h7a).

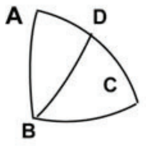



Fig. h7

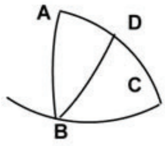
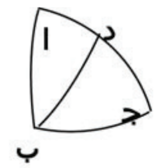
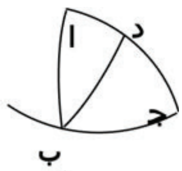



Fig. h7a




رسم ٧




رسم ٧أ

Si, sur la surface de la sphère, un angle d'une figure trilatère, ou l'angle qui lui succède[47], est divisé en deux moitiés <par un arc de grand cercle>, alors les deux rapports des homologues de deux côtés <qui entourent l'angle> aux homologues des deux arcs découpés à la base sont égaux. La réciproque et la permutation sont valables également.

<*Exemple* :> soit une figure trilatère *ABC*. Que l'arc *BD* divise l'angle qui est au point B en deux moitiés.

Je dis que le rapport de l'homologue de l'arc *AB* à l'homologue de l'arc *AD* est égal au rapport de l'homologue de l'arc BC à l'homologue de l'arc *CD*.

*Démonstration* (voir la Fig. h7) :puisque l'angle *ABD* est égal à l'angle *CBD* et que la somme des deux angles qui sont au point *D* est égale à deux droits, le rapport de l'homologue de l'arc *BA* à l'homo-

**يد** <شَكْل رقم ٣٩>

إذا قُسِمَتْ زاوِيَةٌ مِن زَوايا شَكْلٍ ذي ثَلاثَةِ أضْلاعٍ عَلَى بَسيطِ كُرَةٍ أو الّتي تَليها[1] بنِصْفَيْنِ <بِقَوْسٍ من دائِرَةٍ عَظيمة>. فإنّ نِسْبَتَيْ[2] نَظيرَي الضِلْعَيْنِ إلَى نظيرَيْ قَوْسَي القاعِدَةِ نِسْبَتانِ مُتَساوِيَتانِ وعَكْسُ<ذَلِكَ> أيْضاً، وعلى الإبْدالِ أيْضاً. <مِثالُ ذَلِكَ>: فَلْيَكُنْ شَكْلٌ ذو ثَلاثَةِ أضْلاعٍ عَلَيْهِ ا ب ج. وَلتَقْسِمْ قَوْسُ ب؟د الزاوِيَةَ الّتي عِنْدَ نُقْطَةِ ب بِنِصْفَيْنِ. فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب إلَى [إلى][3] نَظيرِ قَوْسِ ا؟د كَنِسْبَةِ[4] نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟د. وبُرْهانُ ذَلِكَ: لأنّ زاوِيَةَ ا؟ب؟د مِثْلُ زاوِيَةِ ج؟ب؟د والزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَةِ د إذا جُمِعَتا مِثْلُ قائِمَتَيْنِ. فنِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ا إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟د كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج إلَى نَظيرِ قَوْسِ ج؟د. وإذا بَدَّلْنا تَكونُ مُتَناسِبَةً. وإنْ كانَتْ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ ا؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ ا؟د إلَى نَظيرِ قَوْسِ

[47] C'est-à-dire, l'angle supplémentaire adjacent.

logue de l'arc *AD* est égal alors au rapport de l'homologue de l'arc BC à l'homologue de l'arc *CD* ; si on permute, ils seront également proportionnels.

Si le rapport de l'homologue de l'arc *AB* à l'homologue de l'arc *BC* est égal au rapport de l'homologue de l'arc *AD* à l'homologue de l'arc *DC*, je dis que l'arc *BD* divise l'angle *ABC* en deux moitiés.

*Démonstration* (voir la Fig. h7) : puisque la somme des deux angles qui sont en *D* est égale à deux angles droits et le rapport de l'homologue de *AB* à l'homologue de *AD* est égal au rapport de l'homologue de *BC* à l'homologue de *CD*, et la somme de deux angles qui sont en *B* n'est pas égale à deux droits, l'angle *ABD* est égal donc à l'angle *DBC*.

Que l'angle qui succède à l'angle *DBC*, dans le triangle *DBC*, soit également divisé en deux moitiés par l'arc *AB*. (Voir la Fig. h7a)

Je dis que le rapport de l'homologue de l'arc *DB* à l'homologue de l'arc *BC* est égal au rapport de l'homologue de l'arc *DA* à l'homologue de l'arc *AC* et réciproquement aussi.

*Démonstration* (voir la Fig. h7a) : puisque l'angle *A* est commun aux deux triangles *ABD* et *ABC* et que la somme des deux angles *DBA* et *CBA* est égale à deux angles droits, le rapport de l'homologue de l'arc *DB* à l'homologue de l'arc *BC* est égal alors au rapport de l'homologue de l'arc *DA* à l'homologue de l'arc *DC*. La réciproque est évidente. C'est ce que nous voulions montrer.

د؟ج، فَأقولُ إنّ قَوْسَ ب؟د قَسَمَتْ زاوِيَةَ ا؟ب؟ج بِنِصْفَيْنِ. بُرْهانُهُ: لأنّ الزاوِيَتَيْنِ اللّتَيْنِ عِنْدَ د مِثْلُ قائِمَتَيْنِ ونِسْبَةُ نَظيرِ ا؟ب إلَى نَظيرِ ا؟د كَنِسْبَةِ نَظيرِ ب؟ج إلَى نَظيرِ [ب][5] ج؟د وَلَيْسَتِ الزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ ب إذا جُمِعَتا بِمُساوِيَتَيْنِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ، فزاوِيَةُ ا؟ب؟د مِثْلُ زاوِيَةِ د؟ب؟ج. وأيْضاً فَلتَكُنِ الزاوِيَةُ الّتي تَلي زاوِيَةَ د؟ب؟ج مِنْ مُثَلَّثِ د؟ب؟ج مَقْسومَةً بِنِصْفَيْنِ بقَوْسِ ا؟ب. فَأقولُ: إنّ نِسْبَةَ نَظيرِ قَوْسِ د؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ د؟ا إلَى نَظيرِ قَوْسِ ا؟ج، وعَكْسُ ذَلِكَ أيْضاً. بُرْهانُهُ: لأنّ زاوِيَةَ ا مُشْتَرَكَةٌ لِمُثَلّثَيْ ا؟ب؟د ا؟ب؟ج وَزاوِيَتا د؟ب؟ا ج؟ب؟ا مَجْموعَتانِ مُساوِيَتانِ لِزاوِيَتَيْنِ قائِمَتَيْنِ، فتَكونُ لِذَلِكَ نِسْبَةُ نَظيرِ قَوْسِ د؟ب إلَى نَظيرِ قَوْسِ ب؟ج كَنِسْبَةِ نَظيرِ قَوْسِ د؟ا إلَى نَظيرِ قَوْسِ د؟ج. وأمّا عَكْسُ ذَلِكَ فَبَيِّنٌ. وذَلِكَ ما أرَدْنا أنْ نُبَيِّنَ.

**١. تليها : تتلوها؛ ٢. نسبتي : نسبتا؛ ٣. الى: كلمة زائدة ينبغي حذفها؛ ٤. وُضعت إشارة فوق كلمة "كنسبة" وكُتب على الهامش : وتبيّن هذا في الشكل الحادي عشر من هذا الفصل وفيه تبيّن عكسه؛ ٥. با : حرف زائد ينبغي حذفه؛**

# IV. PROPOSITION III. 5 DE MÉNÉLAÜS

***Énoncé :***

Soient ABC et DEG deux triangles sphériques de côtés respectifs : *a = arc(BC), b = arc(AC), c = arc(AB) et d = arc(EG), e = arc(DG), g = arc(DE)*.

Si les triangles considérés vérifient les conditions :

1) *angle(A) = angle(D) = drt,*
2) *angle(C) = angle(G) < drt,*
3) chacun de deux côtés *b = arc(AC)* et *e = arc(DG),* est plus petit qu'un quart d'une circonférence de grand cercle de la sphère,

alors l'égalité (1) est satisfaite.

$$(1) \qquad \frac{Sin(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CA})}{Sin(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{CA})}=\frac{Sin(\overset{\frown}{EG}+\overset{\frown}{GD})}{Sin(\overset{\frown}{EG}-\overset{\frown}{GD})}.$$

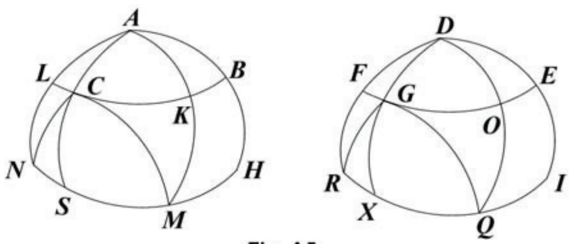



Fig. A5

***Analyse***

Explicitons tout d'abord le sens « trigonométrique » de l'égalité (1)[48] :

Nous avons :

[48] L'hypothèse entraine que l'angle *B* est aigu, mais l'angle *C* est également aigu ; par suite *a > b et a > c* ; de même les angles *E* et *G* sont aigus, par suite *d > e* et *d > g;* en effet, si par exemple l'angle *B* n'était pas aigu, l'arc de grand cercle qui est perpendiculaire en *B* à *arc*(*AB)*, devrait couper *arc*(*AC*) en un point *C'* de telle manière que *arc*(*AC*) soit plus grand ou égal à *arc*(*AC'*) qui est égal à un quadrant de grande circonférence ; ce qui contredit l'hypothèse.

$$(1)\ \Leftrightarrow\ \frac{Sin(a+b)}{Sin(a-b)}=\frac{Sin(d+e)}{Sin(d-e)}\ \Leftrightarrow\ \frac{\frac{tg\ a}{tg\ b}+1}{\frac{tg\ a}{tg\ b}-1}=\frac{\frac{tg\ d}{tg\ e}+1}{\frac{tg\ d}{tg\ e}-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{tg\ a}{tg\ b}=\frac{tg\ d}{tg\ e}.$$

Concrètement, nous obtenons

$$\frac{tg\ a}{tg\ b}=\frac{tg\ d}{tg\ e}=\frac{1}{cos(angle(C))}.$$

C.-à-d.

$$ctg\ a = ctg\ b\ .\ cos\ (angle(C)).$$

La démonstration de Ménélaüs se développe de la manière suivante (voir la Fig. A5) : il construit sur la circonférence de grand cercle portant l'arc *CB*, les deux points *K* et *L* de sorte que

$$arc(CL) = arc(CK) = arc(CA).$$

Par analogie, pour le deuxième triangle, il construit les deux points *O* et *F* sur la circonférence de grand cercle portant l'arc *GE* de sorte que

$$arc(GF) = arc(GO) = arc(GD).$$

La forme de l'égalité à démontrer (1), devient alors :

$$\frac{Sin\,\overset{\frown}{LB}}{Sin\,\overset{\frown}{KB}}=\frac{Sin\,\overset{\frown}{FE}}{Sin\,\overset{\frown}{OE}}$$

Ménélaüs considère ensuite la circonférence de grand cercle décrit autour du point *C* choisi comme pôle.

Il suppose que les prolongements de *arc(AL), arc(AC), arc(AK)* et *arc(AB)* coupent cette circonférence, respectivement aux points *N, S, M* et *H*. Le point *H* est alors le pôle de *arc(ACS)*, car *angle(ASH)* et *angle(HAS)* sont des angles droits.

Il joigne *arc(CM)* et *arc(CN)*; chacun de ces deux arcs est un quadrant. Alors *angle(KCM)* est égal à *angle(MCS)*[49] et *angle(LCN)* est égal à *angle(NCS)*. Par analogie, pour l’autre figure duale, *angle(EGQ)* est égal à *angle(QGX)* et *angle(FGR)* est égal à *angle(RGX)*. D’autre part, *angle(MCS)* est égal à *angle(QGX)* et *angle(NCS)* est égal à *angle(RGX)*, car *angle(C)* est égal à *angle(G)*.

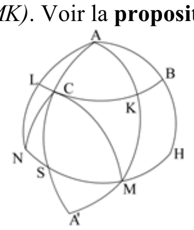
Mais puisque les points *C* et *G* sont les pôles respectifs de *arc(NH)* et *arc(RI),* nous avons *arc(MS)* est égal à *arc(XQ)* et *arc(NS)* est égal à *arc(RX)*; donc *arc(MH)* est égal à *arc(QI)*.

Ensuite Ménélaüs introduit, sans justification, la propriété de rapport anharmonique de quatre circonférences de grands cercles qui passent par le point *A* de la surface sphérique.

Dans le cas considéré, ces circonférences sont celles qui portent *arc(AN), arc(AS), arc(AM)* et *arc(AH)* et qui coupent les circonférences portant *arc(LB)* et *arc(NH)*. L’invariance du rapport anharmonique s’exprime alors sous la forme :

---

[49] En effet. Soit *A’* le point d’intersection de *arc(ACS)* et *arc(AKM)*, qui est le point diamétralement opposé à *A*. Dans le triangle *CKA’*, la somme *arc(KC) + arc(CA’)* est égale alors à une demi-circonférence de grand cercle (car *arc(CK) = arc(CA)*), *arc(CK)* est plus petit qu’un quadrant et *arc(CM)* et un quadrant; donc *angle(KCM) = angle(MCS)* et *arc(A’M) = arc(MK)*. Voir la **proposition I. 29,** dans [Ibn ‘Irāq, MSb, folios 13$^{v}$-14$^{r}$]:




**Proposition I. 29** : Si la somme de deux cotés d’une figure trilatère est égale à une demi-circonférence de <grand> cercle, alors l’arc <de grand cercle> qui divise en deux moitiés l’angle entouré par les deux côtés, divise également la base en deux moitiés et il est un quadrant ; et si un arc <de grand cercle> relie le milieu de la base au sommet du triangle, il divise cet angle-là en deux moitiés et il est un quadrant.

"**الشَكْلُ التاسِعُ والعِشْرون** : إذا كانَ ضِلْعانِ مِنْ شَكْلٍ ذي ثَلاثَةِ أضْلاعٍ، إذا جُمِعا، مُساوِيَيْنِ لِنِصْفِ دائِرَةٍ، فإنّ القَوْسَ الَّتي تَقْسِمُ /[**14و**] الزاوِيَةَ الَّتي يُحيطُ بِها الضِلْعانِ بِنِصْفَيْنِ، هِيَ تَقْسِمُ القاعِدَةَ أيْضاً بِنِصْفَيْنِ، وَهِيَ رُبْعُ دائِرَةٍ. وإذا وُصلَتْ قَوْسٌ فيما بَيْنَ نُقْطَةِ النِصْفِ مِنَ القاعِدَةِ وَبَيْنَ نُقْطَةِ رَأسِ المُثَلَّثِ، فإنّها تَقْسِمُ تِلْكَ الزاوِيَةَ بِنِصْفَيْنِ وَهِيَ رُبْعٌ."

$$(2)\quad \frac{Sin\overset{\frown}{LB}}{Sin\overset{\frown}{KB}}\,\frac{Sin\overset{\frown}{CK}}{Sin\overset{\frown}{LC}}=\frac{Sin\overset{\frown}{NH}}{Sin\overset{\frown}{MH}}\,\frac{Sin\overset{\frown}{SM}}{Sin\overset{\frown}{NS}}\,.$$

En utilisant l'identité

$$\frac{Sin\overset{\frown}{LB}}{Sin\overset{\frown}{KB}}=\frac{Sin\overset{\frown}{LB}}{Sin\overset{\frown}{CL}}\,\frac{Sin\overset{\frown}{CL}}{Sin\overset{\frown}{CK}}\,\frac{Sin\overset{\frown}{CK}}{Sin\overset{\frown}{KB}}$$

et l'égalité *arc(CL) = arc(CK),* Ménélaüs trouve la relation

$$\frac{Sin\overset{\frown}{LB}}{Sin\overset{\frown}{KB}}=\frac{Sin\overset{\frown}{LB}}{Sin\overset{\frown}{CL}}\,\frac{Sin\overset{\frown}{CK}}{Sin\overset{\frown}{KB}}$$

et d'après la proportion (2), il déduit l'égalité

$$\frac{Sin\overset{\frown}{LB}}{Sin\overset{\frown}{KB}}=\frac{Sin\overset{\frown}{NH}}{Sin\overset{\frown}{NS}}\,\frac{Sin\overset{\frown}{MS}}{Sin\overset{\frown}{MH}}\,.$$

De la même manière, il obtient pour la figure duale l'égalité

$$\frac{Sin\overset{\frown}{FE}}{Sin\overset{\frown}{EO}}=\frac{Sin\overset{\frown}{IR}}{Sin\overset{\frown}{RX}}\,\frac{Sin\overset{\frown}{QX}}{Sin\overset{\frown}{QI}}\,.$$

Mais

*arc(MH) = sin(QI)*, *arc(MS) = arc(QX)* et *arc(NS) = arc(RX)*.

Par suite

$$\frac{hom(BA)}{hom(AD)}=\frac{hom(BC)}{hom(CD)}\,.$$

C.Q.F.D.

**Ibn 'Irāq a écrit à propos de la démonstration de Ménélaüs** :

> Ménélaüs était vague dans la démonstration de cette proposition : soit il en avait voulu mettre le lecteur de son livre en face d'une difficulté[50], soit il

[50] Le mot douteux du texte manuscrit arabe (voir : [Ibn 'Irāq, MSb, folio 37$^r$, *l.* 10, cinquième mot] et [Ibn 'Irāq 1998, p. 69 (*l.* 24, onzième mot)]) doit se lire «إعْنات», c.-à-d. : « *Mettre quelqu'un intentionnellement en face de confusion,*

avait disposé de tout ce qu'il a eu besoin pour accomplir la démonstration qui lui paraîtrait claire d'un bref coup d'œil. (voir [Ibn 'Irāq, MSb, folio 37r, *l.* 9-12] et [Ibn 'Irāq 1998, p 69 (*l.* 24), p. 70 (*l.* 1-2)])

"فَقَد أبهَمَ مانالاوس بُرْهانَ هذا الشَكْلِ، إمّا لأنّه أحَبَّ "**إعْنات**" الناظِرِ في كِتابِهِ أو كان عِنْدَهُ سائرُ ما يُحْتاجُ إلَيْهِ في إتمامِ البُرْهانِ، يُدْرَكُ بِأدْنَى نَظَرٍ."

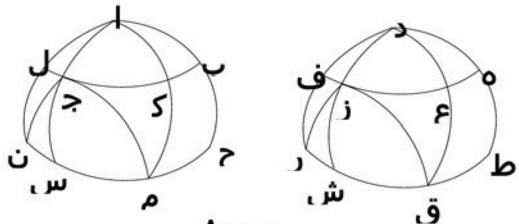
*en lui posant une question de réponse difficile et ambiguë* ». Ce mot s'utilise également comme terme médical : « *ostéoclasie* ». Il semble que Krause ait lu ce mot fautivement «**إعْتاب**», c.-à-d. : « *Acceptation de la part de blâme, de ce qui satisfait le blâmant ; sentir la culpabilité.* » Voir [Ibn Manzur 2003, vol. 10, p. 22, 294], où l'on trouve l'explication suivante :

أعْنَتَهُ: سَألَهُ عَنْ شَيْءٍ أرادَ بِهِ اللَّبْسَ عَلَيْهِ وَالـمَشَقَّةَ ؛

La racine du mot «**إعْنات**» est un verbe « أعْنَتَ » qui signifie : « poser à quelqu'un une question à propos de quelque chose qui vise à le mettre en état de confusion et de difficulté »

الإعْتاب: هُوَ رُجوعُ الـمَعْتوبِ عَلَيْهِ إلى ما يُرْضي العاتِبَ.

**Proposition III.5 (**[Ibn ‘Irāq, MSb, folios $36^{r}$-$37^{v}$], [Ibn ‘Irāq 1998, p. 68-69] (Voir la Fig. A5).



رسم٨

Si parmi les angles aux deux bases de deux figures trilatères, deux angles <respectifs> sont aigus et égaux et deux autres sont droits ; et si chacun des deux côtés qui sous-tendent les deux angles restants dans les deux figures, est plus petit qu’un quadrant de <grand> cercle, alors le rapport du Sinus de la somme de deux arcs entourant l’angle aigu égal de l’une de deux figures, au Sinus de leur différence, est comme le rapport du Sinus /[**$36^{v}$**] de la somme de deux arcs entourant l’angle aigu égal de l’autre figure, au Sinus de leur différence.

Que les deux figures trilatères soient ABC et *DEG*, que les deux angles aux deux points *A* et *D* soient droits, que les angles aux deux points *C* et *G* soient aigus et égaux, et que chacun des deux arcs *CA* et *DG* soit plus petit qu’un quadrant.

Je dis que le rapport du Sinus de la somme des deux arcs *BC* et *CA* au Sinus de la différence entre *BC* et *CA* est comme le rapport du Sinus de la somme des deux arcs *EG* et *GD* au Sinus de la différence entre *EG* et *GD*. En effet, on prolonge l’arc *BC* jusqu’à L, on pose chacun des deux arcs *CK* et *CL* égal à l’arc *AC* ; on mène les deux arcs *AK* et *AL* et on décrit autour du point *C*, choisi

"**الشَكْلُ الخامِسُ**[١]، **(رسم ٨)**

إذا كانَ شَكْلانِ ذَوا[٢] ثَلاثَةِ أضْلاعٍ وكانَتْ زاوِيَتانِ مِنَ زَواياهُما الّتي[٣] عَلَى قاعِدَتَيْهِما[٤] مُتَساوِيَتَيْنِ حادَّتَيْنِ وكانَتْ زاوِيَتانِ مِنَ الزَوايا الباقِيَةِ مِنْهُما قائِمَتَيْنِ[٥] وكانَ كُلُّ واحِدٍ[٦] مِنْ ضِلْعَيْهِما[٧] اللّذَيْنِ[٨] يُوَتِّرانِ زاوِيَتَيْهِما[٩] الباقِيَتَيْنِ أقَلَّ مِنْ رُبْعِ دائِرَةٍ فَإنَّ نِسْبَةَ جَيْبِ القَوْسَيْنِ المُحيطَتَيْنِ[١٠] بِالزاوِيَةِ الحادَّةِ المُساوِيَةِ مِنْ أحَدِ الشَكْلَيْنِ مَجْموعَتَيْنِ إلَى جَيْبِ فَضْلِ ما بَيْنَهُما كنِسْبَةِ جَيْبِ /[**٣٦ظ**] القَوْسَيْنِ المُحيطَتَيْنِ[١١] بِالزاوِيَةِ الحادَّةِ المُساوِيَةِ مِنَ الشَكْلِ الآخَرِ <مَجْموعَتَيْنِ> إلَى جَيْبِ فَضْلِ ما بَيْنَهُما. فَلْيُكُنْ شَكْلانِ ذَوا[١٢] ثَلاثَةِ أضْلاعٍ عَلَيْهُما ا؟ب؟ج د؟ه؟ز وَلْتَكُنِ الزاوِيَتانِ اللّتانِ عِنْدَ نُقْطَتَيْ ا د قائِمَتَيْنِ، والزاوِيَتانِ اللّتانِ عند نُقْطَتي ج ز مُتَساوِيَتَيْنِ حادّتَيْنِ، وَلْيَكُنْ كُلُّ واحِدَةٍ مِنْ قَوْسَيْ ج؟ا د؟ز أقَلَّ مِنْ رُبْعِ دائِرَة. فَأقولُ إنّ نِسْبَةَ جَيْبِ قَوْسَيْ ب؟ج ج؟ا مَجْموعَتَيْنِ إلَى جَيْبِ فَضْلِ ما بَيْنَ <ب؟ج ج؟ا كنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسَيْ ه؟ز ز؟د مَجْموعَتَيْنِ إلَى جَيْبِ فَضْلِ ما بَيْنَ قَوْسَيْ> ه؟ز ز؟د. لأنّا نُخْرِجُ قَوْسَ ب؟ج <إلَى ل> وَنَجْعَلُ كُلَّ واحِدَةٍ مِنْ قَوْسَي ج؟ك ج؟ل مُساوِيَةً لقَوْسِ ا؟ج ونُخرِج قَوْسَيْ ا؟ك ا؟ل وَنَجْعَلُ نُقْطَةَ ج قُطْباً وَنَخُطُّ عَلَيْهِ قَوْساً مِنْ دائِرَةٍ عَظيمَةٍ عَلَيْها ح م س<ن> فَيَكونُ نُقْطَةُ ح أيْضاً قُطْباً لِقَوْسِ ا؟ج؟س وذَلِكَ أنّ كُلَّ واحِدَةٍ مِنْ قَوْسَيْ ا؟ح ح؟س قائِمَةٌ عَلَى ا؟س عَلَى زَوايا قائِمَةٍ فَنُخْرِجُ قَوْسَيْ ج؟م ج؟ن فَلأنّ قَوْسَ ا؟ج مُساوِيَةٌ لِقَوْسِ

comme pôle, un arc *HMSN* de grand cercle. Le point H est alors un pôle de l'arc *ACS*, car chacun des deux arcs *AH* et *HS* est perpendiculaire à <l'arc> *AS*. On mène les deux arcs *CM* et *CN*. Puisque l'arc *AC* est égal à l'arc *CK* et que l'arc *AC* n'est pas un quadrant de <grand> cercle alors que arc *CM* est un quadrant de <grand> cercle, l'angle *KCM* est égal à l'angle *MCS*. De la même manière on montre aussi que l'angle *LCN* est égal à l'angle *NCS*.

On mène aussi l'arc *EGF* et on pose chacun des deux arcs *GF* et *GO* égal à l'arc *DG* ; on trace les deux arcs *DO* et *DF*. On décrit autour du point *G* choisi comme pôle, l'arc *IQXR* de grand cercle ; et comme précédemment, on montre que la ligne *GQ* divise aussi l'angle *EGX* en deux moitiés et que la ligne *RG* divise l'angle *FGX* en deux moitiés. L'angle *MCS* est égal donc à l'angle *QGX* et l'angle *NCS* est égal à l'angle *RGX*. Les deux points *C* et *G* sont deux pôles <respectifs> de deux arcs *HMSN* et *IQXR*, donc l'arc *MS* est égal à l'arc *QX* et l'arc *NS* est égal à l'arc *RX*. Par suite, l'arc *MH* est égal à l'arc *IQ*. Puisque les arcs *AH*, *AM*, *AS* et *AN* sont menés du point A au deux arcs *BCL* et *HSN*, le rapport du Sinus de l'arc *LB* au Sinus de l'arc *BK* est composé du rapport du Sinus de l'arc *BL* au Sinus de l'arc *LC* et du rapport du Sinus de l'arc *LC* au Sinus de l'arc *CK* et du rapport du Sinus de l'arc *CK* au Sinus de l'arc *KB*. Ce rapport est comme le rapport composé du rapport du Sinus de l'arc *BL* au Sinus de l'arc LC et du rapport du Sinus de l'arc *CK* au Sinus de l'arc *KB*, car l'arc *CL* est égal à l'arc *CK*. /[**37**r][51] Mais ce rapport est comme le rapport composé du rapport du Sinus de l'arc *NH* au Sinus de l'arc *NS* et du rapport du Sinus de l'arc *MS* au

جـ؟ك وَلَيْسَ قَوْسُ ا؟جـ بمُساوِيَةٍ لِرُبْعِ دائِرَةٍ وأنّ قَوْسَ جـ؟م رُبْعُ دائِرَةٍ يَكونُ زاوِيَةُ كـ؟جـ؟م مُساوِيَةً لزاوِيَةِ م؟جـ؟س وَكَذَلِكَ أيْضاً نُبَيِّنُ أنّ زاوِيَةَ ل؟جـ؟ن مُساوِيَةٌ لزاوِيَةِ ن؟جـ؟س. وأيْضاً فَإنّا نُخْرِجُ قَوْسَ هـ؟ز؟ف وَنَجْعَلُ كُلَّ واحِدَةٍ مِنْ قَوْسَيْ ز؟ف ز؟ع مُساوِيَةً لقَوْسِ د؟ز ونُخْرِجُ قَوْسَيْ د؟ع د؟ف وَنَجْعَلُ نُقْطَةَ[١٣] ز قُطْباً وَنَخُطُّ عَلَيْهِ قَوْساً مِنْ دائِرَةٍ عَظيمَةٍ عَلَيْها ط ق ش ر وَنُبَيِّنُ كَما بَيَّنّا[١٤] آنِفاً أنّ خَطَّ ز؟ق أيْضاً يَقْسِمُ زاوِيَةَ ع؟ز؟ش[١٥] بِنِصْفَيْنِ وأنّ خَطَّ ر؟ز يَقْسِمُ زاوِيَةَ ف؟ز؟ش بِنِصْفَيْنِ فَيَكونُ زاوِيَةُ م؟جـ؟س[١٦] مُساوِيَةً لزاوِيَةِ ق؟ز؟ش وَيَكونُ زاوِيَةُ ن‌جـ؟س[١٧] مُساوِيَةً لِزاوِيَة ر؟ز؟ش ونُقْطَتا جـ ز قُطْبا قَوْسَيْ ح؟م؟س؟ن ط؟ق؟ش؟ر[١٨] فَيَكونُ قَوْسُ م؟س مُساوِيَةً لقَوْسِ ق؟ش وقَوْسُ ن؟س مُساوِيَةً لقَوْسِ ر؟ش وَيَكونُ لذَلِكَ قَوْسُ م؟ح مُساوِيَةً لقَوْسِ ط؟ق. ولأنّه قد خرج مِنْ نُقْطَةِ ا إلَى قَوْسَيْ ب؟جـ؟ل ح؟س؟ن قِسِيُّ ا؟ح ا؟م ا؟س ا؟ن يَكونُ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ل؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ ب؟ك مُؤَلَّفَةً مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ل إلَى جَيْبِ قَوْسِ ل؟جـ وَمِنْ نِسْبَة جَيْبِ قَوْسِ ل؟جـ إلَى جَيْبِ قَوْسِ جـ؟ك وَمِنْ نِسْبَة جَيْبِ قَوْسِ جـ؟ك إلَى جَيْبِ قَوْسِ كـ؟ب وَهَذِهِ النِسْبَةُ هِيَ مِثْلُ النِسْبَةِ الـمُؤَلَّفَةِ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ل إلَى جَيْبِ قَوْسِ ل؟جـ وَمِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ جـ؟ك إلَى جَيْبِ قَوْسِ كـ؟ب وذَلِكَ أنّ قَوْسَ جـ؟ل مُساوِيَةٌ لقَوْسِ جـ؟ك [وهَذِهِ /[**٣٧و**] النِسْبَةُ هِيَ مِثْلُ النِسْبَةِ الـمُؤَلَّفَةِ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ب؟ل إلَى جَيْبِ قَوْسِ ل؟جـ وَمِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ جـ؟ك إلَى جَيْبِ قَوْسِ كـ؟ب وذَلِكَ أنّ قَوْسَ جـ؟ل مُساوِيَةٌ لقَوْسِ جـ؟ك][١٩] وهَذِهِ النِسْبَةُ هِيَ مِثْلُ النِسْبَةِ الـمُؤَلَّفَةِ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ن؟ح إلَى جَيْبِ قَوْسِ ن؟س وَمِنْ نِسْبَة جَيْبِ قَوْسِ م؟س إلَى جَيْبِ قَوْسِ م؟ح وكذَلِكَ أيْضاً نُبَيِّنُ أنّ نِسْبَةَ جَيْبِ قَوْسِ ف؟هـ إلَى جَيْبِ قَوْسِ هـ؟ع مُؤَلَّفَةٌ مِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ط؟ر إلَى جَيْبِ قَوْسِ رش وَمِنْ نِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ق؟ش إلَى جَيْبِ قَوْسِ ط؟ق وَقَدْ تَبَيَّنَ أنّ قِسِيَّ ح؟م <م؟س> ن؟س مُساوِيَةٌ لِقِسِيِّ ط؟ق ق؟ش ش؟ر فَيَكونُ لِذَلِكَ نِسْبَةُ جَيْبِ قَوْسِ ل؟ب إلَى جَيْبِ قَوْسِ كـ؟ب

51 Le texte manuscrit contient ici une longue phrase répetée [Ibn 'Irāq, MSb, entre le dernier mot du folio 36r et le dernier mot de la ligne 2 (folio 37v)].

Sinus de l’arc *MH*. On montre également que le rapport de Sinus de l’arc *FE* au Sinus de l’arc *EO* est composé du rapport du Sinus de l’arc *IR* au Sinus de l’arc *RX* et du rapport du Sinus de l’arc *QX* au Sinus de l’arc *IQ*. Mais on a montré que les arcs *HM*, <*MS*> et *NS* sont respectivement égaux aux arcs *IQ*, *QX* et *XR*. Par suite, le rapport du Sinus de l’arc *LB* au Sinus de l’arc *KB* est comme le rapport du Sinus de l’arc *FE* au Sinus de l’arc *EO*. C’est ce que nous voulions montrer. »

كنِسْبَةِ جَيْبِ قَوْسِ ف؟ه إلَى جَيْبِ قَوْسِ ه؟ع، <وذَلِكَ ما أردنا أن نبيّن.>"

. مخطوطة ليدن، شرقي 930، ص 36 و 37 ظ ٢. ذوا: ذو ٣. الّتي: اللتي ٤. قاعدتيهما: قاعدتهما؛
. قائمتَيْنِ:قائمة ٦. واحد: واحدة ٧. ضِلْعَيْهِما: نقطتا حرف الياء مطموستان ٨. اللّذين: اللذان ٩. زاوِيَتَيْهِما: نقاط حرفي الياء والتاء مطموسة ١٠. الـمُحيطتَيْنِ: المحطين ١١. الـمُحيطتَيْنِ: المحطين ١٢. ذوا: ذو ١٣.
نقطة: نقط ١٤. بيّنّا: بيننا ١٥. ع؟ز؟ش: ه؟ز؟ش ١٦.
م؟ج؟س: ل؟ج؟س ١٧. ن؟ج؟س:ب؟ج؟س؛
١٨. ط؟ق؟ش؟ر: ط؟ق؟ش؟ج؛ ١٩. جملة مكرّرة.

## BIBLIOGRAPHIE


***Sources manuscrites***

IBN HUD, Yūsuf al-Mu'taman, Roi de Saragosse, [XIe S.] *Kitāb al-Istikmāl* (*Le Livre de Complétion* (*Perfection*). MS Or. 82 de la Bibliothèque Royale de Copenhague.

MS d'IBN 'IRĀQ, Abū Nasr Mansūr, [XIe S.a] *Maqāla fī islāh shakl min Kitāb Manālā'ūs fī-l Kurīyyāt (Article sur la rectification d'une proposition du livre des Sphériques de Ménélaüs).* Patna, MS 2468, folios 75r-78v.

— [XIe S.b] *Islāh Kitāb Manālā'ūs fī-l Kurīyyāt (Rectification du livre des Sphériques de Ménélaüs)*, Leiden, MS Or 930.

***Sources imprimées***

AL-ANDALUSĪ Sā'id, *Ṭabaqāt al-umam* (*Les Classes des nations*), éd. Bū'alwān, Beyrouth, 1985.

AL-HOUJAIRI, M., *L'Encyclopédie d'Ibn Hūd*, thèse doctorale (Univ. Paris 7, 2005), vol. I et II.

AL-QIFTI, Jamāl al-Dīn, *Ta'rikh al-hukama'* (*Histoire des sages*), éd. Julius Lippert, Leipzig, 1908.

AL-TUSI, Nasīr al-Dīn, *Traité du Quadrilatère (Kitāb al-Shakl al-qattā'*). Livre attribué à Nasīr al-Dīn al-Tūsī, traduit (en français) par Alexandre Pacha Caratheodory, Constantinople, 1891 ; réimpr. F. Sezgin, coll. *Islamic Mathematics and Astronomy*, vol. 47, Frankfurt, 1998.

BELLOSTA, Hélène, Le Traité de Thābit ibn Qurra sur *la figure secteur*, *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 14 , n° 1, 2004, p. 145-168. Cet article a été repris et augmenté dans : *Thābit ibn Qurra – Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdâd*, R. Rashed (éd.), Berlin, 2009, p. 335-390.

CROZET, Pascal, Thābit ibn Qurra et la composition des rapports, *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 14, n° 2, 2004, p. 175-211. Cet article a été repris et augmenté par l'édition et la traduction du texte, dans : *Thābit ibn Qurra – Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad*, R. Rashed (éd.), Berlin, 2009, p. 391-535.

DEBARNOT, Marie-Thérèse, Al-Bīrūnī, Kitāb Maqālīd 'ilm al-hay'a, *La Trigonométrie sphérique chez les Arabes de l'Est à la fin du Xe siècle*, édition et traduction par M.-Th. Debarnot (Damas, 1985).

—"Trigonometria", dans *Storia della* Scienza, vol. III, Istituto della Enciclopedia Italiana (Rome, 2002), p. 432-447.

DJEBBAR, Ahmed, « *La rédaction de l'Istikmāl d'al-Mu'taman (XIe s.) par Ibn Sartāq un mathématicien des XIIIe-XIVe siècles* », Historia Mathematica, vol. 24, 1997, p. 185-192.

EUCLIDE, *Les Éléments d'Euclide*. Traduction française dans le livre "*Les Œuvres d'Euclide*", F. Peyrard, Paris 1819 ; nouveau tirage. Paris 1993.

HOGENDIJK, Jan, "The Geometrical Parts of the *Istikmāl* of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century). An Analytical Table of Contents", *Archives internationales d'histoire des sciences*, 41, (1991), p. 207-281.

IBN AL-ABBĀR, Muhammad, *al-Hulla al-saiyrā'* (*Le Costume en soie*), éd. Hussain Monés (Le Caire, 1963), vol. II.

IBN 'IRĀQ, *Abū Nasr Mansūr, Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abū Nasr Mansūr B. 'Alī B. 'Irāq*. Max Krause, coll. Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, *Philologish-Historische Klasse*, 3e série, n° 17, Berlin, 1936 ; réimpr. F. Sezgin, coll. *Islamic Mathematics and Astronomy*, vol. 37, Frankfurt, 1998.

IBN MANZŪR, *Abū al-Fadl Jamāl al-Dīn Muhammad*, *Lisān al-'Arab (*nouvelle version*).* Dar Sader Publishers, Beirut, 2000-2003.

RASHED, Roshdi et AL-HOUJAIRI, Mohamad, Sur un théorème de géométrie sphérique : Théodose, Ménélaüs, Ibn 'Irāq et Ibn Hūd, *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 20, n° 2 (2010), p. 207-253.

RASHED, Roshdi, *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. I, Londres, 1996.

— *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. V, Londres, 2006.

SAMSO, Julio, *Estudios sobre Abū Nasr Mansūr b. 'Alī b. 'Irāq*. Barcelona, 1969.

THEODOSE, *Les Sphériques* de Théodose de Tripoli. Trad. Paul Ver Eecke, Paris, 1959.

WITKAM, Jan Just, *De egyptische Arts Ibn al-Akfāni*, (Leiden, 1989).