LA *TOPOLOGIE* DE JOHANN BENEDICT LISTING (1808-1882)
résonances dans quelques œuvres de contemporains[1]

Dominique FLAMENT
Archives Poincaré

RÉSUMÉ — La *Topologie* de Johann Benedict Listing (1808-1882) est encore peu connue de nos jours, lui l'est un peu plus pour d'autres réussites. Après avoir rappelé quelques éléments significatifs des deux écrits les plus considérables de son œuvre, ses *Vorstudien zur Topologie* (1847) et son *Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern* (1861), nous relèverons l'importance de cette discipline *quasi-mathématique*, qui introduisait et établissait le « qualitatif » en mathématique, au travers de ses résonances dans les œuvres de grands contemporains tels Arthur Cayley (1821 - 1895), Peter Guthrie Tait (1831 - 1901) et James Clerk Maxwell (1831 - 1879), pour terminer sur son influence singulière dans l'œuvre éclatée et encore aujourd'hui mal établie de Charles Sanders Peirce (1839-1914).

[1] La présente rédaction résulte de ma seconde conférence donnée, à l'occasion du *3° Encontro de História Conceitual da Matemática* (Brasil, SP, USP, Ubatuba, abril de 2012), à São Paulo, *Auditório Jacy Monteiro*, IME/USP, le 16 avril 2012.

C'est la confirmation d'une nouvelle voie qui s'affiche avec Listing. Singulièrement, outre son originalité bercée par des devanciers qu'il ne renie pas, Listing reconnaît volontiers l'influence du « plus grand géomètre du moment » sur l'orientation de ses recherches. C'est une « nouvelle science » qu'il nous invite à cultiver, une science « quasi mathématique » à découvrir dont l'utilité semblerait en partie déjà assurée[1].

Un maître éclairé

À Göttingen, dès le début des années 1830, Listing est un élève assidu de Gauss. C'est avec lui qu'il fera sa première instruction de *Geometria situs* et qu'il sera poussé à entreprendre des recherches en ce domaine où le maître a lui-même peu professé et peu publié.

On doit cependant reconnaître que l'intérêt de Gauss pour cette nouvelle matière n'est pas celui d'un engouement précoce et passager[2] : les rares traces écrites que l'on retrouve dans son œuvre[3] attestent qu'il développera des études qui impliquèrent une véritable connaissance et des réflexions approfondies en « topologie »[4].

Dès 1802, il faisait part à Olbers[5] de son attente fébrile, « avide » même, de la parution prochaine de la *Géométrie de Position*[6] de Lazare Carnot ; il parlait d'un « sujet presque complètement en friche » et des quelques « fragments » dus à Euler et Vandermonde.

---

[1] Gauss précisait en 1799 à propos de la „Geometrie de Lage" (c'est l'expression qu'il utilise alors) que ses principes « ne sont pas moins valables que ceux de la géométrie des grandeurs… » (*Cit.* [Pont 1974*a*, 32]).

[2] Nous invitons le lecteur à se reporter à [Pont 1974*a*], notamment au § 3 (« Le rôle du prince des mathématiciens », p. 31-38), où sont rassemblés une partie des éléments qui témoignent de l'influence directe et indirecte de Gauss sur ce développement. Pont n'hésite pas à écrire que « Gauss se lia d'amitié avec *l'analysis situs* » dès 1794 (p. 33). Voir également son article [Pont 1974*b*] et celui de Breitenberger [Breitenberger 1993].

[3] Par exemple, on peut se reporter à ses articles posthumes publiés dans *Gesammelte Werke* : „[I.] Zur Geometria Situs" (vol. VIII, p. 271-281), constitué de notes rédigées entre 1823 et les années 1840 ; „[II.] Zur Geometrie der Lage, für zwei Raumdimensionen" (vol. VIII, p. 282-285), rédigé dans les années 1840. Voir également „Zur Electrodynamik" (vol. V, p. 605, § [4.], 22 Jan. 1833).

[4] C'est le cas dans ses « Disquisitiones generales circa superficies curva » (8 Oct. 1827), *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiones*, vol. IV, Gottingae 1828 (Voir [*Werke*, V, 217-258 ; 341-347]), dans d'autres sujets de géométrie différentielle ou lorsqu'il détermine le nombre d'enlacements [die Anzahl der Umschlingungen] de deux courbes fermées ou infinies, un problème fondamental qu'il dit être à la frontière (*Grenzgebiet*) de la *Geometria Situs* et de la *Geometria Magnitudinis* „Zur Electrodynamik", *Werke*, V, p. 605, § [4.], 22 Jan. 1833).

[5] Lettre du 21 novembre 1802 (D'après une nouvelle datation de Pont ([Pont 1974*a*, 32])).

[6] Voir [Gauss 1976, 103]. Contrairement à ce qu'il attendait semble-t-il, cet ouvrage ne traitait pas de « topologie ».

En 1825, il confiait à Schumacher[7] que la *geometria situs* était restée un « domaine presque complètement inexploré ». À plusieurs reprises, constant, il reviendra là-dessus en reprochant que depuis le « pressentiment » de Leibniz et le « faible regard » d'Euler et Vandermonde, on n'en sache « guère plus que rien »[8]. On peut poursuivre dans cette voie, accentuer un peu plus l'importance qu'attachera Gauss à toute cette matière, en rappelant que Sartorius von Waltershausen écrit dans sa biographie de Gauss : « il plaçait une espérance extraordinaire dans le développement de la *geometria situs* ». Mais, comme lui, il devait convenir qu'en dépit de ces premiers efforts elle était restée un champ « encore complètement inexploré que notre calcul actuel est inapte à gouverner »[9].

Il n'est pas difficile de reconnaître que Gauss a poussé Listing dans ces recherches délaissées et qu'il a exercé sur lui une influence effective : on retrouve chez cet élève, devenu collègue et ami, les mêmes sources, les mêmes références et parfois des avis et des formulations identiques. Cependant, une telle entrée en matière ne rend pas justice à Listing : elle le place sous un angle trop défavorable, tel le « sous produit » d'un Gauss perçu comme celui qui au cours du premier 19e siècle eut « la vision la plus profonde du rôle de cette science »[10]. Sans revenir sur l'évidence de cette influence considérable et marquante, il ne saurait être question de nier l'originalité de l'approche de Listing dans ce nouveau monde qui tardait à se révéler.

Un temps assistant de Sartorius von Waltershausen à l'occasion de recherches géologiques sur l'Etna, puis apportant son concours à l'optique physiologique[11], à la cristallographie et à la reconsidération de la *Philosophia botanica* de Linné, ce savant *inspiré* par Gauss, devenu grâce à lui professeur de Physique de l'Université de Göttingen[12], n'en fera pas moins valoir sa notable différence.

---

[7] Lettre du 30 octobre 1825 [Gauss *Werke*, V (1867), 400].

[8] „Schwachen Blick", „nicht viel mehr wie nichts". On retrouve ces déclarations datant du 22 janvier 1833 dans le *Carl Friedrich Gauss Werke* (vol. V, p. 605), mais le texte d'où elles sont tirées a d'abord été rendu public par James Clerk Maxwell (1831-1879) ([Maxwell (1873)1881, t. 2, 43]). C'est dans ce même *Traité* que sont évoqués les travaux topologiques de Listing.

[9] [von Waltershausen 1856, 88] (*Cit.* [Pont 1974*a*, 33]).

[10] C'est par exemple ce qu'écrit René Taton dans sa *Préface* à l'ouvrage de Pont ([Pont 1974*a*, ix]).

[11] On parle encore de nos jours de *loi* et d'*espace* de Listing.

[12] Il est d'abord nommé professeur de Mécanique à l'Institut des Arts et des Métiers de Hanovre (1837), avant de devenir professeur extraordinaire (1839), puis ordinaire (1847), de Physique à l'université de Göttingen.

Topologie

Le mot est ancien, il renvoie à la connaissance des lieux : à l'étude des formes d'un terrain et des lois qui les régissent, soit à l'étude géographique d'un lieu en relation avec son histoire, c'est un élément de la topographie ; à la connaissance des lieux communs, des sources où doit puiser un prédicateur[13]. Il désigna la branche de la botanique qui s'occupait des lieux des plantes. Il représentera également un procédé mnémotechnique d'association de la chose à ne pas oublier (par exemple, une idée abstraite) à un lieu ou une place connu (par exemple, un objet sensible familier, une idée concrète, etc.). La première trace reconnue d'une utilisation du mot dans un *sens mathématique* se trouve dans une lettre[14] de Listing adressée en avril 1836 à Johann Heinrich Müller (1787-1844). Mais la vraie entrée ne se fera qu'en 1847, dans les *Vorstudien zur Topologie*[15] :

> Sous le nom de *topologie*, nous devrons [...] comprendre l'étude des rapports modaux [modalen Verhältnissen] concernant les formations spatiales ou des lois qui régissent la connexion [Zusammenhangs], la situation réciproque et la succession des points, des lignes, des surfaces, des corps et de leurs parties ou de leurs agrégats dans l'espace, abstraction faite de tout rapport de mesure et de grandeur[16].

Listing préfère cette expression à d'autres déjà existantes (*geometria situs*, *analysis situs*,...). Il écrivait en 1836 à propos de cette science que « Leibniz est probablement le premier à avoir pensé, mais seulement à avoir pensé, à son développement théorique »[17] ; il le réaffirmera plus tard en disant :

> Il semble qu'on puisse trouver pour la première fois l'idée d'un traitement spécifique et quasi calculatoire de l'aspect modal de la géométrie, dans des énoncés occasionnels de Leibniz, où il est question d'une sorte d'algorithme au moyen duquel on devrait pouvoir soumettre à l'analyse la situation des

[13] D'après le *Larousse du XX^e siècle* (article « topologie »).
[14] Cette lettre est entièrement reproduite dans [Breitenberger 1993].
[15] [Listing 1847].
[16] Voir [Listing 1989, 26]. Nous avons préféré dans un premier temps user de l'expression « rapports modaux », plutôt que de celle d' « aspects qualitatifs » proposée par Pont ; de même nous avons retenu le mot « modalité » plutôt que celui de « qualité » pour la traduction du mot „Modalität". Gauss parlait déjà de „Summe oder Aggregat" ; Pont préfère utiliser ici le mot « réunion ». Il va de soi que les choix de Pont sont, ou rejoignent, ceux de la « topologie » actuelle et paraissent mieux convenir à la conception d'une « géométrie qualitative » ; une expression que l'on retrouve sous la plume de Tait en 1883, de même que celle de "topology" ([Tait 1883, 82]). Cependant, ce parti pris d'historien qui est le nôtre, à l'avantage de nous placer au plus près des premières conceptions de Listing, ou d'autres.
[17] Lettre à Müller ([Pont 1974*a*, 41]).

> formations spatiales comme cela se fait au moyen de l'algèbre pour tout ce qui concerne la grandeur[18].

Dès 1836, il justifie son opposition à l'expression *Geometria situs* en précisant que « le terme de géométrie ne peut décemment caractériser une science d'où les notions de mesure et d'extension sont exclues ». L'expression « géométrie de position » suit le même chemin parce qu'elle est utilisée pour une autre discipline ; d'où la nécessité d'une nouvelle expression : « comme, finalement, notre science n'existe pas encore, je me servirai du nom, convenable me semble-t-il, de topologie »[19].

En 1847, le point de vue de Listing est inchangé : pour lui, la caractéristique géométrique de Leibniz « était essentiellement fondée sur le concept de congruence, *sans posséder pour autant de contenu modal proprement dit* »[20] ; et il revient à nouveau sur la nécessité de rejeter la dénomination *geometria situs* qui

> évoque le concept de mesure, qui est ici entièrement subordonné et crée une confusion avec le terme de 'géométrie de position'[21] déjà utilisé couramment pour une tout autre espèce de considérations géométriques[22].

De la même manière, tout autre expression existante est rejetée, dont celle de „Geometrie der Lage". Ce qui ne l'empêche pas d'admettre volontiers que la « nouvelle analyse géométrique » de Grassmann (« laquelle procède du spécimen leibnizien »[23]), le calcul barycentrique de Möbius et la géométrie de position de Carnot (rattachée à la « géométrie descriptive »[24] élaborée par Monge) sont « les seuls à pouvoir être considérés à proprement parler comme un enrichissement de la géométrie »[25]. À côté de ces derniers « trouvent tout à fait leur place ici »[26], la « résolution scientifique » réalisée par

---

[18] *Vorstudien*, p. 24. Il reprend ici en note un passage de la célèbre lettre de Leibniz à Huygens datée du 8 septembre 1679.
[19] [Pont 1974*a*, 42].
[20] *Vorstudien*, p. 24 ; c'est nous qui soulignons.
[21] En français dans le texte.
[22] *Vorstudien*, p. 25-6.
[23] *Vorstudien*, p. 24. Outre le fait qu'il connaît au moins en partie les œuvres de Grassmann et de Möbius impliquées dans ce domaine de réflexion, c'est bien sûr à l'article « Analyse géométrique » ([Grassmann 1847]) auquel il se rapporte ici (non pas à l'*Ausdehnungslehre* de 1844 ([Grassmann 1844]).
[24] En français dans le texte.
[25] *Vorstudien*, p. 24.
[26] *Vorstudien*, p. 25. En guise de contraste, nous pourrions rappeler ce qu'écrit Jean le Rond d'Alembert dans l'*Encyclopédie méthodique. Mathématiques* (tome troisième, chez Panckoucke, Paris, 1787), article « Situation » : « […] Leibnitz parle dans les actes de Leipsick d'une espèce particulière d'analyse, qu'il appelle *analyse de situation*, sur laquelle on pourroit établir une sorte de calcul. (…) Il seroit à souhaiter que l'on trouvât moyen de faire entrer la *situation* dans le calcul des problèmes ; cela les simplifieroit extrêmement pour la plupart ; mais l'état & la nature de l'analyse algébrique ne paroissent pas le permettre. (…) ». À propos de l'article d'Euler « *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis* », il écrit plus loin : « […] on ne voit dans ce mémoire rien qui ait rapport à l'analyse de situation dont nous parlons ; il s'agit seulement de savoir quel chemin on doit passer pour traverser des ponts disposés sur une rivière qui serpente, & les traverser de manière qu'on ne passe jamais deux fois sur le même. » (O)

Euler du problème du « saut du cavalier »[27] (très proche selon lui de la « géométrie de situation ») et les réflexions consacrées par Vandermonde[28] (notamment celles qui sont relatives au trajet que doit suivre un fil pour représenter une tresse ou les mailles d'un manchon).

Cependant, une fois ces quelques références rappelées, force lui est de constater une fois de plus que « la partie modale de la géométrie attend toujours son élaboration et son développement ».

Son propos est d'oser

> communiquer quelques éléments dans ces études préliminaires à la nouvelle science, et avant même que ces considérations puissent prétendre à une forme et à une méthode rigoureusement scientifiques, notre seule ambition est d'attirer l'attention, à l'aide de rudiments propédeutiques, d'exemples et de matériels, sur les possibilités et l'importance de cette science.

Enfin, ultime observation de son introduction, il insiste à nouveau sur le fait que

> [p]our atteindre au rang de science exacte auquel elle semble aspirer, la Topologie devra réduire les faits de l'intuition spatiale à des concepts les plus simples possibles, avec lesquels elle accomplira les opérations, quasiment comme en calcul, à l'aide de signes et de symboles appropriés et choisis par analogie avec ceux de la mathématique, selon des règles simples[29].

Le mot « topologie » proposé par Listing n'est pas immédiatement adopté ; c'est néanmoins en Allemagne que les choses évolueront le plus rapidement. Hilbert l'emploie au deuxième *Congrès International des Mathématiciens* (Paris, 6-12 Août 1900)[30]. Mais, en France ainsi qu'en Angleterre, il tardera à trouver la place qui lui est reconnue aujourd'hui. À la fin du 19e siècle, les mathématiciens français parleront encore d'*analysis situs* (Henri Poincaré [1899],...), parfois de *Géométrie de situation* (Jacques Hadamard[31] [1909]…). En Angleterre, James Clerk Maxwell (1831-1879) assure le

[27] *Vorstudien*, p. 24-5. Il est significatif que Listing ne se réfère pas ici aux autres travaux bien connus d'Euler.

[28] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796), [Vandermonde 1772, 566].

[29] *Vorstudien*, p. 25-6.

[30] [Hilbert, 1902] ; en particulier, p. 96-7, il parle des « Problèmes de topologie des courbes et des surfaces algébriques ».

[31] Ce « caractère d'indépendance vis-à-vis des déformations apportées à la figure est précisément celui qui va m'intéresser : les problèmes de géométrie qui le présentent constituent la *Géométrie de situation* ou *Topologie*… » (Leçon d'ouverture du *Cours de Mécanique Analytique et de Mécanique céleste*, faite au Collège de France le 18 mai 1909, intitulée « La Géométrie de situation et son rôle en mathématique », voir [Hadamard 1968, vol. II, 805-828], en particulier p. 813). Mais en un autre endroit il précise que « la géométrie de situation (ou encore *Analysis situs*) est une branche de la Géométrie dans laquelle on ne regarde pas deux figures comme différentes lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue, sans déchirure ni soudure » [« Notions élémentaires sur la géométrie de situation », ([Hadamard, vol. II, 829-871], p. 831). Il reconnaît beaucoup plus d'importance à Riemann qu'à d'autres : « …elle ne cessa pas d'être cultivée après [Euler] (…). Son importance au point de vue du développement de la

succès de Listing : dans son *Traité d'électricité et de Magnétisme* il résume une partie essentielle de ce qu'on lui doit et il reprend plusieurs des concepts développés par lui tout en insistant sur l'importance de sa contribution. Cependant, lorsque la nécessité se fait jour, c'est à une « Géométrie de Position » que Maxwell fait appel. Mais, tout en reconnaissant que c'est un sujet peu étudié, il signale que son traitement le plus complet a été donné par J. B. Listing[32]. Peter Guthrie Tait va dans le même sens : il consacre toute son "Introductory address to the Edinburgh Mathematical Society" (9 novembre 1883) à la *Topologie* de Listing[33]. Il n'admet pas l'utilisation du mot "Geometry", qui ne saurait convenir ici, mais il ne fera pas sienne l'expression de Listing pourtant si bien mise en valeur dans son discours introductif prononcé devant la Société Mathématique d'Edinburgh. Sa préférence est pour une *Science of Situation*[34]. Arthur Cayley (1821-1895) et Charles Sanders Peirce (1839-1914), bien que très largement instruits des travaux de Listing, n'y changent rien : le premier parle toujours d'*analysis situs* et ébauche une nouvelle théorie mathématique des "Partitions of a Close"[35] ; le second, remplace l'*analysis situs* par une "Topical Geometry" dont il entreprend un exposé systématique[36].

---

science mathématique tout entière ne devait cependant apparaître qu'au milieu du XIX^e siècle, avec l'œuvre de Riemann » (p. 813) ; « …quoi qu'il en soit, si frappante que fût la leçon qui se dégageait de la découverte de Riemann, cette leçon fut perdue. On peut dire qu'elle le resta jusqu'aux travaux de M. Poincaré » (p. 817). « …il y a topologie et topologie. Une foule de questions de même espèce ont été traitées tant par Euler lui-même que par nombre de ses successeurs ; elles ont leur place dans les recueils de récréations mathématiques et ne trouvent guère l'occasion d'en sortir. Seule, celle qu'a soulevée Riemann a la portée que nous venons de lui reconnaître dans ce qui précède. » (p. 824)

[32] [Maxwell 1954] ; en particulier §. 18], p. 17 ; voir également note * p. 17 ; §§. 18]- 23], §. 421]…

[33] [Tait 1884] "Listing's Topologie", *Philosophical Magazine*, (5) 17 (N° 103), Jan. 1884, 30-46 & plate opp. p. 80.

[34] « ...Pour cette branche scientifique il n'y a pas à présent de titre définitivement reconnu à l'exception de celui suggéré par Listing que j'ai par conséquent été obligé d'adopter. » C'est précisément ce qu'il fait dans le titre de son intervention en y insérant le mot allemand „Topologie". Mais plus loin, il en vient au mot anglais "topology" et justifie sa préférence : « Il n'est pas facile (en anglais du moins) de trouver un nom pour [cette science] sans en forger un à partir des racines grecques ou latines. *Topology* a une signification parfaitement définie, bien que sans lien avec le sujet. *Position*, avec nos mathématiciens du moins, en est venu à impliquer la mesure. *Situation* n'est pas encore autant définitivement associé à la mesure ; car on peut parler d'une situation à gauche ou à droite d'un objet sans chercher à savoir *de combien*. Ainsi, jusqu'à ce que meilleur terme soit conçu, on peut appeler notre sujet, dans notre propre langue, la *Science of Situation*. » ([Tait 1884] ; voir p. 86).

[35] Cayley fera un rapport sur le „Census der räumlicher der Complexen, oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern" (1861) de Listing devant la *London Mathematical Society* (Le 12 novembre 1868, p. 102, 104). Son article "On the Partitions of a Close" est daté du 8 mars 1861 ([Cayley 1861]).

[36] Dans l'œuvre magistrale de Ch. S. Peirce on trouve de nombreuses références à cette « Géométrie topique » ainsi qu'à ses relations avec le *Census* de Listing ; nous y reviendrons.

Aujourd'hui, de tous les mots créés par Listing[37], l'histoire n'a conservé que celui de « topologie ».

Vorstudien zur Topologie

C'est le premier ouvrage qui fait nommément figurer la topologie dans son titre. On le présente souvent comme très élémentaire et de peu d'importance. Mais ce jugement n'est cependant pas partagé par tous : on le sait, Maxwell n'est pas de cet avis, de même que son ami Tait à qui il l'aura fait connaître[38] et pour qui il s'agira de l'une des deux pièces maîtresses sur lesquelles repose toute la gloire de Listing[39].

Tait place l'auteur de ce « remarquable essai » parmi les premiers fondateurs de cette "Science of Situation" qui traite plus spécifiquement des relations spatiales qualitatives, et donc de celle qui en est un « exemple typique », la « théorie des nœuds »[40] :

> Listing's extremely valuable, but too brief, Essay (…) has long ago anticipated a very great deal of what I have lately sent to the Society.
>
> (…) Nothing can be clearer than Listing's statements on several parts of the subject: it is greatly to be desired that he had made many more.[41]

Ce texte, trente ans plus tard, fera progresser Peter Guthrie Tait (1831-1901) dans ses propres recherches et permettra de faire connaissance avec Listing[42].

Dans **son examen** des « formations spatiales » Listing est revenu sur les deux points de vue généraux que l'on pouvait alors distinguer : « la quantité et la modalité » ; son choix s'est délibérément porté vers celui qui avait toujours été jusque-là pratiquement délaissé, celui de la « modalité » ou considération de toutes les questions ayant trait à la « situation » et à la « succession ».

La première partie de son article s'ouvre naturellement sur le concept de « position » et, d'abord, par une considération préliminaire simple, « prise par analogie avec

---

[37] Dans [Müller 1900] ; on renvoie à lui pour le seul mot „Periphraxis", tout en oubliant qu'on lui doit aussi ceux de « topologie » (oder Gestaltenlehre (polyedrale Raumteilungen) [Analysis situs]) et de « Cyclose » (oder „cyclischer Zusammenhang" (von Raumelementen) [Complexe]), également présents dans ce *Vocabulaire mathématique* !

[38] Lettre de Maxwell à Tait datée du 22 janvier 1877, voir [Maxwell 2002, 446-447] ; dans sa lettre du 24 janvier 1877, il précisera le titre de ce texte de Listing [*Vorstudien der Topologie*] ([Maxwell 2002, n° 640, 448-449]), ajoutant : "I do not think Listing has cribbed very much from you nor will you bag much from him, but being a pioneer he ought to be honorably mentioned." (p. 448)

[39] "This paper, which is throughout elementary, deserves careful translation into English very much more than do many German writings on which that distinction has been conferred." ([Tait 1883, 83])

[40] [Tait 1883, 82]. Nous pourrions une nouvelle fois évoquer l'influence de Gauss, en rappelant l'existence (bien avant 1847) de son manuscrit „Zur Geometria Situs" essentiellement consacré à l'étude des nœuds.

[41] [Tait 1876-77] ; voir p. 306, p. 309 et p. 310.

[42] Voir les remarques datées du 11 avril 1877 faites par Listing sur l'article de Tait datées du 11 avril 1877 [Tait 1876-77, 316-17]).

la théorie combinatoire et s'appuyant sur le schéma des trois dimensions de l'espace » : chaque objet peut être affecté de trois droites se croisant à angle droit en son intérieur et à partir desquelles on peut différencier les uns des autres, ses dimensions et ses côtés.

Dans un souci de clarification, il emprunte l'exemple d'un dé de jeu ordinaire (dont les numéros de 1 à 6 sont répartis de telle façon que la somme de deux faces opposées soit toujours 7) : 0 est pris au milieu de ce dé ; on remplace les chiffres 1, 2, … par 1, 2, 3 , $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ respectivement, Deux corps, A et B, ainsi munis de leurs « signes de dimension », peuvent être alors disposés côte à côte ou bien l'un dans l'autre de telle façon que chacun des trois axes de l'un soit orienté de la même façon que chacun des trois axes de l'autre. « De telles dispositions peuvent être appelées (au sens étroit du terme) *positions* » (p. 27) : pos(A)B désigne la position de B par rapport à A ; pos(B)A, celle de A par rapport à B.

> La détermination topologique d'une position B par rapport à A se fait au moyen d'une forme comportant les trois chiffres 1, 2, 3, dans n'importe quel ordre et avec des signes quelconques, forme dans laquelle les trois chiffres indiquent, selon l'ordre choisi, ceux des trois côtés de B qui sont orientés de la même façon que les côtés 1, 2, 3 de A ou qui 'conspirent' [*conspirieren*] avec ces derniers. (p. 28)

Ce faisant, dans l'expression pos(A)B = 2$\bar{3}$ $\bar{1}$, ce sont les côtés 2, $\bar{3}$ et $\bar{1}$ de B qui coïncident avec les côtés 1, 2 et 3 de A, respectivement. Pour chaque position, les trois chiffres de la forme 1, 2, 3 sont également considérés comme *indices* ou « numéros » des places (p. 28). Une fois dressée la liste des quarante-huit formes possibles[43] grâce à ses notations, il en vient à concevoir à la place du point 0,

> un individu dont le sommet du crâne est orienté vers le point 1 et le visage vers le point 2, alors le point 3 se situera soit du côté droit, soit du côté gauche. La situation réciproque des trois axes de position est appelée, dans le cas où 3 se situe à droite, une position d'axe *droit* et dans le cas où 3 se situe à gauche, une position d'axe *gauche* […] (p. 29)

Suivent de nouvelles définitions :

> Deux positions d'axe droit ou deux positions d'axe gauche sont appelées deux à deux *homologues* ; une droite et une gauche, *hétérologues*.

Nous sommes dès lors autorisés à dire que :

> Deux corps admettent toujours vingt-quatre positions et vingt-quatre seulement. (…) Nous appellerons *positives* les vingt-quatre positions d'axe homologues, *négatives* les vingt-quatre positions d'axe hétérologues. (p. 29)

[43] Les orientations permises par les inversions droite-gauche et les permutations ; elles peuvent servir à symboliser les positions relatives de deux objets comme les dés.

Il s'intéresse à l'influence du signe d'un membre d'une position sur le signe de la dite position et remarque que la permutation des signes des membres d'une position laisse inchangé le signe de celle-ci, contrairement à la permutation des membres eux-mêmes. Il montre qu'« intervertir » [*invertieren*] une position donnée de B en A revient à dire qu'on fait dériver d'elle la position de A en B : « intervertir » pos (A)B = $\bar{2}\ 3\ \bar{1}$ donne pos (B)A = $\bar{3}\ \bar{1}\ 1$; partant de cette dernière, on retrouve la première position par simple inversion. Du concept d'inversion « découlent aussi les conditions par lesquelles une position reste inchangée par inversion, c'est-à-dire est *réciproque*. » (p. 31)

Il introduit le concept de « sommation de positions consécutives » : elle consiste en la « dérivation d'une position du dernier vers le premier dans la série des éléments auxquels se réfèrent les positions données » (p. 33). Ainsi, la somme des positions consécutives pos(A)B, pos(B)C, pos(C)D et pos(D)E, est « symboliquement » exprimée par la relation :

$$\text{pos(A)B} + \text{(B)C} + \text{(C)D} + \text{(D)E} = \text{pos(A)E}.$$

Une première illustration exemplaire de ce qu'il venait d'établir assez laborieusement sur les positions (rappelons qu'il ne disposait pas encore de tous les concepts de la théorie des groupes), fait appel au « rapport de situation entre des objets et leurs images catoptrique et dioptrique ». Dans une expression telle que « pos(A)B », A en vient à signifier l'objet corporel placé devant un miroir plan et B est alors son image dans ce miroir : suivant l'axe retenu perpendiculaire au plan du miroir, pos(A)B prendra l'une des trois formes $\bar{1}23$, $1\bar{2}3$, $12\bar{3}$. D'où une première constatation :

> En dehors des rapports géométriques, c'est-à-dire considéré d'un point de vue purement topologique, cela vaut aussi bien pour les images virtuelles engendrées par des miroirs convexes […] que pour les images virtuelles engendrées par des miroirs concaves. (p. 38)

Et de conclure qu'il en va de même avec les miroirs concaves-convexes (*difflexes*). Le symbolisme de Listing a aussi l'avantage de simplifier l'explication des « simulacres d'images »[44].

> Ces considérations, si élémentaires soient-elles, peuvent servir à constater avec une plus grande précision et en vue de leur usage scientifique, le sens de certaines expressions topologiques qui manquent de précision dans le langage de la vie courante. (p. 9)

Une nouvelle distinction est précisée : entre *inversion* [*Umkehrung*], soit le cas où deux dimensions sur les trois s'inversent simultanément par un demi-tour, et *perversion*

---

[44] En note Listing précise à propos de ces images : « D'un point de vue optique, elles sont pour ainsi dire simultanément virtuelles et réelles. » (*i. e*, elles sont dans une des positions positives $12\bar{3}$, $\bar{1}23$, $1\bar{2}3$) [p. 38].

[*Verkehrung*], le cas où il n'y a qu'une seule dimension inversée[45]. Lorsque les trois dimensions sont inversées, il parle de corps *simultanément perverti-inversé*[46]. Cette distinction est immédiatement mise à profit dans l'étude des images de nombreux instruments optiques (tels les télescopes, microscopes, projecteurs, …).

La seconde partie, *De l'hélicoïde*[47], ouvre sur une transition de la position au nœud.

> L'hélicoïde est une ligne à deux axes de courbure, qui peut être considérée comme le trajet d'un point se déplaçant dans l'espace simultanément de façon cyclique et progressive. (p. 47)

Donner au concept toute la généralité qui convienne aux considérations topologiques, amène Listing à définir la « ligne cyclique », ou *boucle*, comme étant « la circonférence de toute figure plane quelconque, à condition que son périmètre ne se croise nulle part lui-même et ne possède pas non plus de points multiples. » (p. 47)

Un point quelconque à l'intérieur de cette surface « encerclée » devient le centre de la boucle (pour simplifier on prend alors son « centre de gravité », que l'on désigne par 0) ; les extrémités d'un diamètre (passant par 0) sont désignées par 1 et $\bar{1}$, celles d'un autre diamètre (« quelconque ou si l'on préfère, perpendiculaire au premier » [p. 48]) le sont par 2 et $\bar{2}$. Une perpendiculaire étant tirée en 0 au « plan circulaire », tout point situé à « l'endroit » du plan est désigné par 3, par $\bar{3}$ lorsqu'il est situé à son « envers ». Tenant compte d'une « progression continue » de 0 (soit d'une translation qui va définir un chemin quelconque appelé par lui le *trajet* ou la *conductrice* de la boucle), Listing ajoutera 4 et $\bar{4}$ à cette première désignation positionnelle analogue à celle qui précède, suivant que l'on se rapproche, ou s'éloigne, d'un point pris sur la directrice en question. Enfin, il relève que :

> Le trajet du point qui décrit l'hélicoïde et par conséquent l'hélicoïde lui-même, est caractérisé topologiquement de la manière la plus simple par la combinaison des dénominations choisies pour les deux mouvements.

Par exemple, poser (12)3 revient à désigner l'hélicoïde décrit par un point se déplaçant cycliquement dans le sens de 1 vers 2, et progressivement vers 3 (p. 49).

---

[45] *i.e.* le résultat de la réflexion dans un miroir plan.

[46] p. 40. En note, il illustre ces distinctions par les exemples suivants : « Un homme, sur la rive opposée d'une eau dormante, apparaît dans le miroir de l'eau en position pervertie, alors qu'à travers un télescope astronomique, il serait inversé ; quoique les deux images montrent la tête dirigée vers le bas et les pieds vers le haut, dans le cas du dioptrique, on verrait le cœur, si on pouvait l'examiner, à gauche comme dans l'original, et au contraire du côté droit dans le cas du catoptrique. On peut distinguer dans l'écriture une lettre inversée d'une lettre pervertie. Le V latin inversé donne un Λ ; le R latin donne quant à lui un Я cyrillique par perversion ; un L latin perverti et inversé donne un Γ grec. » En un autre endroit, il présente la perversion comme désignant l'effet de changer un nœud quelconque en sa propre image dans un miroir plan.

[47] „Der Helikoïde oder Wendellinie".

La remarque suivante est particulièrement intéressante et mérite d'être relevée :

> On peut aisément concevoir que des variétés de configuration de la conductrice ou de la ligne cyclique, mais aussi bien des changements de forme et de situation de celles-ci, ainsi d'ailleurs que des variations dans la vitesse et des changements de la vitesse du mouvement cyclique ou encore du mouvement de translation du point engendrant l'hélicoïde, n'entraînent dans l'hélicoïde, et ce, quel que soit le nombre de ces variations, que des différences de niveau de la suite de chiffres du type mentionné ci-dessus, et peuvent donc être considérés pour l'instant comme essentiellement géométriques. De même l'inversion du sens des deux mouvements par laquelle le point placé sur le trajet hélicoïdal devient rétrograde, n'entraîne qu'une différence phoronomique, qui fait que nous pouvons considérer comme topologiquement équivalents les trajets engendrés par (1 2)3 et par (1 2) $\overline{3}$. Seule l'inversion du sens d'un seul des deux mouvements associés ou, ce qui revient au même, l'échange entre position d'axe droit et d'axe gauche lors de la détermination des points 1 et 2 sur la circonférence de la boucle avec maintien des mêmes symboles, est susceptible d'engendrer une modification topologique de l'hélicoïde. (p. 49-50)

Selon que la boucle est en position d'axe droit ou en position d'axe gauche, on utilise une forme de type (12)3 ou de type [12]3. Ce faisant, les quatre-vingt-seize formes hélicoïdales distinctes se décomposent d'après leur *type de torsion*, suivant ces deux espèces de forme, dont (12)3 et [12]3 sont des représentants, en *dextrogyres* ou *dexiotropes* et en *lévogyres* ou *laeotropes*, respectivement (p. 51). Listing revient longuement sur l'usage courant que l'on fait de ces dénominations : notamment dans le domaine technique, à propos des dénominations de « droite » et de « gauche » des vis et de leur extension aux torsions en forme de vis (engrenages de montres, les ailes des moulins à vent, l'hélice des bateaux, la pompe en spirale, la vis d'Archimède, les escaliers en colimaçon, les colonnes torses et autres ornements architecturaux en forme de vis, le ressort à boudin, les ressorts des chronomètres… Il n'exclut pas le retordage et le nattage, « les lisses ou fils entrant dans la fabrication des cordes, des cordons et des guimpes »…). Une telle distinction est également discutée en conchyliologie (elle est « de tout premier intérêt pour l'étude de la morphologie des escargots » [p. 53]…) et en botanique.

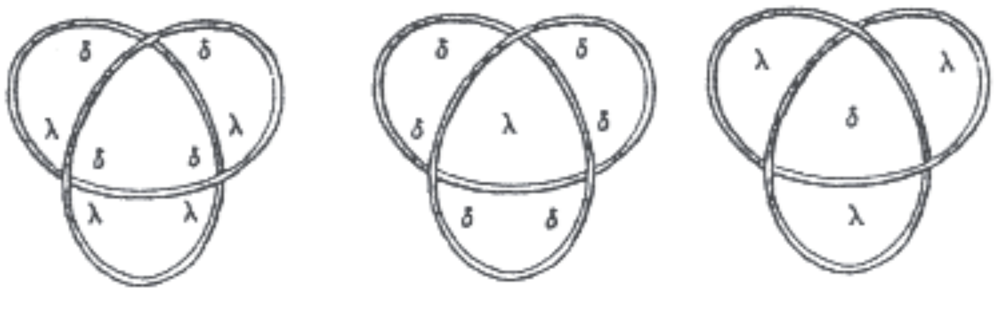
Laissons ici de côté les cas plus difficiles considérés par la suite qui concernent les hélicoïdes *doubles* ou *multiples* (les dits « hélicoïdes d'ordre supérieur »), mais notons cependant qu'ils conduisent Listing à un cas plus élémentaire dont le rôle est essentiel pour les « complexions linéaires » dans l'espace, et à un moindre degré pour les « complexions planes » :

> […] l'étude topologique des formations quelconques dans l'espace doit désormais être le plus souvent à leur projection sur une surface – plane ou

> sphérique – où les lignes projectives, encore appelées rayons, sont supposées être, pour le dire de la façon la plus générale, homocentriques, c'est-à-dire parallèles, ou si on les prolonge suffisamment, supposées passer par un point commun : l'œil de l'observateur. Dans de telles représentations en deux dimensions, une distinction de la situation relative des différentes parties de corps, de plans ou de lignes qui possèdent des points d'image communs s'avère nécessaire pour reconnaître les objets qui se recouvrent mutuellement dans l'image comme telle, et en tirer leurs positions relatives et leurs distances par rapport à l'œil de l'observateur sans avoir à recourir à d'autres projections. Les règles habituelles du dessin offrent des moyens suffisants pour atteindre ce but dans la représentation des corps et des plans, de même pour les lignes lorsqu'il s'agit de représenter des corps linéaires dans l'espace (tiges, fils, ficelles, etc.) (p. 66-7)

Les conventions de représentation qui sont faites par Listing lui permettent de distinguer plus facilement qu'auparavant la nature d'un « croisement » [*Kreuzeug*] dans un dessin projeté sur un plan : de savoir si l'on a affaire à un « surcroisement » [*Uberkreuzung*] ou à un « entrecroisement » [*Durchkreuzung*][48]. Il appelle « point nodal »[49] le point d'intersection qui résulte de la projection d'un surcroisement sur un plan.

Laissons également de côté la méthode défectueuse, déjà très bien analysée par Tait[50], qui devait permettre à Listing, une fois désignés par les symboles λ et δ les espaces angulaires produits par un surcroisement, de distinguer effectivement des « complexions linéaires » comme les suivantes qui, projetées, sont identiques.



À partir d'elles, Listing se pose plusieurs problèmes intéressants, dont celui de la « réduction » : la première complexion ci-dessus peut être réduite à un simple anneau non noué avec disparition des croisements ; dans les deux autres le nombre de croise-

---

[48] Ainsi, par exemple dans le cas de fils, un « surcroisement » suppose l'existence d'un fil en dessous ou au-dessus de l'autre dans l'espace ; dans un « entrecroisement », on a un point d'intersection dans l'espace.
[49] *Ibid.*, p. 68.
[50] [Tait 1876-77, 306-317]. Voir également [Turner & van de Griend 1996, 213-219].

ments ne peut être réduit « par transformation ». La première forme est dite « réductible », les deux autres « réduites ». Listing observe que ceci est « étroitement lié au fait que dans les deux dernières figures, toutes les parcelles sont monotypes ; en revanche, dans la première figure, une seule (l'anse inférieure) est monotype ; les autres, amphitypes » (p. 69). C'est à cette occasion que l'espace « extérieur » est pour la première fois pris en considération comme « parcelle indépendante » (*amplexum*).

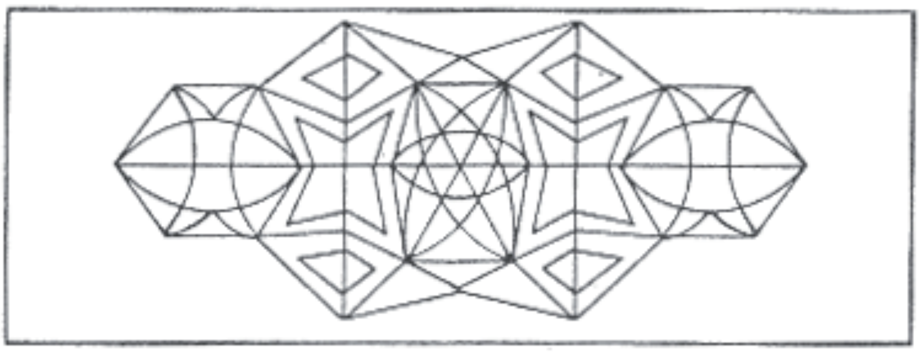
Son long mémoire se poursuit par une esquisse de « quelques autres secteurs de la topologie dont l'approfondissement sera réservé à des occasions futures » (p. 74). Listing évoque ainsi les complexions linéaires, « c'est-à-dire des lignes quelconques, droites ou courbes, des agrégats de telles lignes » (p. 74)[51] et montre que :

> Une complexion linéaire peut être considérée dans sa totalité comme l'agrégat d'un nombre déterminé de traits continus, dont chacun possède deux points terminaux ou points d'extrémité qui sont situés sur des points de réunion d'un nombre impair de lignes. (p. 75)

D'où il déduit un nouveau type de problème :

> Donner, pour chaque complexion déterminée, fût-elle la plus embrouillée, le nombre minimal de traits continus par lesquels on peut la décrire, à condition qu'aucune partie n'en soit parcourue plus d'une fois. (p. 75)

Parmi les exemples cités figurent celui des quatorze traits nécessaires pour la grille d'un échiquier de soixante-quatre cases et celui de la figure suivante, dû à Clausen, que l'on peut dessiner d'un seul trait[52] :



[51] „Linearcomplexionen, d.h. beliebige gerade oder krumme Linie oder Aggregate solcher Linien, können in Einer Fläche – Ebene oder Kugelfläche – enthalten sein, oder aber den Raum“ in jedweder Richtung durchsetzen.“ (p. 59)

[52] Elle ne possède que deux points « impairs » : les deux points de réunions de cinq traits à chaque extrémité de l'axe horizontal.

D’autres tâches attendent encore cette *Topologie*, notamment celle d’entreprendre « le regroupement d’un certain nombre de nœuds différents, en usage par exemple dans l’artillerie, le génie, la marine, le tissage ou les nœuds utilisés ailleurs » (p. 80).

Pour la suite de son travail, Listing annonce que les précédentes considérations sur la position devront être élargies aux cas où le nombre des axes positionnels est supérieur à trois, et qu’il devra être tenu compte de la *situation* : « c’est-à-dire [de] la position des lignes droites qui relient les éléments entre eux. » À ces recherches topologiques futures, il faut associer celles qui porteront sur la « *symétrie* de l’espace et du mouvement », un sujet qu’il considère comme fécond :

> La symétrie échoit moins aux ressorts de la géométrie qu’à ceux de la topologie. Les lois de la symétrie jouent un rôle essentiel, d’une part dans la morphologie des êtres organisés, et d’autre part en cristallographie tout particulièrement[53].

On peut comprendre, après coup, en dépit de déclarations qui paraissent prophétiques, qu’un lecteur moderne tout occupé par la seule « préhistoire » de la topologie n’ait pas voulu accorder une grande importance à ces « études préliminaires ».

En revanche, il en va tout autrement avec le second écrit de Listing ; il est sans doute plus familier et plus en accord avec ce que nous voulons reconnaître et retenir aujourd’hui comme étant du ressort de la « topologie ».

---

[53] *Ibid.*, p. 81. D’où l'importance dans un tel contexte qu’accorde Listing au célèbre traité de cristallographie de W. H. Miller ([Miller 1839]).

Cens des complexes spatiaux ou généralisation du théorème d'Euler sur les polyèdres[54]

Le titre de cet article nous ramène directement au développement précédent sur le théorème d'Euler, dont la généralisation réussie fera parfois parler de « Théorème de Listing » ou encore de « Théorème du Cens ». De plus, cette généralisation est d'emblée présentée, à côté du « recensement des complexes », comme l'un des principaux objectifs visés. Paradoxalement pour nous, Listing retient entre plusieurs formulations du titre de cet écrit fondateur celle où ne figure pas le mot *Topologie*[55]. Ce n'est pas la seule « surprise » qui attend un lecteur moderne : Listing ne dit rien à propos des travaux de Riemann[56]. Pour ajouter à la confusion, on pourrait relever le fait que Listing connaît l'auteur et son œuvre : Riemann sera un temps participant de son séminaire et son plus proche voisin pendant quelques années lorsque qu'il occupera le second logement gratuit de l'observatoire de Göttingen (dès mai 1858[57]) ; enfin, Listing tient à se rapporter dès les premières pages de son *Census* à ses prédécesseurs les plus influents. Il faut peut-être voir dans cette façon d'agir une intention délibérée de la part de Listing de mettre en avant la portée restreinte annoncée de ce nouvel écrit, une fois comparée à la

---

[54] [Listing 1861]. Ce long mémoire (de 84 pages et de 65 figures en deux planches) a été réédité en livre de poche par l'Université du Michigan (en allemand, dans les *Reprints from the collection of the University of Michigan Library*, le 27 avril 2009), de même que plus récemment les *Vorstudien zur Topologie* (Nabu Press, le 16 mars 2010). Pour le choix du mot *Cens*, on trouve dans [Müller 1900] les traductions suivantes : « Census oder Schätzung [Praktisch Arithmetik] : *Cens* » et « Census räumlicher Gebilde [Ausdehnungslehre] : *Cens des figures de l'espace* ». Ce mot renvoyant selon ses propres critères à une taxinomie. À ce propos, nous retiendrons que le *Trésor de la Langue française informatisé* (TLFi) traite de la « taxinomie (taxonomie) comme d'une « science des lois et des principes de la classification des organismes vivants ; *p. ext.*, science de la classification », d'une « classification d'éléments ; suite d'éléments formant des listes qui concernent un domaine, une science. » Listing écrit aussi, à propos du rôle échu à son *Attribut* : „Durch das Attributiv wird dem numerativen Element des Census gleichsam ein taxatorisches hinzugefügt." ([Listing 1861, §. 37, 153]).

[55] Aujourd'hui, des 31 mots qu'il introduisit pour la circonstance dans sa discipline « quasi-mathématique », outre quelques deux ou trois autres mots que l'on retrouve dans d'autres domaines, c'est le seul qui ait subsisté et dont on lui reconnaît la paternité.

[56] Rappelons que le *Larousse du XX^e^* va jusqu'à définir, abusivement, la topologie comme « branche de la géométrie édifiée par Riemann et dans laquelle on étudie les propriétés de l'espace, ces propriétés étant qualitatives seulement et toute idée de mesure étant écartée. (Article « Topologie »)

[57] Breitenberger s'interroge sur leur relation, sur « pourquoi ces deux hommes ne découvrirent jamais combien ils avaient à se dirent l'un à l'autre » [Breitenberger 1999, 919] ; mais il se limite à l'évocation de certaines des différences qui auraient pu expliquer cette « énigme » : à un Listing « maniaco-dépressif léger qui la plupart du temps de sa vie d'adulte a oscillé entre des dispositions d'esprit opposées » (p. 911), mal marié et père de deux filles (l'une née en 1848, l'autre en 1849), « expansif », dont il compare le style d'activité à celui d'un « assidu collectionneur de timbres » (p. 919), « traînassant » à l'excès sur les détails, qui avait cependant reconnu très tôt le génie de son voisin qu'il connaissait bien (p. 918), il oppose un Riemann qui partage comme lui de réelles difficultés économiques, tuberculeux (contagieux, [p. 919]), en charge de ses sœurs, timide, un « artiste créatif », qui va droit au cœur des choses, qui préfère toujours l'expression *analysis situs* à celle de *Topologie*.

généralité de la *Topologie* décrite dans les propos introductifs de ses *Études préliminaires*. Le mot *Cens*, entendu tel « la relation entre le nombre de points, lignes, surfaces et espaces [solides] du complexe et des attributs de ses composants »[58], est sans doute préférable à celui de *Topologie*[59] dès lors que ne seront posés que des problèmes de *généralisation du théorème d'Euler* et de classification subséquente de *Complexes spatiaux*. Fort de cette distinction, on pourrait comprendre l'absence de référence à l'œuvre pionnière de Riemann, dont les intérêts les plus immédiats diffèrent de ceux mis en avant dans le *Census*.

Il n'est donc pas étonnant que J. C. Pont tienne dans son ouvrage sur la préhistoire de la topologie algébrique à faire figurer chronologiquement Listing avant Riemann, dès lors que le premier déclare d'emblée vouloir poursuivre dans la voie concernée par le théorème d'Euler sur les polyèdres, où s'illustrèrent Legendre, Cauchy, Lhuilier[60], et plus récemment Cayley (et bien d'autres qu'il serait vain de tous rappeler ici). Cependant, Listing fait aussi figure d'homme de transition, car tout en se revendiquant de cette filiation conceptuelle il veut s'en démarquer dès les premières pages de son *Census* en insistant sur sa propre différence. Ce faisant, il franchit une nouvelle étape en montrant que le théorème, objet de très nombreuses attentions et de multiples généralisations depuis les derniers efforts de Euler, est aussi l'affaire de sa *Topologie* ; affaire d'*analysis situs*. Sa réussite est évidente, plusieurs de ses contemporains et successeurs, non des moindres, en témoignent : ils se rapporteront à son œuvre et en feront une large publicité ; nous y reviendrons. C'est donc dire que Listing est en son temps un savant reconnu, dont l'œuvre est respectable ; il n'est pas usurpé de reconnaître en lui, ainsi que le fait notamment encore de nos jours J. C. Pont, un précurseur en cette ma-

[58] „Die Relation zwischen der Anzahl von Punkten, Linien, Flächen und körperlichen Räumen der Complexe und den Attributiven ihrer Bestandtheile" ([Listing 1861, 181]). Voir Art. 37. Pour l'*attribut*, „eine aus den Modalitäten der Cyklose, der Periphraxis und der unendlichen Ausdehnung abgeleitete Zahl", voir p. 153-4.

[59] Cependant, sa *Topologie* est bien présente et il ne se privera pas de s'y rapporter, parfois simplement de l'évoquer, à plusieurs reprises tout au long de son mémoire. Ainsi, par exemple prises parmi d'autres, on la retrouve dans des expressions telles que „*topologischen Eigenschaften*, d. i. solchen abhängt, die sich nicht auf die Quantität und das Maas der Ausdehnung, sondern auf den Modus der Anordnung und Lage beziehen." (p. 109), ou encore „Wenn aber in gewissen Gebieten geometrischer oder topologischer Analyse die Constituenten mit anderen von neuen Modalitäten abhängigen Numerativen ausgerüstet werden (s. beispielsweise Vorstudien S. 870)..." (p. 180), etc. Précisons que Listing proposera aussi des cours de topologie, mais c'est bien encore nommément d'*analysis situs* qu'il traitera. On notera cependant qu'il existe une différence entre ces vocables, nous y avons fait allusion précédemment ; on en retrouve encore trace dans le *Vocabulaire* de Felix Müller : « topologie [analysis situs] : *Topologie* » ; «Topologie oder Gestaltenlehre (polyedrale Raumteilungen) [analysis situs] : *topologie* ».

[60] Avec Lhuilier le « polyèdre » a déjà changé de nature ; c'est bien d'abord dans ce changement aussi que s'inscrit l'approche de Listing qui par la suite débordera considérablement celle de Lhuilier.

tière digne de figurer au même titre qu'un Euler ou un Riemann au rang de ceux qui donnèrent des « béquilles »[61] à la topologie.

Le Théorème d'Euler est bien au cœur de son étude, dont le point culminant sera le dit *Théorème de Listing* (ou du *Cens*). Mais l'approche de Listing ne s'inscrit pas dans les extrêmes d'un E. de Jonquières[62], elle se démarque aussi de la seule quête de contre exemples conçus pour invalider une précédente démonstration, notamment celle particulièrement réussie d'un Lhuilier, qui l'anticipe et dont il tire de réels enseignements. Ce qui intéresse le plus Listing dans ces successives corrections d'« erreurs » du théorème d'Euler, ce ne sont pas tant, écrit-il, les méthodes appliquées que les généralisations, les élargissements [die Erweiterungen] eux-mêmes de ce théorème.

L'élargissement qu'il propose à son tour est de loin le plus considérable : non seulement, se limitant aux seuls polyèdres, il étend la proposition d'Euler, mais avec l'introduction d'un nouvel objet mathématique, le *complexe spatial*, il ira beaucoup plus loin ramenant cette proposition ainsi étendue à un simple cas particulier d'un théorème autrement plus général. Une généralité qui a bien sûr des exigences plus accentuées[63], outre celle de ne plus pouvoir s'en tenir à une *intuition* qui semblait alors convenir et suffire à tous dans le cas du polyèdre à l'heure d'en considérer les « sommets », les « arêtes » et les « faces » : elle imposera un autre dépassement lorsqu'on lui préfèrera le *complexe spatial*.

> Dans un premier temps, nous entendons par complexe spatial toute configuration de points, de lignes et de surfaces dans l´espace, les lignes et surfaces pouvant être droites ou courbes, ouvertes ou fermées, limitées ou illimitées, tous les éléments devant toutefois être liés les uns aux autres pour être considérés comme UN complexe[64].

Cette nouvelle entité qui divise « parfaitement ou imparfaitement » l'espace illimité dans lequel elle est plongée, et dont les parties sont « complètement ou partiellement limitées »[65] d'une manière quelconque, accentue l'importance qu'il y aura à déterminer ses *frontières*[66] et les relations entre ses *constituants*.

---

[61] [Pont 1974*a*]. Il reviendra à un autre élève de Gauss de lui donner des « ailes ».
[62] [Jonquières 1890].
[63] « Plus la généralité visée est grande et plus les concepts de départ devront être rigoureusement définis, si l'on ne veut pas courir le risque de perdre en précision ce que l'on a gagné en généralité. » Trad. [Pont 1974*a*, 45]
[64] „Unter einem *räumlichen Complex* verstehen wir vorerst jede beliebige Configuration von Punkten, Linien und Flächen im Raume, die Linie und Flächen mögen gerade oder krumm, offen oder geschlossen, begrenzt oder unbegrenzt sein, nur dass alle die Elemente unter sich zusammenhängen müssen, um zu Einem Complex gerechnet zu werden." ([Listing 1861, 100-101]).
[65] ([Listing 1861, 99].
[66] Pour reconnaître plus facilement la nature et la constitution (à partir des constituants des curies inférieures) de la frontière de l'objet considéré, Listing va créer une nouvelle écriture symbolique (Voir ([Listing 1861], « 6. De la

Une première observation, résultante de l'approche de Listing, est pour constater que l'ancienne formule d'Euler (par exemple, $s + f - a = 2$, où s, f et a sont respectivement le nombre de *sommets*, de *faces* et d'*arêtes*), peut être lue autrement ; sous la forme $s - a + f - 2 = 0$ elle mettait non seulement un terme au « mystérieux 2 » dont parlait Tait[67], en faisant de lui le nombre d'espaces : l'espace circonscrit par le polyèdre, ou son *intérieur*, et l'espace infini qui de toutes parts limite le polyèdre, son *extérieur*, que Listing appelait l'*Amplexum* et qu'il considérait déjà comme une « parcelle indépendante » dans ses *Vorstudien*[68]. Elle est aussi pour constater que, dans une première étape de cette nouvelle approche, les éléments en question, « plus précisément définis », et les complexes qu'ils composent, seront d'abord comptés comme dans la proposition d'Euler, étendue à points, lignes, surfaces et espaces, venus substituer sommets, arêtes et faces. Mais, le « théorème général » escompté ne nécessite pas seulement le nombre de chaque genre d'éléments dans cette relation qui les rassemble :

> […] Il va s'avérer que le théorème ne rend pas indispensable le seul nombre de chaque type d'élément, mais implique pour chaque élément une modification numérique, en conséquence de quoi la proposition ne repose pas immédiatement, mais bien de manière indirecte sur un *dénombrement* et, pour ainsi dire, consiste en un cens fixé selon certaines classes à l'intérieur de chacune des catégories d'éléments.
>
> […] Ce point est si important et omniprésent dans la généralisation, que je n'ai pas hésité à intitulé le théorème 'cens' des complexes spatiaux[69].

C'est dans cette recherche, où sa *Topologie* prendra le maître mot, que s'imposera enfin la prise en compte effective de la nature « topologique » de chaque constituant du complexe, d'où résulteront des termes supplémentaires, des *attributs* qu'il ne sera pas toujours aisé de déterminer parce qu'ils mêlent dimension, connexité et extension à l'infini, où viendront s'y fondre *cycloses*, *périphraxises*[70], elles-mêmes précédées d'une abondance de clarifications développées sur plus de 70 pages, avant de parvenir à l'énoncé du *théorème fondamental* :

---

frontière » [Von der Begrenzung], p. 11-12 et p. 107-108). Ainsi, il désigne respectivement les constituants des curies par les chiffres 1 (les points), 2 (les lignes), 3 (les surfaces) et 4 (les solides) ; dans la suite ordonnée que propose cette écriture symbolique, le premier nombre désignera le constituant limité [begrenzte Element], les suivants seront ceux qui limitent. Par exemple, on aura [20] pour désigner une ligne fermée sans points effectifs (zurücklaufende Curve oder Ringlinie ohne effective Punkte), [300] (rundum geschlossene Fläche ohne effective Linien oder Punkte), [4000] (den ganzen unbegrenzsten Raum, wo die Zahl p der Complexe Null ist). On pourrait rajouter à ces exemples ceux que donne Pont : (4301) l'espace intérieur d'un cône et (4321) l'espace intérieur à un polyèdre usuel.

67 [Tait 1883, 84].

68 [Listing 1847, 55].

69 [Listing 1861, 99].

70 [Listing 1861, 181].

> Dans tout complexe spatial donné, la somme des quatre nombres de participants munis de signes alternés, composés des points, lignes, surfaces et espaces existants, qui dans chacune de ces quatre curies sont formés des parties constitutives et des attributs déterminés à partir des modalités de cyclose, de périphraxise et de l'étendue à l'infini, est égale à zéro. (§ 44, p. 173)

Bien des étapes devront être franchies pour obtenir la formule suivante et comprendre toute la richesse conceptuelle que ne laisse deviner d'emblée l'apparente simplicité de l'« agrégat algébrique » résultant :

$$A–B+C–D = 0\ ;$$

le plus général, qui réunit les nombres de constituants respectifs : sont désignés positivement ceux de dimension paire (points et surfaces), les autres (lignes et espaces) le sont négativement. En effet, pour y parvenir il faudra d'abord comprendre ce que sont devenus nos usuels points, droites, surfaces et espaces, rassemblés en *curies*[71], définir ceux qui sont *effectifs*[72], qui seront pris en compte dans cette formule, comprendre ce qu'est la frontière du complexe considéré dans sa plus grande généralité, et créer une écriture symbolique qui identifiera immédiatement la nature de sa composition ; il faudra détourner de son usage usuel un vocabulaire pris d'autres disciplines, ou le créer, pour désigner le plus justement possible des opérations, des êtres géométriques nouveaux, des situations et des outils qui permettront de dénouer toute la complexité des objets considérés et entreprendre leur classification. On comprendra pourquoi Listing accorde dans son approche une place aussi importante au concept de *connexité* (déjà présent dans son étude de 1847, et au cœur de la définition de sa discipline *quasi-mathématique*). Bien que cette conception ait déjà été considérée par Gauss et développée par Riemann, il semble que Listing doit être reconnu comme le premier à l'avoir étudiée avec autant d'insistance et de détail. On ne saurait nier bien sûr, pour insister une nouvelle fois sur ce point, l'influence de Gauss, ni celle bien plus effective encore de Riemann mais qui n'aboutit pas vraiment puisque Listing, parfaitement au fait de l'article de Riemann de 1857, préférera néanmoins dès 1858 introduire et développer la connexité à sa manière ; il parviendra, avec les insistances, à des résultats voisins de ceux à Riemann, via la cyclose[73] !

---

[71] Curie : « Section ou classe à laquelle appartient un constituant d'un complexe, point, ligne, surface ou corps solide. (Art. 1) » (p. 181).

[72] „Es scheint daher zweckmässig, solche als Constituenten unter den Daten gegebene Punkte so wie alle Elemente, sofern sie in ihrer Curie mitzählen sollen, durch das Beiwort *effectiv* zu bezeichnen, und andere bei den Betrachtungen oder Operationen nur vorübergehend zu Hülfe genommene und in ihrer Curie nicht mitzählende Elemente durch die Bezeichnung *virtuell* von ihnen ausdrücklich zu unterscheiden." (p.102-103)

[73] Le choix qu'il fait n'est pas des plus heureux, si l'on s'en remet aux appréciations de commentateurs : on va par exemple jusqu'à écrire qu'« il ne rend pas justice » à Riemann. À propos de la *cyclose*, on relèvera : „Cyklose, ringmässiger Zusammenhang, Anastomose" [Anastomose n. f. ANAT, MED Communication naturelle ou pratiquée chi-

La richesse « topologique » de Riemann, qui sera abondamment sollicitée, est essentiellement rassemblée dans ses *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*[74] et dans sa *Theorie der Abel'schen Functionen*[75], auxquels il faut ajouter le *Fragment aus der Analysis situs*[76] ; ces écrits sont connus de Listing. À propos de l'article de 1857 nous retiendrons, pour faire suite à ce qui précède sur la connexité, des extraits de la partie consacrée aux « Théorèmes de l'*analysis situs* relatifs à la théorie des intégrales de différentielles exactes à deux termes »[77], où sont faits état de quelques-uns des résultats également présents dans le *Census*, mais où ils sont exprimés sous une forme qui « ne rendait pas entièrement justice à la pénétrante clarté de Riemann »[78].

> Dans l'étude des fonctions qui proviennent de l'intégration de différentielles exactes quelques théorèmes appartenant à l'*analysis situs* sont presque indispensables. Sous cette désignation employée par Leibnitz, quoiqu'en un sens peut-être un peu différent, on peut ranger une partie de l'étude des grandeurs continues où l'on ne considère pas les grandeurs comme existant indépendamment de leur position et comme mesurables les unes par les autres, mais où l'on étudie seulement les rapports de situation des lieux et des régions, en faisant complètement abstraction de tout rapport métrique. (p. 93)

À la suite, il rajoute qu'il a l'intention, dans une autre occasion mais qui malheureusement ne se présentera pas, « de traiter ce sujet qui fait complètement abstraction des relations métriques » ; il se contentera donc ici « d'exposer sous forme géométrique

---

rurgicalement entre deux conduits de même nature et, par extension, entre deux nerfs.] (Art. 9) ([Listing 1861, 85]). Dans le Dictionnaire de Müller on trouve également : „Zusammenhang oder Verflechtung (einer Fläche) [Riemann] : *Connexion.* „Cyklischer Zusammenhang" : *Cyclose*. Le nombre « cyclomatisch » est Le nombre maximal de cycloses possible (la connexion de Riemann moins 1) ; on peut aussi évoquer ici, non sans quelque abus, le 1[er] nombre de Betti (le *nombre cyclomatique* de Kirchoff) et le second nombre de Betti (« le nombre périphractique », également attribué à Maxwell (voir [Maxwell (1873)1881, art. 18–22]). Rappelons que dans *The Century Dictionary and Cyclopedia* ([*CDC*, 1889, 1895]), où Charles S. Peirce figure parmi les "*Contributors*", comme chargé de « la logique, la métaphysique, les mathématiques, l'astronomie et les poids et mesures », où trouve les définitions suivantes : "[Periphractic : […] Having, as a surface, such a form that not every closed line within it can shrink to a point without breaking. Thus, an anchor-ring is a *periphractic* surface." [*CDC* V, 4401] "Periphraxy: […] The number of times a surface or region must be cut through before it ceases to be periphractic." [*CDC* V, 4402]

[74] Sa *Doctordissertation* (Göttingen, 1851) à propos de laquelle J.-C. Pont et R. Taton écriront qu'elle marque un « tournant décisif dans le développement de l'*analysis situs* », qui de « simple jeu de l'esprit » était devenu un « auxiliaire précieux dans l'étude des fonctions analytiques » ([Pont 1974*a*, 59]).

[75] „Theorie der Abel'schen Functionen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 54, 1857, 101-155 ; „1. Allgemeine Voraussetzungen und Hülfsmittel für die Untersuchung von Functionen unbeschränkt veränderlicher Grössen" (p. 101-104) ; „2. Lehrsätze aus der Analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständingen Differentialien" (p. 105-110) ; „3. Bestimmung einer Function einer veränderlichen complexen Grösse durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen" (p. 111-114) ; „Theorie der *Abel*'schen Functionen" (p. 115-155).

[76] [Riemann 1876, 448-451] (2[e] éd. 1892, p. 479-482).

[77] Citations extraites de [Riemann 1898, 93-100].

[78] [Breitenberger 1999, 919].

quelques théorèmes nécessaires pour l'intégration des différentielles exactes à deux termes. » (p. 93)

> Quand sur une surface F l'on peut mener n courbes fermées $a_1, a_2, \ldots, a_n$, qui, soit qu'on les considère séparément, soit qu'on les considère réunies, ne forment pas un contour d'encadrement complet d'une partie de cette surface, mais qui jointes à toute autre courbe fermée forment alors le contour d'encadrement complet d'une partie de la surface, la surface sera dite $(n+1)$ fois connexe [(n+1*fach zusammenhangende Fläche*]. (p. 95)

> Une surface F, $(n+1)$ fois connexe, peut, par l'effet d'une section transverse [*Querschnitt*], c'est-à-dire d'une coupure partant d'un point du contour d'encadrement, traversant l'intérieur de la surface et aboutissant en un point du contour d'encadrement, être transformée en une surface F', n fois connexe. Les parties du contour d'encadrement, à mesure qu'elles prennent naissance par l'effet de la section, jouent le rôle de contour pendant toute la continuation de cette opération, en sorte qu'une section transverse ne peut traverser aucun point de la surface plusieurs fois, mais peut prendre fin en un point de son propre cours antérieur. (p. 95-6)

Laugel préfère traduire le mot „*Querschnitt*" par « section transverse », pour marquer la différence avec le mot « rétrosection » utilisé pour désigner la „*Rückkehrschnitt*" (Picard, Appell et Goursat), que n'emploie pas Riemann[79].

> Une surface $(n+1)$ fois connexe est décomposée, par conséquent, en une surface n fois connexe par toute section transverse qui ne la morcelle pas. (p. 97)

Nous nous en tiendrons à ces très modestes extraits de l'œuvre topologique de Riemann, aujourd'hui très bien connue et encore abondamment commentée ; nous ne chercherons pas non plus à expliciter le détail de la progression réalisée par Listing, ni à commenter les nombreuses difficultés qui relèvent autant du lexical que de démonstrations mathématiques et de leurs références, ou à en signaler les erreurs et les complications parfois trop exclusives bien que nécessaires, nous renvoyons le lecteur heureusement curieux à la lecture du trop mal connu *Census* de Listing et aux études déjà existantes qui en ont été faites[80]. Ce que nous préférons plutôt privilégier ici est ce que diront ou préféreront retenir de cet écrit quelques auteurs influents que nous avons déjà interpelés, qui nous donnerons ainsi l'occasion de nous plonger autrement dans cette initiation originale.

---

[79] Voir la note 1 de Laugel, p. 96. On aura également noté dans la citation en question le rapport au temps, celui de l'état de succession évoqué.

[80] Nous retiendrons notamment : [Pont 1974*a*, 41-58], [Biggs 1993, 109-113]) et le chapitre particulièrement intéressant que consacre à cette étude l'ouvrage [Murphey (1961) 1993] (chap. IX, p. 194-211).

Cayley et le « Théorème de Listing ».

Listing fait mention dans son *Census* de l'article daté du 8 mars 1861 d'Arthur Cayley, « On the Partitions of a Close »[81], mais c'est pour reconnaître aussitôt en note (note 1, p. 98) qu'il ne s'inscrit pas exactement dans la continuité des efforts de ses prédécesseurs, de ceux qui œuvrèrent sur le théorème d'Euler qui nous intéresse, que ces recherches se rapprochent bien des siennes, mais qu'elles demeurent cependant trop exclusivement restreintes.

En effet, Cayley part de la formule $F + S = E + 2$, dans laquelle F, S et E sont respectivement les nombres de faces, sommets et arêtes d'un polyèdre qu'il imagine projeté sur le plan d'une face quelconque de telle façon que les projections de tous les sommets n'appartenant pas à cette face tombent à l'intérieur de celle-ci. On a donc affaire à un polygone partagé dans lequel $F = P + 1$ (où P désigne le nombre de parties qui composent ce polygone) ; d'où la relation $P + S = E +1$ (S est le nombre de sommets et E le nombre de côtés de la figure plane)[82]. Observant ensuite qu'une telle formule exclue des cas tels que celui par exemple d'un polygone divisé en deux parties (par polygone intérieur entièrement détaché de lui), et dans le but de l'étendre de ceux-ci, Cayley introduit la formule suivante

$$P + S = E +1+B$$

Dans laquelle B désigne le nombre « coupures de contour » (*breaks of contour*) défini de la manière suivante : on observe d'abord que les côtés d'un polygone sont des lignes droites, dont on peut voir « au premier coup d'œil » que la théorie ne serait pas modifiée si on levait cette restriction en permettant aux côtés de devenir des lignes courbes. Cependant, en procédant de la sorte étaient introduites des figures fermées limitées par deux côtés, voire même par un seul qu'il appelle un « contour » (à savoir une « ligne fermée qui ne se coupe ni ne se rencontre elle-même », p. 63) .C'est donc, d'après lui, une nouvelle théorie qui voyait ainsi le jour, celle des « Partitions of a Close » ; un « fermé » (*close*) étant un espace délimité tel qu'aucune partie de lui ne peut être jointe à toute autre par une ligne sans qu'elle ne coupe la frontière ; cette dernière peut être considérée comme la « limite d'un simple contour, ou de deux ou plus contours entièrement situés à l'intérieur du fermé » (p. 63). Suivent d'autres définitions pour aborder la nouvelle généralisation (p. 63-64) :

[81] [Cayley 1861] (ou [Cayley *CP* (V) 1892, 62-65]).
[82] [Cayley (V) 1892, 62].

> L'excès au dessus de l'unité du nombre des contours qui constituent la frontière d'un fermé est la *coupure de contour* d'un tel fermé ; dans le cas d'un fermé délimité par un seul contour, la coupure de contour est zéro. (p. 63)

-) Le *sommet* sera : un point où une courbe se coupe ou se rencontre elle-même, où rencontre une autre courbe ; chaque extrémité d'une courbe ouverte, tout point isolé, tout point pris sur un *contour* (en l'absence d'un tel point, le contour est dit « pur » (*mere contour*))

-) Le *côté* sera : le chemin entre un sommet et lui-même, ou un autre sommet ; on remarque qu'un contour avec un point dessus est un côté, qu'un pur contour n'en est pas un (p. 63-64).

Cayley en vient ensuite à considérer un fermé limité par $\beta + 1$ où pour tout partage, P est le nombre des parties, S le nombre des sommets, E le nombre des côtés et B le nombre des coupures de contour ; alors, dans le cas d'un fermé non partagé on aura $P = 1$, $S = 0$, $E = 0$ et $B = \beta$, d'où :

$$P+S+\beta=E+1+B.$$

Cayley montre que « cette équation demeure valide quelque soit la manière dont le fermé est partagé » (p.64), et s'arrête à deux cas : le premier considère la surface d'un plan limitée par un pur contour à l'infini. Dans le cas du plan infini, pour lequel on a β=0, d'où $P+S=E+1+B$. Le second cas est plus intéressant et concerne une surface sphérique : la totalité de celle-ci est considérée comme un fermé limité par 0 contour (p. 64), on a $\beta = -1$, d'où l'équation : $P+S=E+2+B$. Il achève son article en observant :

> par conséquent, si la sphère est divisée en deux parties par un pur contour, $P = 2$, $S = 0$, $E = 0$, $B = 0$, et l'équation est satisfaite. Et en général, lorsque $B=0$, alors $P + S = E + 2$; ou, écrivant F à la place de P, alors $F + S = E + 2$, qui est l'équation d'Euler pour un polyèdre. (p. 65)

Dans une note ajoutée après la publication de ce premier article, Cayley remarquait encore :

> La généralisation qui est donnée ici du théorème d'Euler $S + F = E + 2$, est un premier pas fait en direction de la théorie développée dans le mémoire de Listing 'Census räumlicher Complexe or Verallgemeinerung des Euler'schen von den Polyedern' […][83].

Le 12 novembre 1868, Cayley fera un court rapport, de moins de 15 lignes, sur le *Census* de Listing à la *London Mathematical Society*[84], dans lequel il évoquera le *théorème fondamental*, à savoir la relation $a - (b - k) + (c - k' + \pi) - (d - k'' + \pi' -$

[83] [Cayley *CP* (V) 1892, 617].
[84] *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. II (1866-1869), 103-104 (voir [Cayley *CP* (V) 1892, 22]).

$\omega) = 0$ qui existe dans n'importe qu'elle figure entre a le nombre des points, b le nombre de lignes, c le nombre des surfaces, d le nombre des espaces, et « certaines quantités supplémentaires $k, k', k'', \pi, \pi', \omega$ ». Il relève que ces quantités supplémentaires sont nulles pour une classe étendue de figures, et que la relation se réduit alors à la forme $a - b + c - d = 0$; à la suite il retient un exemple, celui d'une boite, qui doit montrer l'intérêt de ces quantités : lorsque la boite est fermée, $a = 8$, $b = 12$, $c = 6$ et $d = 2$. Si la boite est ouverte, $a = 10$, $b = 15$, $c = 6$ et $d = 1$, si l'on retire son couvercle, $a = 8$, $b = 12$, $c = 5$ et $d = 1$; dans tous les cas $a - b + c - d = 0$. Si, de plus, on retire aussi le fond de cette boite, on aura $a = 8$, $b = 12$, $c = 4$ et $d = 1$: mais dans ce cas, une des quantités supplémentaires doit être prise en compte, $k'' = 1$. Cayley se limitera alors à relever que la relation du théorème de Listing prend la forme $a - b + c - (d - k'') = 0$, et à conclure que : «La plus grande difficulté et l'intérêt du Mémoire [de Listing] est dans la détermination des quantités supplémentaires ».

Le second article de Cayley, "On Listing's Theorem"[85], interpelle cette fois plus directement le *Census* de Listing, en neuf pages dont près de sept d'entre elles son consacrées à des exemples servant à illustrer le théorème en question. Pour lui il s'agit d'une « généralisation du théorème d'Euler $S + F = E + 2$ » ; le « théorème de Listing » propose comme relation

$$A + C = B + D + (p - 1),$$

où

$$A = a,$$

$$B = b - \kappa',$$

$$C = c - \kappa'' + \pi,$$

$$D = d - \kappa''',$$

a est le nombre de points ; un point est toujours simple (on ne tient pas compte de sa multiplicité). Il est soit isolé, soit situé sur une ligne ou une surface.

b est le nombre de lignes (courbes ou droites). Si la ligne ne se referme pas sur elle-même elle a un point en chacune de ses extrémités ; si elle se recoupe, il doit y avoir un point en chaque intersection. En général, un point placé sur une ligne est entendu comme une extrémité (une frontière [*boundary*]) de celle-ci. « Donc, une ligne est

[85] [Cayley 1873] (ou [Cayley *CP* (VIII) 1895, 541-547]). Il ne fait aucun doute que cet intérêt de Cayley pour le travail de Listing est premièrement à rattacher à ses études en théorie des graphes qu'il conduisait sur les *arbres* et qui remontaient à la fin des années 1850 (Voir notamment [Cayley 1857], ou [Cayley *CP* (III) 1890, 172-176]).

soit une “oval” [ovale] (c’est-à-dire, une courbe fermée sans intersection et de forme quelconque), une “punctate oval” [ovale ponctuée] (ovale avec un point simple dessus), ou soit une « biterminale » (ligne terminée par deux points distincts). Par exemple, une figure en forme de huit est prise comme deux ovales pontuées ; une ovale sur laquelle sont placés deux points équivaut à deux biterminales.

k’ Par définition, il serait « la somme, pour toutes les lignes, du nombre de circuits pour chaque ligne » (p. 541). Pour une ovale le nombre de circuits est égal à 1 et pour toute autre ligne (ovale ponctuée ou biterminale) il est égal à 0 ; *k’* est de fait le nombre d’ovales. Il existe des définitions analogues pour *k’’* et *k’’’*.

c est le nombre de surfaces. Une surface est toujours finie, et si elle ne se renferme pas sur elle-même [i.e. *not rentrant*], elle doit avoir une ligne en chaque extrémité [*termination*]. Si la surface se coupe elle-même, on a en l’intersection un point ou une ligne. En général, un point ou une ligne, placé sur une surface, est considéré comme une extrémité ou une frontière. Si une ligne coupe une surface, il y a en l’intersection un point qui constitue une extrémité ou une frontière aussi bien de la surface que de la ligne. « Donc, une surface est soit un ovoïde [*ovoid*] (simple surface fermée, telle que la sphère ou l’ellipsoïde), un anneau (surface telle qu’un tore […]), ou soit de forme plus compliquée dont la surface se referme sur elle-même [*rentrant surface*] ; ou encore, une surface limitée en partie par un point ou des points, une ligne ou des lignes[86].

k’’ est la somme, pour les différentes surfaces, du nombre de circuits sur chaque surface. Le mot circuit signifie ici un chemin sur la surface d’un point à lui-même : tous les circuits qui peuvent être amenés à coïncider par une variation continue sont considérés comme identiques ; et le circuit contractile [*evanescible circuit*] qui se

[86] “We may in particular consider a blocked surface having upon it one or more blocks: where by a block is meant a point, a line, or a connected superficial figure composed of points and lines in any manner whatever, the superficial area (if any) included within the block being disregarded as not belonging to the surface, or being, if we please, cut out from the surface. Thus an avoid having upon it a point, and a segment or incomplete avoid bounded by an oval, are of them to be regarded as a blocked ovoid; the boundary being in the first case the point, and in the second case the oval; and so in general the blocked surface is bounded by the boundary or boundaries of the block or blocks. It will be understood from what precedes, and it is almost needless to mention, that for any surface we can pass along the surface from each point to each point thereof; any line which would prevent this would divide the surface in two or more distinct surfaces.” (p. 541)
Toujours à propos de ce vocabulaire tel que le caractérise Cayley, on relèvera ce qui le sépare des définitions rencontrées dans [*CDC* 1889, 1895] : “ Block: […] an inclosed space” ([*CDC* I, 591])
“Oval: … a) a closed curve everywhere convex, without nodes, and more pointed at one end than at other.
b) A curve or part of a curve returning into itself without a node or a cusp.
c) A part of a curve returning into itself without inflections or double tangents.” ([*CDC* V, 4192])”
“Ovoid : I. ‘Egg-shaped’: said of solids. II. ‘An egg-shaped body’.” [*CDC* V, 4211].

réduit au point lui-même est négligé. De plus, on ne compte que les circuits simples, négligeant ceux qui peuvent être obtenus par toute répétition ou combinaison de ceux-ci. Par conséquent, pour un ovoïde, ou tout « 1-ovoïde en blocs » [*one-blocked ovoid*], il y a seulement le circuit contractile, c'est-à-dire, aucun circuit à compter ; mais pour un « 2-ovoïde en blocs » [*two-blocked ovoid*] il y a en outre un circuit, ou que l'on compte pour un ; et ainsi pour un « *n*-ovoïde en blocs » [*n-blocked ovoid*] on compte $n - 1$ circuits. Pour un anneau, il est facile de voir que (outre le circuit contractile) ces circuits sont au nombre de 2 ; et ainsi des autres cas.

π sa définition la plus simple est qu'il désigne le nombre d'ovoïdes (non « en blocs » [*unblocked ovoids*]) ou autres surfaces non limitées par un point ou une ligne.

d est le nombre d'espaces, reconnaissant l'un d'eux comme étant l'espace infini.

k''' est la somme, pour les différents espaces, du nombre de circuits dans chaque espace : le mot circuit signifiant ici un chemin dans l'espace d'un point à lui-même ; tous les circuits qui peuvent être amenés à coïncider par une variation continue sont considérés identiques, et le circuit contractile qui se réduit au point lui-même est négligé. De plus, on compte uniquement les circuits simples, négligeant les circuits qui peuvent être obtenus par répétition ou combinaison de ceux-ci. Donc pour l'espace infini, ou pour l'espace contenu dans un ovoïde, il y a seulement le circuit contractile, ou il n'y a pas de circuit à compter ; et il en est de même pour le cas ou à l'intérieur d'un tel espace on a un nombre quelconque de blocs ovoïdaux [*ovoidal blocks*] (« le terme, je pense, sera compris sans explication » (p. 542)) ; mais si a l'intérieur de l'espace on a une ovale, un anneau, ou autre "anneau en blocs" [*ring-block*], de nature quelconque, alors il y a (outre le circuit contractile) un circuit entrelaçant l'"anneau en blocs", et on le compte pour un ; et ainsi, si il y a *n* "anneaux en blocs", séparés ou s'entrelaçant les uns aux autres d'une quelconque manière, alors […] comptera en conséquence *n* circuits. Ainsi, pour l'espace intérieur d'un anneau (outre le circuit contractile) on compte un circuit ; et il en va de même si on a à l'intérieur de l'anneau un nombre quelconque de blocs ovoïdaux ; mais si il y a à l'intérieur de l'anneau un anneau ovale [*oval ring*] ou autre « anneau en blocs », alors il y a un nouveau circuit, et on compte en tout (pour l'espace en question) deux circuits.

p est le nombre de parties détachées de la figure ; à savoir, le nombre d'agrégats séparés de points, de lignes et de surfaces. Observons que des anneaux entrelacés l'un à l'autre d'une quelconque manière (mais ne se coupant pas) sont considérés comme détachés ; ainsi, deux surfaces fermées, l'une à l'intérieur de l'autre, sont aussi considérées comme détachées. La figure peut être l'espace infini seul ; on a alors $p = 0$.

Nous ne retiendront que quelques exemples, parmi ceux nombreux donnés par Cayley pour illustrer la signification des termes et la nature du théorème, et pour indiquer « de quelle manière pouvait être atteinte une démonstration générale » (p. 542) :

L'espace infini.

a=0,			A=0		
b=0,	k'=0,			B=0	
c=0,	k''=0,	π=0,	C=0,		
d=1,	k'''=0,			D=1	
p=0,				$p-1$	$= -1$
				0	= 0.

Surface sphérique.

a=0,			A=0		
b=0,	k'=0,			B=0	
c=1,	k''=0,	$\pi = 1$,	$C = 2$,		
d=2,	k'''=0,			D=2	
p=0,				$p-1$	$= 0$
				2	= 2.

On observe comme effet : C augmente de 2 ; D et p-1 de 1.

Surface sphérique avec un point dessus.

a=1,			A=1		
b=0,	k'=0			B=0	
c=1,	k''=0,	$\pi = 1$,	C=1,		
d=2,	k'''=0,			D=2	
p=1,				$p-1$	$= 0$
				2	= 2.

Soit l'effet : a augmente de 1 et π diminue de 1 ; c'est-à-dire, A est augmenté de 1 et C diminué de 1.

Surface sphérique avec n points dessus (n ≥ 2).

$$
\begin{array}{llll}
a=n, & & & A=n \\
b=0, & k'=0, & & B=0 \\
c=1, & k''=n-1, & \pi = 1, & C=2-n, \\
d=2, & k'''=0, & & D=2 \\
p=1, & & & \underline{p-1 \quad = 0} \\
 & & & 2 \qquad = 2.
\end{array}
$$

Si on imagine maintenant qu'en plus des n points du cas précédent on rajoute une ouverture (limitée par une courbe fermée) ; on a alors le cas suivant :

$$
\begin{array}{llll}
a=n, & & & A=n \\
b=0, & k'=1, & & B=0 \\
c=1, & k''=n, & \pi = 0, & C=1-n, \\
d=1, & k'''=0, & & D=1 \\
p=1, & & & \underline{p-1 \quad = 0} \\
 & & & 1 \qquad = 1.
\end{array}
$$

On a alors pour effet : a et k' augmentés de 1, B est par conséquent inchangé ; k'' augmente de 1 et par conséquent C diminue de 1 ; d est diminué de 1 et par conséquent D l'est aussi de 1.

Surface sphérique avec m ouvertures (m ≥ 2).

$$
\begin{array}{llll}
a=0, & & & A=0 \\
b=m, & k'=m & & B=0 \\
c=1, & k''=m-1, & \pi = 0, & C=2-m, \\
d=1, & k'''= m-1, & & D= 2-m \\
p=1, & & & p-1 \quad = 0 \\
\hline
 & & & 2-m \quad = 2-m.
\end{array}
$$

En comparant ce cas avec celui précédent d'une surface sphérique avec n points dessus ($n \geq 2$), on peut apprécier les différents effets d'un point et d'une ouverture.

Surface polyédrique fermée.

Soit S le nombre des sommets, F le nombre des faces et E celui des arêtes ; on a alors :

$$\begin{array}{llllll}
a=S, & & & A=S & & \\
b=E, & k'=0, & & & B=E & \\
c=F, & k''=0, & \pi = 0, & C=F, & & \\
d=2, & k'''= 0, & & & D & = 2 \\
p=1, & & & & p-1 & = 0 \\
\hline
& & & & S+F & = E+2.
\end{array}$$

De sorte qu'on a le théorème d'Euler. Observons que ce théorème (d'Euler) ne s'applique pas aux surfaces polyédriques annulaires ou aux enveloppes polyédriques. Par exemple, considérons une enveloppe, les surfaces extérieure et intérieure de celle-ci sont chacune d'elles une surface polyédrique fermée ; $S = S' + S''$, $F = F' + F''$, $E = E' + E''$ où $S' + F' = E' + 2$, $S'' + F'' = E'' + 2$, et par conséquent $S + F = E + 4$. (p. 545)

Le théorème de Listing lui s'applique ; ainsi on a :

$$\begin{array}{llllll}
a=S'+S'', & & & & A=S'+S'', & \\
b=E'+E'', & & B= & & E'+E'' & \\
c=F'+F'', & & C=F'+F'', & & & \\
d=3, & D= & & & & 3 \\
p=2, & p-1 & = 0 & & & 1 \\
\hline
& & & S+F & & = E'+E''+4.
\end{array}$$

Même si de tels exemples font un peu mieux percevoir et dans l'acte comment se constituent et interviennent les fameux *attributs* de Listing, le développement excessivement élémentaire et limité de Cayley n'apporte pas de véritable clarification mathématique du *Census* ; Il permet tout au plus de concevoir son possible rôle dans une théorie des graphes en plein essor[87]. On reste loin des objectifs de Listing, bien loin de la mise en valeur d'une réelle richesse mathématique. Cependant, force est de reconnaître l'importance de cet intérêt de Cayley pour l'œuvre de Listing, en permettant une plus large diffusion de son *Census* il étendra son influence à un large public, qui débordait largement celui des seuls mathématiciens ; à ce titre, nous reviendrons sur les contributions de James Clerk Maxwell et de Charles Sanders Peirce.

James Clerk Maxwell, un intérêt topologique pour la physique entre Gauss, Riemann et Listing.

Maxwell était un réel connaisseur des œuvres de Gauss et de Riemann, également instruit de leurs intérêts respectifs pour la *Geometria situs*[88] et l'*Analysis situs*[89] ; ce qu'il

[87] Ce lien est d'ailleurs suggéré par Cayley lui-même dans son article [Cayley 1874] (ou voir [Cayley *CP*(IX) 1896, 202-203]) ; où on peut lire : « les différents cas de telles ramifications sont […] où la question mathématique de la détermination de telles formes appartient à la classe de questions considérées dans mon article 'On the Theory of the Analytical Forms called Trees', *Phil. Mag.* vol. XIII. (1857), [203], et vol. XVIII (1850), [247], et dans quelques articles sur les *Partitions* dans le même journal. » (p. 203).

[88] Le volume V du *Werke* de Gauss (consacré à ses travaux de physique mathématique) est publié en 1867, on y trouve plusieurs manuscrits et notes publiés pour la première fois et d'un réel intérêt pour Maxwell (dixit [Epple 1999, 314]) ; signalons par exemple à la page 605, dans la partie consacrée au *Nachlass* de Gauss, le texte *Zur Elektrodynamik* (p. 601-630), une phrase bien connue aujourd'hui que relèvera en son temps Maxwell et un problème résolu par Gauss (daté du 22 janvier 1833) qu'il reprendra à son tour et réinterprétera : „Von der *Geometria Situs*, die LEIBNIZ ahnte und in die nur einem Paar Geometern (EULER und VANDERMONDE) einen schwachen Blick zu thun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts. Eine Hauptaufgabe aus dem *Grenzgebiet* der *Geometrie Situs* und der *Geometria Magnitudinis* wird die sein, die Umschlingungen zweier geschlossener oder unendlicher Linien zu zählen. Es seien die Coordinaten eines unbestimmten Punkts der ersten Linie x, y, z ; der zweiten x', y', z' und

$$\iint \frac{(x'-x)(\mathrm{d}y\mathrm{d}z'-\mathrm{d}z\mathrm{d}y')+(y'-y)(\mathrm{d}z\mathrm{d}x'-\mathrm{d}x\mathrm{d}z')+(z-z')(\mathrm{d}x\mathrm{d}y'-\mathrm{d}y\mathrm{d}x')}{\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=V$$

dann ist dies Integral durch beide Linien ausgedehnt $= 4m\pi$ und m die Anzahl der Umschlingungen. Der Werth ist gegenseitig, d. i. er bleibt derselbe, wenn beide Linien gegeneinander umgetauscht werden." Maxwell reviendra sur ce résultat dans une lettre adressée à Tait le 4 décembre 1867 [Voir [Maxwell 1995, 325-327] et dans [Maxwell (1873) 1881], où il écrit : "It was the discovery by Gauss of this very integral, expressing the work done on a magnetic pole while describing a closed curve in presence of a closed electric current, and indicating the geometrical connexion between the two closed curves, that led him to lament the small progress made in the Geometry of Position since the time of Leibnitz, Euler and Vandermonde. We have now, however, some progress to report, chiefly due to Riemann, Helmholtz and Listing." (Vol. II, §. 422 p. 41). Pour faire suite à la déclaration de Gauss, il écrivait encore : "We are here led to considerations belonging to the Geometry of Position, subject which, though its importance was l'est sans doute moins est l'importance considérable qu'il accordera aux travaux de Listing sur les nœuds[90], qu'il fera connaître à son ami Tait en lui fournissant une copie des *Vorstudien zur Topologie*[91]. Plus encore, c'est la part belle qu'il fera au *Census*[92] dont il allait tirer le plus large parti dans son ouvrage *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873) ; *Census* auquel il intéressera notablement un Charles S. Peirce d'abord dubitatif. Nous y reviendrons.

Les quelques extraits de ce *Traité*[93] suivants méritent d'être rapportés. C'est d'emblée dans le *Preliminary*, « De la mesure des quantités » que l'on trouve les premières et nombreuses évocations des enseignements du *Census* de Listing (où Maxwell reprend en partie son résumé de 1869) :

---

pointed out by Leibnitz and illustrated by Gauss, has been little studied. The most complete treatment of this subject has been given by J. B. Listing." (vol. I, p. 16).

89 C'est ce que l'on peut facilement constater dans [Maxwell 1995], à la lecture par exemple des écrits suivants : N°. 304 "Drafts on topology" (*circa* September 1868, [*Geometry of position*], p. 433-438), N°. 305 "Drafts on continuity and topology" (*circa* September 1868, *On physical continuity and discontinuity*, p. 439-442), N°. 306 "Letter to William Thomson" (28 September 1868, p. 443-445) et N°. 317 "Manuscript on the topology of surfaces" (29 December 1868, [*On the geometry of surfaces*], p. 466-469). Ce dernier écrit rappelle, et semble en être inspiré, l'article de Cayley de 1861, "On the partitions of a Close" ; on se rappellera également que le rapport de Cayley sur le *Census* de Listing date du 12 novembre 1868.

90 On sait grâce à la correspondance qu'il eut avec son ami P. G. Tait toute l'importance de ces recherches dont il ne publiera pratiquement rien, qui avaient été suscitées par des travaux de William Thomson (Lord Kelvin, 1824-1907) initiés dès 1867 et concernés par sa théorie des « atomes tourbillons », directement inspirés de l'article de Riemann sur les fonctions abéliennes, déjà évoqué ici, et de l'article de Helmholtz sur le « mouvement tourbillonnaire » en hydrodynamique ([Helmholtz 1858], dont une traduction en anglais due à Tait paraîtra en 1867 ([Tait 1867]). C'est précisément au cours de cette année, et dans la suivante, que Maxwell entreprendra des travaux topologiques d'où ressortiront plusieurs manuscrits en 1868 sur les nœuds et les enlacements. On retrouve dans ces textes que Tait le poussait à publier, mais qui ne paraîtront que très tardivement ([Maxwell 1995]), plusieurs anticipations et notions topologiques de valeur (Voir [Epple 1999, 316-317]) ; Epple en relève plusieurs, tout en observant finalement : "Both Thomson and Maxwell did not yet have a sufficiently clear language to give precise formulations and proofs of their topological results; neither the notion of the genus of a surface nor that of the 'order of connectivity' of a space region were completely clear in their work. Maxwell and Thomson tried to explain their ideas mainly in terms of 'irreconcilable curves' in a domain, but 'reconcilability' meant for them something closer to homotopical rather than homological equivalence. […] A closer analysis shows that it was physical thinking rather than mathematical precision that helped Thomson and Maxwell to find correct results." (p. 316) Pour plus de précisions, on se rapportera également à l'article de Epple, ([Epple 1998]).

91 [Tait 1898, 274] : "Here, as was to be expected, I found many of my results anticipated, but I also obtained one or two hints which, though of the briefest, have since been very useful to me. […] This work of Listing's, and an acute remark made by Gauss (which, with some comments on it by Clerk-Maxwell, will be referred to later), seems to be all of any consequence that has been as yet written on this subject. I have acknowledged in text all the hints I have got from these writers…."

92 Maxwell avait déjà fait un résumé de l'article de Listing dès 1869, le 11 février, à l'occasion d'une réunion de la *London Mathematical Society* (*Procceedings of the London mathematical Society*, 2 (1869) : 165-6 ; voir [Maxwell 1995, 471-2].

93 Pour ces extraits, nous reprenons [Maxwell 1885 (I) et 1887 (II)]), avec une traduction légèrement modifiée par nos soins et dans laquelle nous faisons figurer entre crochets, lorsque cela sera opportun, les expressions utilisées par Maxwell ainsi que ses notes, les autres notes sont nôtres ; nous reprenons également les notations employées par Maxwell.

18.] Il y a toutefois des cas où les conditions pour que *Xdx* + *Ydy* + *Zdz* soit une différentielle exacte [complete differential], à savoir

$$\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}=0,\frac{dX}{dZ,}-\frac{dZ}{dx}=0\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}=0,$$

sont remplies dans une certaine région de l'espace, et où cependant l'intégrale [line-intégrale] prise de *A* à *P* peut avoir des valeurs différentes pour deux contours [lines], tous deux entièrement compris dans la région. Ce cas peut se présenter si la région est en forme d'anneau, et si les deux lignes de *A* à *P* sont situées dans des segments opposés de l'anneau. On ne peut, dans ce cas, passer d'un contour [path] à l'autre d'un mouvement continu sans sortir de la région.

Nous sommes conduits ainsi à des considérations rentrant dans la Géométrie de position, sujet peu étudié, quoique son importance ait été signalée par Leibnitz et illustré par Gauss. Le travail le plus complet sur ce sujet a été donné par J.-B. Listing[*][([*]) *Der Census räumlicher Complexe* (*Gött. Abh.*, vol. X, p. 97 ; 1861).]

Soient *p* points dans l'espace et *l* lignes de forme quelconque joignant ces points de façon que jamais deux lignes ne se coupent et qu'aucun point ne soit laissé isolé. Nous appellerons diagramme[94] une figure composée de cette manière. De ces lignes, *p*-1 suffisent pour relier les *p* points et former un système relié [connected system]. Toute ligne en plus donnera lieu à une boucle ou contour fermé [closed path], ou, comme nous l'appellerons, à un cycle. Le nombre des cycles indépendants dans le diagramme est $k = l - p + 1$.

Tout contour [path] fermé, décrit en suivant les lignes du diagramme, se compose de ces cycles indépendants pris chacun un nombre quelconque de fois et dans une direction quelconque.

L'existence des cycles est appelée cyclose[95], et le nombre des cycles d'un diagramme nombre cyclomatique[96].

Cyclose des surfaces et des régions.

Les surfaces peuvent être complètes [complete] ou limitées [bounded]. Les surfaces complètes sont infinies ou fermées. Les surfaces limitées se terminent par une plusieurs lignes fermées, qui, dans le cas limite, peuvent se réduire à des lignes finies ou à des points.

Une région finie de l'espace est limitée par une ou plusieurs surfaces fermées. De celles-ci, l'une est la surface extérieure ; les autres y sont comprises, sont extérieures les unes aux autres, et sont appelées les surfaces intérieures.

Si la région est limitée par une seule surface, on peut supposer que cette surface se contracte sans cesser d'être continue ou sans se couper elle-même. Si la région est à

[94] Pour Listing, un diagramme est : „eine Linearcomplexion, auf welche ein Constituent durch allmälige Verengerung oder Retraction seiner Grenzen zurückgeführt wird (Art. 13 u. ff.)" ([Listing 1861, 181]).
[95] *Cyklose*, „ringmässiger Zusammenhang, Anastomose (Art. 9)" ([Listing 1861, 181]).
[96] *Cyclodisch*, „ringmässig zusammenhängend, Anastomosirend (Art. 9)" ([Listing 1861, 181]).

simple continuité [of simple continuity], comme l'est une sphère, cette opération pourra être continuée jusqu'à ce que la région soit réduite à un point ; mais, si la région à la forme d'un anneau, on obtiendra finalement une courbe fermée ; et si la région à des connexions multiples [multiple connexions], le résultat sera un diagramme de lignes, dont le nombre cyclomatique [cyclomatic number] est celui de la région. L'espace extérieur à la région a le même nombre cyclomatique que la région, et par suite, si la région est limitée par des surfaces intérieures et extérieures, son nombre cyclomatique est la somme des nombres correspondant à toutes ces surfaces.

Lorsqu'une région renferme d'autres régions, elle est appelée périphractique[97].

Le nombre des surfaces limites intérieures d'une région est appelé son nombre périphractique. Une surface fermée est aussi périphractique, son nombre périphractique est l'unité.

Le nombre cyclomatique d'une surface fermée est deux fois celui de la région qu'elle limite. Pour trouver le nombre cyclomatique d'une surface limitée, on suppose que toutes les frontières [boundaries] se contractent vers l'intérieur sans rupture de continuité, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent. La surface se réduira alors à un point dans le cas d'une surface acyclique [acyclic surface], à un diagramme de lignes dans le cas de surfaces cycliques [cyclic surfaces]. Le nombre cyclomatique de ce diagramme est celui de la surface.

19.] THEOREME I. *Si, dans toute l'étendue d'une région acyclique,*

$$Xdx+Ydy+Zdz=-N\Psi$$

la valeur de l'intégrale [line-integral] prise d'un point A à un point P, le long d'un contour [path] quelconque intérieur à la région, est constante.

Nous montrerons d'abord que l'intégrale prise le long d'un circuit fermé [closed path] quelconque intérieur à la région est égale à zéro. […]

20.] THEOREME II. *Dans une région cyclique pour toute l'étendue de laquelle est satisfaite l'équation*

$$Xdx+Ydy+Zdz=-N\Psi,$$

l'intégrale de A à P, prise le long d'une line tracée à l'intérieur de la région, n'est en général pas déterminée, si l'on ne spécifie le canal [the channel of communication] *entre A et P.*

Soit K le nombre cyclomatique de la région : on peut faire dans la région K sections au moyen de surfaces que nous appellerons diaphragme[98], et ainsi fermer K des canaux de jonction [of communication] ; la région est ainsi ramenée à être acyclique sans que sa continuité soit détruite.

[97] *Periphraktisch*, „allseitig geschlossen, wie sphäroïdische Flächen oder rings umhüllende körperliche Räume (Art. 24, 42)" (*Census*, p. 182). *Periphraxis*, „Eigenschaft einer Fläche oder eines Raumes, wenn sie allseitig zusammenhängen und einen Complex oder Complextheil rings umhüllen. (Art. 24, 42)" ([Listing 1861, 182])

[98] *Diaphragma,* „oder Zwerchfläche, eine acyklodische, durch eine cyklische Linie begrenztz Fläche (Art. 7)" ([Listing 1861, 181]).

L'intégrale [line-integral] prise de *A* à *P* suivant une ligne qui ne coupe aucun de ces diaphragmes sera, d'après le théorème précédent, de valeur déterminée.

Supposons maintenant *A* et *P* infiniment voisins l'un de l'autre [indefinitly near to each other], mais situés de part et d'autre d'un diaphragme : soit *K* l'intégrale [line-integral] suivant le chemin [path] de *A* à *P*.

Soient A' et P' deux autres points de part et d'autre du même diaphragme, et infiniment voisins l'un de l'autre, et soit *K'* l'intégrale suivant le chemin *A'* à *P'*. Je dis que *K=K'*. […]

Donc, l'intégrale [line-integral] prise suivant un contour fermé [closed curve] qui traverse un diaphragme du système dans une direction donnée est une quantité constante *K*, que l'on appelle la constante cyclique [Cyclic constant] correspondant au cycle donné.

Soit une courbe fermée quelconque tracée à l'intérieur de la région et coupant le diaphragme du premier cycle *p* fois dans la direction positive et *p'* fois dans la direction négative ; et soit $p - p'=n_1$. L'intégrale de la ligne [line-integral] suivant la courbe fermée sera alors n_1K_1.

De même, l'intégrale de ligne [line-integral] suivant une courbe fermée quelconque sera

$$n_1\mathrm{K}_1+ n_2\,\mathrm{K}_2+\ldots+ n_\mathrm{K}\,\mathrm{K}_\mathrm{K}\ ;$$

où n_K représente l'excès du nombre des passages positifs sur le nombre des passages négatifs de la courbe à travers le diaphragme du cycle *K*. […]

Des intégrales sur une surface [On Surface-Integrals].

21.] Soit *d*S l'élément de surface, et *ε* l'angle que fait la direction du vecteur quantité [vector quantity] *R* avec la normale menée à la surface du côté positif de cette surface. Alors

$\iint R$ COS $\varepsilon\, d$S est appelée l'*intégrale* [surface-integral] *de R sur la surface S*.

THEOREME III. *L'intégrale* [surface-integral*] d'un flux à travers une surface fermée peut s'exprimer par l'intégrale* [volume-integral] *de sa convergence étendue à tout le volume compris à l'intérieur de la surface*.

Soient *X*, *Y*, *Z* les composantes de *R* ; soient *l*, *m*, *n*, les cosinus des angles formés avec les axes par la normale *S* dirigée vers l'intérieur de cette surface. […]

Si *X*, *Y*, *Z*, sont continus et finis à l'intérieur d'une surface fermée, l'intégrale [surface-integral] de *R* sur cette surface complète sera

$$\iint R\,COS\,dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right) dxdydz.$$

l'intégrale triple étant étendue à tout le volume intérieur à *S*.

Supposons maintenant que *X*, *Y*, *Z* ne soient pas continus à l'intérieur de la surface fermée ; […]

Des tubes et des lignes de flux.

Si l'espace est divisé en tubes, de façon que l'intégrale [surface-integral] sur une section quelconque de chaque tube soit l'unité, les tubes sont appelés *tubes unités*, et l'intégrale [surface-integral] prise sur une surface finie quelconque *S*, limitée par une courbe fermée *L*, est égale au *nombre* de ces tubes qui traversent la surface *S* dans le sens positif, ou, ce qui revient au même, qui passent à travers la courbe fermée *L*.

Donc l'intégrale [surface-integral] sur *S* ne dépend que de la forme de sa limite [boundary] *L*, et non de la forme de la surface à l'intérieur de cette limite.

Des régions périphractiques.

Si, dans l'étendue d'une région limitée extérieurement par une seule surface fermée *S*, la condition solénoïdale

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{\partial Z}{dz}=0$$

est satisfaite, l'intégrale [surface-integral] prise sur une surface fermée quelconque intérieure à la région sera nulle, et l'intégrale [surface-integral] prise sur une surface limitée, intérieure à la région, ne dépendra que de la forme de la courbe fermée qui constitue sa frontière.

Mais ces résultats ne sont pas vrais en général, si la région pour laquelle la condition solénoïdale est satisfaite est limitée autrement que par une simple unique. Car, si elle est limitée autrement que par une seule surface continue, l'une des surfaces limites est la surface extérieure ; les autres sont des surfaces intérieures, et la région *S* est périphractique puisqu'elle renferme d'autres régions qu'elle entoure entièrement. […]

Quand nous avons à nous occuper d'une région périphractique, la première chose à faire est de la ramener à être apériphractique, en menant des lignes L_1, L_2, &c. qui joignent les différentes surfaces intérieures S_1, S_2, &c à la surface extérieure *S*. Chacune de ces lignes, pourvu qu'elle ne relie pas deux surfaces qui sont déjà en communication continue [continuous connexion], réduit d'une unité le nombre périphractique : en sorte que le nombre total des lignes à tracer pour faire disparaître la périphraxie est égal au nombre périphractique, ou au nombre des surfaces intérieures. En menant ces lignes, nous devons nous souvenir que toute ligne joignant des surfaces déjà reliées ne diminue pas le nombre périphractique, mais augmente le nombre cyclomatique.

Quand ces lignes ont été menées, nous pouvons affirmer que, si la condition solénoïdale est satisfaite dans la région *S*, toute surface fermée, tracée entièrement à l'intérieur de la région et ne coupant aucune des lignes, donne lieu à une intégrale [surface-integral] nulle. […]

L'exemple le plus familier d'une région périphratique, à l'intérieur de laquelle la condition solénoïdale est satisfaite, est la région qui entoure une masse exerçant une attraction ou une répulsion inversement proportionnelle au carré de la distance. […]

Maxwell consacre aussi une partie aux relations dextrogyres et lévogyres dans l'espace, où il évoque à nouveau l'opération introduite par Listing sous le nom de *perversion* dans ses *Vorstudien*. On retrouve une nouvelle fois aussi la déclaration suivante :

> C'est précisément la découverte de cette intégrale exprimant le travail effectué par un pôle magnétique qui décrit une courbe fermée en présence d'un courant électrique fermé, et indiquant la relation géométrique de ces deux courbes fermées, qui amena Gauss à déplorer le peu de progrès faits par la Géométrie de Position depuis l'époque de Leibnitz, d'Euler et de vandermonde. Nous avons maintenant à signaler quelques progrès principalement dus à Riemann, Helmholtz et Listing[99].

Charles Sanders Peirce, le recours à la Topologie, faite Synectics puis Topics ou Topical geometry ; le "Théorème Peirce-Listing", ou le "Théorème de Listing" revisité à la lumière de singularités topiques.

Les travaux de Charles Sanders Peirce (1839-1914), "the American Leibniz"[100], sont particulièrement d'actualité depuis quelques années ; en témoignent plusieurs projets d'édition en cours de ses œuvres, ainsi qu'un grand nombre de publications et de thèses, de rencontres nationales et internationales. Logicien, philosophe et métaphysicien de renom, il est aussi reconnu comme mathématicien[101]. Ses intérêts philosophiques (dont la quête d'une « philosophie exacte »[102]) et logiques pour la « continuité » le verseront plus tardivement dans une étude détaillée de la « topologie ». Singulièrement, et bien qu'il connaisse les textes de Riemann et de Gauss s'y rapportant, ce sont ceux de Listing qui auront sa préférence. Cependant, cet intérêt pour l'œuvre de Listing n'est pas immédiat,

---

[99] *Traité…*, Volume II, § 422.

[100] [Weiss 1934, 403].

[101] Outre le fait que son père Benjamin Peirce (1809-1880) est professeur de mathématiques à Harvard, et un mathématicien de grande valeur qui tiendra à ce que son fils fut un scientifique comme lui et qui le fera côtoyer nombre des grands mathématiciens de son temps, nous relèverons simplement qu'il ne restera indifférent à cette influence. Pour preuve, signalons [Peirce 1976] et les travaux récents de Jérôme Havenel consacrés aux mathématiques et à leur philosophie dans l'œuvre de Peirce, réalisés dans la suite de sa thèse de doctorat *Logique et mathématiques du continu chez Charles Sanders Peirce* (soutenue à l'Institut Jean-Nicod, Paris, EHESS et CNRS, en septembre 2006) ; relevons également le récent Workshop *Peirce The Mathematician* (Imatra, Finland, 11-13 June 2010), [Moore 2010*a*] et [Moore 2010*a*]).

[102] Pour reprendre là l'expression "exact philosophy" de C. Eisele, utilisée dans son article "Mathematical methodology in the thought of Charles S. Peirce", *Historia Mathematica*, volume 9, issue 3 (1982), 333-341. [Eisele 1981] et [Eisele 1982].

bien au contraire, dans un premier temps elle ne retiendra pas son attention[103] ; les raisons de ce revirement tardif de Peirce et de son véritable engouement presqu'excessif pour la *Topologie* de Listing demeurent assez obscures.

Peirce propose le *synéchisme* tel une « synthèse du tychisme et du pragmatisme »[104]. Gérard Deledalle, dans la conclusion de son ouvrage *Charles S. Peirce, phénoménologue et sémioticien*[105], retient que le synéchisme « est en fin de compte une philosophie critique du sens commun […] : il prend le monde tel qu'il est, mais, quand il y a doute réel, il s'en remet à l'investigation, à l'enquête scientifique. » (p. 91)

Sans chercher à pénétrer dans l'extraordinaire richesse, la complexité et la subtilité de la partie considérable de l'œuvre directement interpellée par cette approche, on retiendra de la définition du *Dictionary of Philosophy and Psychology* de James Mark Baldwin (*DPP*), que le synéchisme est pour Peirce « cette tendance de la pensée philosophique qui insiste sur l'idée de continuité comme de première importance en philosophie et, en particulier, sur la nécessité d'hypothèses renfermant la vraie continuité »[106].

Le synéchisme est donc proposé tel « la tendance à tout considérer comme continu […] »[107] ; c'est là que la *topical geometry* fera son entrée en scène. Elle dite aussi

[103] Jérôme Havenel, voir [Havenel 2010, 285].

[104] "Recent Developments of Existential Graphs and their Consequences for Logic", [*CP* 4, 584], 1906 ; il écrit à propos de lui : "Synechism is founded on the notion that the coalescence, the becoming continuous, the becoming governed by laws, the becoming instinct with general ideas, are but phases of one and the same process of the growth of reasonableness. This is first shown to be true with mathematical exactitude in the field of logic, and is thence inferred to hold good metaphysically." [Voir [Baldwin II (1902), 322].

[105] [Deledalle 1987].

[106] [Baldwin II (1902), 657]. À propos de ce "vrai continu", il écrit également au même endroit : "A true CONTINUUM is something whose possibilities of determination no multitude of individuals can exhaust. Thus, no collection of points placed upon a truly continuous line can fill the line so as to leave no room for others, although that collection had a point for every value towards which numbers endlessly continued into the decimal places could approximate ; nor if it contained a point for every possible permutation of all such values. It would be in the general spirit of synechism to hold that time ought to be supposed truly continuous in that sense. […] True generality is, in fact, nothing but a rudimentary form of true continuity. Continuity is nothing but perfect generality of a law of relationship. […] In short, synechism amounts […] that continuity is the absence of ultimate parts in that which is divisible ; and that the form under which alone anything can be understood is the form of generality, which is the same thing as continuity."

[107] "Immortality in the Light of Synechism" [1893] (voir [Peirce II (1893-1913) 1998, 1-3] ; voir en particulier, *Introduction*, p. xix-xx. Synechism [Gr. συνεχής, continu, tenir ensemble] ; c'est lui qui proposera ce mot en juillet 1892 dans son article [Peirce 1892, ii, 534] (Voir aussi [*CP* 6, 169]). Ce n'est pas le lieu, nous n'insisterons pas sur le concept du « continu » chez Peirce, ni sur les nombreuses définitions qu'il proposera ; sur la différence entre la « pseudo-continuité analytique » et la « vraie continuité topique » (voir [*NEM* 2, 483-], 'Topical geometry' [MS 137, 1904]). Nous laisserons également de côté son opposition, plus tardive (1908), entre continu « parfait » et continu « imparfait ». Nous renvoyons le lecteur qui le souhaiterait aux études récentes de Jérôme Havenel (qui outre sa thèse déjà signalée, consacrera notamment à ce sujet l'article [Havenel 2008]) et de Matthew E. Moore ([Moore 2008]).

Topics[108] par Peirce, ou encore *Synectics*[109] et parfois même *Topology*[110]. C'est la seule discipline en droit d'être considérée comme « géométrie pure »[111]. La continuité serait pour Peirce la « clef de la philosophie ». C'est là une conviction, confortée par son expérience en mathématiques, qui instruira aussi sa quête d'un « vrai continu » hors de portée des seuls mathématiciens et à substituer à leur « pseudo-continu ». Il cherchera à l'assurer en philosophie, y consacrant une part considérable de ses recherches au cours des années 1895-1913[112]. Cette double perspective ou quête mathématique et philosophique était d'autant plus justifiée, bien que difficile à conduire, qu'elle s'appuyait sur un constat essentiel qui invitait à s'y hasarder : « […] les mathématiciens n'ont jamais découvert de méthode pour raisonner sur la géométrie topique, qui s'occupe de vrais continua. Ils n'ont pas vraiment prouvé la moindre proposition dans cette branche des mathématiques »[113].

---

[108] "[…] is the most general, fundamental, and naturally elementary branch of geometry, which neither considers lengths, areas, or volumes in their character of being measurable, nor distinguishes straight from curved or crooked lines, nor place from curved or bent surfaces, but studies only the manner in which the parts of places are continuously connected." (*The Century Dictionary*, *Supplement*, vol. XII, p. 1360).

[109] "*Synectics* […] as the science of spatial connections ; pure synectics as the science of the connection of the parts of true continua." (MS. 139, "On synectics, otherwise called Topology, or Topics")

[110] "Topology, or I prefer to call it, topical geometry, or still better, geometrical topics, is a subject concerning which everybody ought to know, though few do, the little that has ever been made out. It is the most fundamental and, at the same time, the simplest of the three great divisions of geometry, topics, graphics, and metrics." ([*NEM* 2], ("Algebra And Geometry"), '3. Topical Geometry' (*MS* 137 [1904]), p. 477-547; voir p. 477). Mais, le nouveau vocabulaire introduit par Peirce est tout aussi abondant que chez Listing lorsqu'il critiquera les débordements tant du côté du vocabulaire que des notions mises en valeur. Cependant, il reconnaît aussi "I have, in the main, no new conceptions to propose as superior to those of Listing, whose sagacity in seizing upon the precise ideas that were pertinent still appears strong when his work is compared even with the treatment of somewhat the same subject by so vast an intellect as that of Riemann." (*NEM* 2, 627-8], note 1; extrait de MS (140), "A Treatise on General Topics", [1913]).

[111] "By 'pure' geometry I mean geometry as based upon hypotheses, all responsability for the truth of which is self-disclaimed. By 'physical' geometry, I mean geometry as supposed to refer to real, or objectively valid, space." (MS. 139, "On synectics, otherwise called Topology, or Topics".)

[112] On ne fera que signaler ici le texte [Panza 1998] et noter avec J. Havenel ([Havenel 2008]) que Peirce, dans "A Note on Continuity" (26 mai 1908) [*CP* 4, 639 à 642] "states that he made a huge step forward to solve the question of continuity […] According to his concept of continuity, "a top[olog]ical singularity… is a breach of continuity". But if the continuum has no topological singularity, then it is a perfect continuum whose essential character is: the absolute generality with which two rules hold good, first, that every part has parts; and second, that every sufficiently small part has the same mode of immediate connection with others as every other has. This manifestly vague statement will more clearly convey my idea (though less distinctly) than the elaborate full explication of it could." (p. 119)

[113] "Analysis of the methods of mathematical demonstration" (Draft C - MS L75.90-102 ; voir p. 100). Du côté des mathématiques, on remarquera qu'une telle déclaration illustre assez bien l'ignorance de Peirce des travaux réalisés par Poincaré depuis le milieu des années 1890 (Voir http://www.cspeirce.com/menu/library/ bycsp/l75/ver1/l75v1-02.htm#m4) ; du côté de sa métaphysique, force est de constater que le succès ne sera pas non plus au rendez-vous : "Peirce's illusion: the grand design was never fulfilled. The reason is that Peirce was never able to find a way to utilize the continuum concept effectively. The magnificent synthesis which the theory of continuity seemed to promise somehow always eluded him, and the shining vision of the great system always remained a castle in the air." [Murphey 1993, 407].

Dans la division des mathématiques influencée par Cayley et Klein, revisitée par Peirce, la *géométrie* se partage entre *Metrics*, *Graphics* et *Topics* ; la dernière occupe la place prépondérante : on savait déjà avec Cayley que la géométrie métrique (« la géométrie des éléments ») n'était qu'un problème particulier[114] de la géométrie projective[115], ou de perspective. À la suite de Peirce, « il est facile de voir que la géométrie projective n'est rien d'autre qu'un problème particulier de la géométrie topique »[116].

Pour fonder sa métaphysique, dans l'optique d'une mathématique des « purs continua », Peirce fera donc appel à la *Topologie* de Listing ; c'est aussi pour la reconsidérer et la parfaire[117]. Ce choix n'était pas fait dans l'ignorance du travail de Riemann, qu'il admirait, ou d'autres ; de nombreux passages de son œuvre témoignent de cette connaissance et de son réel intérêt pour le maître. Il est clair cependant que Riemann ne correspondait pas à ses attentes du moment. Il en allait tout autrement avec Listing : « Il n'y a aucun doute possible que la recherche topique la plus importante encore jamais conduite - probablement la plus importante qui ne le sera jamais - est celle de Johann Benedict Listing […] »[118], écrit-il.

On peut encore lire dans son "Analysis of the conceptions of mathematics" (d'après le Draft E - MS L75. 208-209, voir http://www.cspeirce.com/menu/library/bycsp/l75/ver1/l75v1-02.htm#m3) : "Many futile attempts have been made to define continuity. In the sense in |209| the calculus, no difficulty remains. But the whole of topical geometry remains in an exceedingly backward state and destitute of any method of proof simply because true continuity has not been mathematically defined. By a careful analysis of the conception of a *collection*, of which no mathematical definition has been yet published, I have succeeded in giving a demonstration of an important proposition which Cantor had missed, from which the required definition of a continuum results; and a foundation is afforded for topical geometry, which branch of geometry really embraces the whole of geometry. I have made several other advances in defining the conceptions of mathematics which illuminate the subject."
Peirce présente dans les *Cambridge Conferences Lectures* de 1898 un *continuum* tel une « collection d'une si vaste multitude » que ses éléments ne peuvent plus être distingués, qu'ils sont comme « soudés l'un à l'autre » (Voir [Peirce 1992] "Lecture Three", p. 162).

[114] "The logic of continuity" (D'après 948, [Peirce 1992, 101-115]) ; où Peirce fait allusion (p. 101) à l'article de Cayley ([Cayley 1859*a*]). Voir également [NEM 2, 623-632], *Appendice* O.

[115] Peirce reprend à Clifford l'expression *Graphics* pour désigner la géométrie projective (voir [Peirce 1992] "Lecture Eight : The Logic of Continuity", p. 243).

[116] "The logic of continuity"; p. 101. (Voir aussi le Draft C – MS L 75. 129-132 ; en particulier p. 129 : http://www.cspeirce.com/menu/library/bycsp/l75/ver1/l75v1-02.htm#m4).

[117] « Si il doit exister un quelconque système formel fournissant la clé du monde synéchistique, c'est la synectique ou topologie. » ([Murphey 1993, 405]). "How are we to establish a method of reasoning about continuity in philosophy ?" ("The Logic of Continuity" p.1 ; cité par [Murphey 1993, 405]) ; I find that when a continuum is met with, it does not suffice for the purposes [of] objective logic to say that the objects are continuous, it is necessary to examine the special nature of the continuum minutely. Its dimensionality must be ascertained, its Listing numbers, its singularities. ("Considerations for Eight Lectures," p. 2 ; cit. [Murphey 1993, 40])

[118] [*NEM* 2, 493], "Topical geometry". On a vu que ce point de vue avait déjà été partagé par d'autres, notamment par Maxwell. Dans le cas de Peirce, outre le fait qu'il s'intéressera au développement historique de cette discipline, on ne saurait trop insister sur le fait qu'il connaissait aussi d'autres travaux topologiques que ceux du seul Listing, contrairement à ce que semble nous laisser croire par exemple J. Jay Zeman lorsqu'il écrit : "There is no doubt whatever

> Listing,… le père de la topique géométrique, […] a inventé une méthode très artificielle de penser les continua, sur laquelle le grand Riemann est indépendamment tombé lors de la considération de la connexité des surfaces. Mais Riemann ne l'a jamais suffisamment étudiée pour la maitriser en profondeur[119].

Peirce accorde volontiers à Listing d'avoir réussi avec le *théorème d'Euler* là où des « héros » tels que Euler et Legendre[120] ont échoué ; mais c'est aussi pour insister sur les limites et les faiblesses de son entreprise[121] et pour aboutir, comme dans le cas de Legendre, au caractère « insatisfaisant » de la démonstration[122]. L'extension de Listing, qu'il appelle à son tour le *théorème de Listing*, doit être reconsidérée afin de pouvoir tenir compte de « nœuds » et de « chevauchements »[123] ; et parvenir ainsi au dit *théorème de Peirce-Listing*.

Le *Vorstudien zur Topologie* est essentiel pour Peirce ; il est pour lui suffisamment « simple » pour être recommandé en première lecture aux étudiants qui souhaitent poursuivre des recherches en théorie des nœuds, avant d'aborder les travaux plus avancés de Tait puis ceux de C. N. Little[124].

---

that Peirce in his later years was fascinated by topology, even though the only topology he knew was that of Listing, which was a rather low octane brand." ([Zeman 1964], Introduction]).

Cependant, on peut aussi en partie convenir avec Murphey : "The topology which Peirce possessed was hopelessly inadequate to the demands he made upon it; the topology Peirce needed was still a thing of the future, and when it was discovered it was to be developed on principles diametrically opposed to his." [Murphey 1993, 405].

119 "The logic of continuity" ([Peirce 1992, 111-112]).

120 Peirce revient lui aussi sur la proposition 25 des *Éléments de géométrie*. Voir par exemple [Legendre 1823, 226-227] : « Cette proposition est maintenant donnée comme théorème dans tout manuel de géométrie, étant la seule proposition de la *Topics* que de tels livres renferment, à moins qu'ils ne mentionnent que l'espace a trois dimensions. Les *Éléments de géométrie* de Legendre sont le premier manuel dans lequel il trouve place. Legendre donne une tentative de preuve de ce théorème qu'il reconnaissait lui même comme défectueuse. »

Pour Peirce la démonstration de Legendre « n'est réellement pas satisfaisante » ([Draft C - MS L75, p. 130] ; voir http://www.cspeirce.com/menu/library/bycsp/l75/ver1/l75v1-02.htm#topofpage).

On s'étonnera au passage de ne pas voir figurer dans sa courte liste des devanciers le nom de Cayley, dont il connaît pourtant très bien les travaux. D'après Ahti-Veikko Pietarinen : "It is also possible that Peirce wanted to defend Listing so sternly that it drove him into an unjust downplay of Arthur Cayley ([*RLT*, 246])." (Voir [Pietarinen 2006, 160]).

121 "This method is not all that could be desired for continua of more than 3 dimensions, which Listing never studied." ("The logic of continuity"; d'après 948, [Peirce 1992, 112]). Rappelons que pour Peirce : "Pure Topics is not limited to Space of three dimensions but is the full account of all forms of Continuity. Insofar as it is limited to Space, it is the complete account of all the properties of Space itself." (*NEM*, "Appendice O. An attempt to state systematically the doctrine of the census in geometrical topics, or topical geometry, more commonly known as 'Topology'; being, a mathematico-logical recreation of C. S. Peirce. Following the lead of J. B. Listing's paper in the *Göttinger Abhandlungen*" (MS. 145, [avril-mai 1905]), p. 626). Il faut néanmoins observer que Peirce, à l'instar de Listing, ne poussera pas vraiment ses recherches au delà de la troisième dimension.

122 Draft C - MS L75, p. 130.

123 [*NEM* 2, 190-191].

124 [*NEM* 2, 310], MS 94, "Book II *Topology*".

Le *Census* est bien sûr plus considérable à ses yeux, au-delà du fait qu'il renferme le « curieux » et « important théorème du Cens » ; il affirmera à propos de ce dernier l'avoir « amélioré », accordé avec les « idées modernes » et y avoir ajouté une étude des « singularités des places »[125].

Pour Peirce, la *Topics* présupposait nécessairement les propriétés du temps[126], mais nous passerons outre le rappel de cette nécessité et de ses exigences dont l'étude a déjà très largement été abordée par d'autres, notamment par plusieurs des commentateurs déjà évoqués précédemment ; nous retiendrons simplement ici des emprunts faits par Peirce à la théorie de Listing, et quelques unes des extensions et améliorations qu'il proposera ou envisagera.

Clarifier les concepts de Listing et en introduire de nouveaux, démontrer le *théorème du Cens* et le généraliser, supposera d'abord pour Peirce en revenir dans ses *Eléments de mathématiques*[127] (MS. [165]) sur la « continuité » et l'« homogénéité » de l'espace, sur sa « tridimensionnalité », relever les « singularités » et aborder « les classes topiques de surfaces ». Ce sont là les cinq premières sections du chapitre qu'il consacre à la « géométrie topique »[128] ; sa sixième et dernière section (« Le Cens topique ») expose le problème de « déterminer la connexion entre les nombres de points, lignes, surfaces et espaces relevés en toute configuration ». Peirce redéfinit les *nombres de Listing* (encore appelés plus brièvement *Listings*) ; ils sont au nombre de quatre : la *chorisy*, la *cyclosy*, la *periphraxy* et l'*immensité* ou *apeiry*, ainsi nommés par lui. Ils étaient déjà présents chez Listing : soit nommément désignés (*Cyklose* et *Periphraxis*), soit évoqués sans être nommés ou simplement sous-entendus (*chorisy* et immensité) ; repris par Peirce ils seront cependant plus généralement introduits et définis

125 À nouveau il insiste sur l'importance de Listing, qui « a de loin surpassé » Riemann. [*NEM* 2, 627], *Appendice* O. Voir également les remarques extraites du MS. 140 ("A Treatise on General Topics", note 1, p. 627-628). On peut mesurer à quel point Peirce était très proche de l'œuvre dans sa "Letter to Lady Welby" (datée du 16 décembre 1904, [*L463*]), par exemple dans l'extrait suivant :"[I] am now as completely unable to say what is mine and what is Listing's as any third party could be, although I know that certain things are Listing's and that certain things are mine. […] I know that all exact definitions and the whole doctrine of singularities is mine, and the discovery that there are several different census theorems, together with other relations between Listing numbers." ([Hardwick 1977])

126 En effet, il écrit : "This is *Topics*. It thinks of fixed Places, and of Objects called *Movables*, occupying each some fixed place at each instant of Time, and capable in Time of displacement with deformation, called Motion, by which in the course of a lapse of time, it occupies another place, which it is thus said to *generate* (and I may now adopt the word *traverse*, also), it being understood that if the movable retraces any part of its wake, going over it in reversed order, it thereby undoes its work of generation in that part, *ungenerates* (or *untraverses*) it. And this *motion* of generation is such that at every instant the Movable occupies a Place, and at no instant occupies two different places simultaneously, as it would if it made a *saltus*. Nor does it alter the dimensionality of its instantaneous place, except in singular cases, called *Extraordinary Limiting Deformations*. It is thus evident that Topics must begin with an account of the properties of Time." ([NEM 2, 625-626], *Appendice O*).

127 *Elements of Mathematics* [c 1895] (voir [*NEM* 2, 1-232])

128 Voir "Topical Geometry" ([*NEM* 2, 165-191], MS [165]).

La *Cho'risy* [du grec χώρισιζ, séparation] est le nombre de parties simples d'une place de même dimensionnalité que la place elle-même qui doit être remplie en sorte de ne laisser aucune place à une simple *particule* (plus simplement dit, c'est le nombre de morceaux séparés.)

La *Cyclo'sy* est le nombre de parties simples d'une place de dimensionnalité moindre de *un* que celle de la place elle-même qui doit être remplie en sorte de ne laisser la moindre place à un simple *filament* qui ne pourra être géométriquement capable de se réduire indéfiniment à un point par un mouvement ordinaire dans la place inoccupée.

La *Periphrax'y* est le nombre de parties simples d'une place de dimensionnalité moindre de *deux* que celle de la place elle-même qui doit être remplie en sorte de ne laisser la moindre place à une simple *pellicule* qui ne pourra être géométriquement capable de se réduire indéfiniment à une ligne ou à un point par un mouvement ordinaire dans la place inoccupée.

L'*A'peiry* [ou *Immensity*] est le nombre de parties simples d'une place de dimensionnalité moindre de *trois* que celle de la place elle-même qui doit être remplie en sorte de ne laisser la moindre place à un simple *solide* qui ne pourra être géométriquement capable de se réduire indéfiniment à une surface, à une ligne ou à un point par un mouvement ordinaire dans la place inoccupée[129].

[129] [*NEM* 2, 500], MS (137) "Topical geometry" [1904]. Vers le milieu des années 1890, Peirce avait déjà proposé d'autres définitions de ces nombres de Listing (Voir par exemple dans [*NEM* 2, 186], MS (165), et [*NEM* 2, 280-281], MS (94) ; ou encore celles qu'il destinait au *Century Dictionary*, voir [*NEM* 2, 631-632] Appendice P. ["Census" from Century Dictionary with model], note 1, où on peut lire à propos de ces nombres :"*Listing's numbers*, four numbers which serve to define certain topical characters of any geometrical figure especially a figure without topical singularities. Though there are only four for space of three dimensions there will be one more for each added dimension. These numbers express the number of simple nonsingular interruptions of a continuous place that are requisite in order to enable an object filling that space to shrink to a nothing without breaking and without leaving the space. […]" [p. 632]).
On ne trouve pas une telle entrée dans le *Century Dictionary*; en revanche, dans le *Dictionary Supplement* (vol. XI, [1911]), figurent celles de l'*Apeiry* (p. 62) et de la *Chorisis* (p. 243) dues à Peirce : "Apeiry. … In geom. topics, a number associated with a place of three or more dimensions and indicating how many places it contains for unbounded solid bodies that have no room within to shrink to nothing […]"; "Chorisis, … In geom., a number associated with a place which indicates how many different places it contains, such that a particle could not by an ordinary motion within it pass from one to another. […]" Dans une lettre de Peirce à William E. Story (datée du 22 mars 1896), on pouvait également lire : "The Listing numbers I define a little differently from Listing, and get different numbers for space because I conceive of space as perissid while he virtually makes it artiad. When he talks of 'all space,' he only means the parts at finite distances. It is really limited, though he calls it unlimited, because he wrote before Riemann, and confuses the infinite with the unlimited." ([NEM 2, vii], Introduction). Notons également que dans sa huitième conférence de Cambridge (1898) il écrit que "Listing himself makes the Cyclosis and Periphraxis of space equal to zero, showing how little he knew of mathematics." (Voir [Peirce 1992, 257]). C'est à l'occasion du problème de coloriage des cartes géographiques que Peirce introduira aussi de nouveaux mots pour designer une surface divisée en régions et limitée par une ligne, ou illimitée : « Si elle est illimitée et sépare un solide en deux parties, je l'appelle artiade [*Artiad*] ; si non, je l'appelle périsside [*perissid* ; parfois il utilise aussi le mot *perissad*] » ([*CP* 5, 490]) ; voir aussi MS 318. Pour l'explication de Peirce sur le choix de ce vocabulaire, voir [*NEM* 2, 175], MS [165], *Gloss* 20). À ce propos, on trouve dans MS (94) les définitions suivantes : "*Definition* 97. A *perissad* surface is a closed surface on which any number of lines may be drawn, every pair of these lines cutting one another in an odd number of points, all such points being distinct.
An unbounded plane is an example of such surface.

Une fois donnée et abondamment illustrée la définition du « Nombre de Cens », il est conduit à un énoncé plus ramassé du « théorème du cens » qu'il ne cherchera pas à démontrer : le nombre de Cens d'un tout est la somme des nombres de cens des listings de ses parties. À nouveau il se contentera d'illustrations, et d'allusions historiques succinctes se rapportant aux contributions d'Euler, Legendre et Listing[130].

Peirce entend tirer le meilleur parti des apprentissages du *Census* de Listing : il cherche à la fois à en combler les lacunes et à atteindre une beaucoup plus grande généralité ; mais il convient aussi que le théorème formulé par Listing ne règle pas toutes les situations, même restreint au seul cas des complexes spatiaux[131]. Il relèvera à son tour le « caractère inextricable », particulièrement obscur parfois, des relations entre les éléments des curies ; mais c'est avant tout sur l'absence de prise en considération des singularités qu'il s'appesantit, qui lui fera conclure tant à l'insuffisance de l'approche de Listing qu'à celle de Riemann[132].

Definition 98. An *artiad*, or *globular* surface is a closed surface upon which every pair of self-returning lines intersect an even number of times, zero being considered as an even number." ([*NEM* 2, 283]) Il présente le plan projectif tel une surface "*perissid*, not an artiad" ([*NEM* 2, 490], MS [137]), et il définit au même endroit une *ligne périsside* comme "line along the length of which its surface [i.e. celle où elle se situe] makes an odd number of half-twists."; la « bande de Möbius », qu'il ne nomme pas ainsi, est à plusieurs reprises utilisée comme illustration (voir par exemple : [*NEM* 2, 490-1 et 507], MS [137] ; [*NEM* 2, 179 et 223], MS [165] ; [*NEM* 2, 262], MS [94]). Il relève que "Many writers call perissid surfaces one-sided surfaces. One objection to this is that it goes beyond the surface to what is outside of it in order to designate a character intrinsic to the surface. What if the surface were a universe by itself ?"([*NEM* 2, 491], MS [137])

Précisons enfin le prolongement de ses définitions à l'espace : "A space which contains no boundless surfaces but artiad surfaces is called an *artiad* space. A space which independently of singularities, etc., contains a boundless perissid surface is called a *perissid* space." ([Moore 2010*b*, 237]).

130 "The Census Number of a place is the number of its separate pieces limited by singularities which is called its chorisis, less its cyclosis, plus its periphraxis, less its immensity, this number being diminished by that of its limiting singularities, itself diminished by the number of their singularities, etc. But if the dimensionality of a singularity is two less than that of the place, it is to be added, not subtracted.", [*NEM* 2, 186], MS (165), voir les illustrations" (p. 186-188).

131 Peirce écrit : "For instance, the Census-theorem would permit a net upon a spheroidal surface having twelve pentagonal faces, or regions, one hexagonal face, twenty-two coigns, and thirty-three boundaries. But this is easily seen to be impossible" (MS 141, "On Topical Geometry, in General"; cité d'après [Murphey 1993, 206, note 45]).

132 Peirce reconnaît toujours qu'après le système des « Nombres de Listing », le « Théorème du Cens » est la contribution la plus importante de Listing ; mais c'est cependant pour préciser aussi : "The census-number of a place is a number depending in such a way upon the four Listing numbers of the place that the census-number of the whole is equal to the sum of the census-numbers of the parts. Such being the idea of the census-number, the census-number of a place should and must depend upon the singularities of the place; but Listing, if he ever had the conception of a topical singularity, very fortunately set it aside. Regarding a surface as the limit of a solid, a line as the limit of a surface, and a point as the limit of a line, and never stopping, apparently, to ask himself whether an interruption (or limit) of an interruption was or was not an interruption of the first place, he simply conceived of all places as interrupted at their bounds and at their branchings. He thus obtained an easily manageable problem. Denoting by p^0, p^1, p^2, p^3, the points, lines, surfaces, and solids of a figure, and by X, K, Π, A, the chorisy, cyclosy, periphraxy, and apeiry, respectively, he found, very easily, that the census-number must be

Par *singularité topique*, *B*, d'un lieu, *A*, j'entends que *B* est un lieu de dimension moindre que *A*, et contenu dans ou à la limite de *A*, et que de *B* des particules, filaments ou films peuvent se mouvoir le long de *A*, selon plus ou moins de voies que de la majorité de lieux de même dimension que *B*, et suffisamment proches de lui[133].

$$\begin{aligned} \mathrm{A}p^3 - \Pi\, p^3 + \mathrm{K}p^3 - \mathrm{X}p^3 & \\ + \mathit{\Pi} p^2 - Kp^2 + Xp^2 & \\ + \mathrm{K}p^1 - \mathrm{X}p^1 & \\ + Xp^0. & \end{aligned}$$

The utility of the theorem that the census-number of a whole, so defined, equals that of its parts is very great." ([*NEM* 2, MS (137), 505]).

[133] Cette définition est extraite de [*NEM* 2] ; on la trouve dans une lettre datée du 22 mars 1896, adressée à William E. Story. Elle est proche de celle de 1904 (MS 137 [1904] ; voir [*NEM* 2, 497]), mais de prime abord semble moins moderne par sa distinction explicite de concepts tels ceux de *particules*, *filaments* et *films* et par son expression « suffisamment proche », peu précise : "A *topical singularity* of a figure or a place, *P*, is a place, *L*, within *P* and of lower dimensionality than *P*, such that a movable object occupying *L* can move away from it in a separative motion so as to begin to generate a part of *P*, and do this in fewer or in more ways (that is, can generate, a smaller or greater number of entirely separate parts of *P*) than an object of the same dimensionality as *L* moving in like manner away from any neighboring place in *P*. The *grade* of singularity (which may also be called [p. 498] the singularity) is the product of the excess of the number of such beginnings of generation over those of an ordinary place in *P*, by the excess of the dimensionality of *P* over *L*." Dans le même texte de 1904, Peirce dira à nouveau que "The census-number of a place depends greatly upon its singularities" et insistera une fois encore sur le caractère restreint de l'étude de Listing : "Listing, however, avoids considering them by always making interruptions at the singular places". Mais lui-même ne les abordera pas dans son écrit, pour ne pas trop l'étendre, et va jusqu'à proposer à d'autres de poursuivre l'étude de ce « fascinant sujet ». À cette intention il introduira une nouvelle notation, qui devrait remplacer avantageusement celle trop restrictive de Listing :

NOTATION

C, census number of –

X, *K*, *Π*, *A* ; unit of chorisy, cyclosy, periphraxy, apeiry.

χ, κ, π, α ; numerical value of chorisy, cyclosy, periphraxy, apeiry.

p, *q*, *r*, *s* ; point, line, surface, space.

Subjacent numbers attached to p, q, r, show that the point, line, or surface is a singularity of that grade belonging to what is described in the following letters. Thus p2q1r0s would be a point of crossing of two three-way splits of any outlying surface considered as a singularity of a solid. A brace is used where the singularity belongs to the place of meeting of different kinds of places and a letter may be repeated to show that the same place has different characters as belonging to one or another place. Thus

$$p\left\{\begin{matrix} p_1 & q_{-2} \\ & p_0 \end{matrix}\right\}r$$

Le survol opéré ici exclut bien sûr de développer plus avant l'approche de Peirce, bien qu'elle mériterait enfin de l'être plus complètement et dans le plus minutieux détail ; signalons cependant sa distinction de l'*ordinaire* du *singulier* d'une place :

> An *ordinary place of a place* is a place in the later place from which the modes of departing movement are the same as from innumerable other places in its neighborhood in the same place (...). A *singular place of a place* is a place within the later place from which the modes of departing movement are fewer or more than from ordinary places of the same dimensionality[134].

Elle l'amènera ainsi à définir les «points singuliers» d'une ligne (*Artiad nodes* ou *crunodes*, *perrisid*), d'une surface, etc., à aborder les « lignes topiquement singulières » d'une surface (*artiad nodal lines, perissid lines*)[135].

Sa classification des singularités n'aboutira pas : sortir de l'« inextricable » de Listing n'était pas chose aisée. Bien qu'il va y consacrer une part considérable de son activité, ainsi qu'en témoignent par exemple ses *Cambridge Conferences Lectures* (1898), il ne parviendra pas à étendre sa classification avec le même succès, au delà des points et des lignes, aux surfaces et à l'espace[136]. La valeur de son travail sur les singularités est indéniable ; outre celle-ci, on lui reconnaîtra aussi quelques autres contributions, vues comme autant de *trouvailles* ou *incursions topologiques* qui auraient sans nul doute pu lui permettre de figurer dans une histoire de cette discipline[137], même si elles ne font pas de lui un des pères de la topologie. Plusieurs voix se sont élevées, parmi les plus récentes celles de Murray G. Murphey, António Machuco Rosa[138] et de Jérôme Havenel[139], pour défendre l'importance du travail de Peirce en la matière. Peirce va en effet plus loin que Listing : avec lui le nombre de cens permet de classer les complexes spatiaux,

---

would mean a point which is a three-way furcation of an outlying line of a surface intersecting that surface at an otherwise ordinary point of it.) […]" ([*NEM* 2, 546])

134 [*NEM* 3, 1079]. On trouve également cette autre définition : "A topically singularity of a place is a place within that place from which the modes of departure are fewer or more than from the main collection of such places within the place." ([*NEM* 3, 108])

135 Pour une description plus détaillée, voir par exemple [*NEM* 2 173-177], (MS (165), [*ca* 1895] "10. Topical Geometry", "Section 4. Singularities"; [*NEM* 2, 497-500], MS (137), [1904] « Topical Geometry », [Variant A, 1] ; [*NEM* 3, 974, 1082, etc.]

136 [Murphey 1993, 207]. On ne dira rien sur le fait qu'il envisagera d'aller au delà de la dimension trois.

137 Ainsi que l'écrit Murphey : "what Peirce thought about topology is more important than what Peirce did in topology […]" ([Murphey 1993, 211]). Insistons sur le rôle considérable qu'il veut faire jouer à sa *Géométrie topique*, dont il s'est fait le chantre et le défenseur en stigmatisant sa situation trop longtemps figée, négligée, et en dénonçant une certaine impuissance des mathématiciens à la faire progresser. Mais, il n'est sans doute pas excessif de rappeler aussi que ces efforts méritoires en topologie plus ou moins aboutis ne demeurent qu'une modeste partie prenante dans l'intérêt supérieur que Peirce a pour la logique, la philosophie et la métaphysique, dans ses visées qui allaient bien au-delà de son intérêt de faire progresser la chose mathématique.

138 [Machuco Rosa 1993].

139 [Havenel 2008] et [Havenel 2010].

on lui doit l'introduction d'une notion de "shape-class"[140] proche de celle de « classe d'homotopie »[141]. Au-delà de premières reprises et clarifications instructives de l'œuvre de Listing déjà évoquées, on lui doit aussi des notions introduites pour la généralisation du théorème de Listing. Sa quête l'a naturellement poussé à approfondir les notions de connexité, de dimension et d'extension à l'infini, en vue de préciser les fameux « attributs » de Listing. C'est ainsi qu'il améliore la prise en compte effective de l'infini en revisitant et clarifiant le rôle ambigu qu'y faisait jouer Listing à son ω (le *Trema*), qui figure dans sa célèbre formule

$$a-(b-x)+(c-x'+\pi)-(d-x''+\pi'-\omega)=0$$

considérée comme „allgemeinste oder finale Form für die Census-Gleichung"[142].

Les exigences de la philosophie de Peirce, dont la part considérable prise par le « continu », l'obligeront bien sûr à ne pas en rester à ces premiers pas. On en perçoit

[140] Il écrit : "Two places may be said of the same shape-class if and only if it is possible for a thing precisely occupying the one to come by a mere movement, strict or otherwise, to precisely occupy the other." (Extrait de *Rough Sketch of Suggested Prolegomena to your* [*James Mills Peirce's*] *First Course in Quaternions* ([*NEM* 3,1080-], MS (87) [1905?]). Murphey voit dans l'introduction de cette notion "a term invented by Peirce rather than by Listing, and one which gives strong evidence that Peirce had conceived at least some of the ideas involved in modern topology." ([Murphey, 1993, 200]) Ce qu'écrit Peirce à propos de ses *Listings* montre la généralité de leur conception : "Listing's numbers are certain quantities measuring the degrees in which any place possesses separativiness of different kinds, where by separativiness is meant something exemplified in the action of any two-sided closed surface in separating all space into two parts, these numbers together with the singularities and the dimensionality sufficing to distinguish all shape-classes" ([*NEM* 3, 1080-1]).

[141] [Havenel 2010, p. 304].

[142] [Listing 1861, Art. 44, 171]. On relève dans le *Census* les déclarations suivantes : „Um an einer *periphraktischen*, d. i. allseitig geschlossenen, aller Begrenzung durch Linien und Punkte ermangelnden Fläche das Diagramm abzuleiten, muss derselben, […], eine virtuelle Grenze ertheilt werden, wozu wir am einfachsten einen beliebigen Punkt derselben wählen. Dieser Aufhebung der Periphraxis geben wir die Benennung *Diatrese* oder *Trema*." (Art. 24, p. 136) ; „das räumlich Unendliche die Rolle eines Punktes spielt,…" (Art. 43, p. 171) ; „Es geht aus dieser Betrachtung hervor, dass wir das räumlich Unendliche als einen in unendlicher Ferne gelegenen virtuellen Punkt zu betrachten haben, der unter den Attributiven des Census ebenso nothwendig eine Aufnahme erheischt, wie die Cyklose und die Periphraxis, und dass wir folgerichtig die in der Gleichung (34)

[à savoir :

$$(a-x^0)-(b-x')+(c-x''+\pi')-(d-x'''+\pi'')=-1$$

(Art. 42, „Weitere Verallgemeinerung des Census", p. 170)]

noch übrige diakritische Zahl -1 in der Bedeutung des räumlich Unendlichen zunächst in das Attributiv der vierten Curie aufnehmen müssen." (Art. 44, „Der allgemeine Census in seiner finalen Gestalt", p. 171).
„Den in unendlicher Ferner zu denkenden, das Unendliche repräsentierenden Punkt nennen wir das *Stigma*." (Art. 44, p. 171-172)
Pour en savoir plus sur ce que dit Listing à propos de ω, on peut se reporter également aux quelques éléments d'analyse et aux commentaires rencontrés dans [Pont 1974*a*, 54-56] et [Havenel 2010].

mieux la raison par exemple à travers la distinction sur laquelle veut insister Havenel entre les deux approches de la continuité où la topologie a son mot à dire, sur cette tension voulue entre « continuité externe » [*external continuity*] et « continuité interne » [*internal continuity*][143] : la première est affaire de théorème du cens et de "shape-class", et peut être investie par une topologie à la Listing, ou qui s'en inspire suffisamment, ou par une topologie à la Riemann ; la seconde, concerne le mode de *connexion immédiate*[144] des parties d'un « *continuum* »[145]. Peirce aura soin d'introduire une notion de « synésis »[146] : cette « propriété qui 'mesure' la non séparabilité d'une surface [par exemple], c'est-à-dire ce qui ne sépare ou ne disjoint pas une telle surface »[147]. C'est là une propriété caractéristique du « tenir ensemble », qui s'écarte dans l'esprit de la voie ouverte par Listing. Toujours suivant l'exemple d'une surface, elle est définie comme :

> […] le nombre de lignes non-singulières qui peuvent être tracées sur une simple partie de surface tout en laissant la possibilité qu'un point puisse se déplacer continûment sur cette partie de n'importe quelle position à toute autre, sans traverser l'une de ces lignes. Ou, elle peut être définie comme le nombre de rétrosections [*self-returning cuts*] qui peuvent être faites dans la surface sans pour autant augmenter le nombre des parties[148].

Peirce observera enfin que « la synesis ne peut pas être définie en termes de « connexité » de Riemann (...). La synesis ne peut… pas être définie en termes de cyclose et périphraxis de Listing, malgré la valeur de ces conceptions quelque peu artificielles »[149].

---

143 [Havenel 2008, p. 120]

144 C'est nous qui soulignons.

145 Havenel ([Havenel 2008,120-121]) relève, en citant Peirce, que la nature des différences entre continua "depends on the manner in which they are connected. This connection does not spring from the nature of the individual units, but constitutes the mode of existence of the whole." ([*CP* 4, p. 219], "Multitude and Number" [c. 1897])

146 On trouve encore de nos jours les définitions suivantes : « Synèse. *S. f.* t. de rhét. Jonction de deux choses » (Dict. universel de la langue française, avec le latin et le latin et les étymologies, par Pierre-Claude-Victor Boiste,… 8e éd., Firmin Didot : Paris, 1836) ; il désigne un « assemblage régulier de mots (1842) » (TLFi) ; Synèse, subs. Féminin, « Élém. tiré du gr. σύν "ensemble, en même temps, avec", entrant dans la constr. de nombreux adj. et subst. de la lang. sc. et techn., ainsi que de la lang. cour. I. − [Le 2e élém. est de type verbal et exprime un procès ; *syn-* signifie "avec une autre chose ou une autre personne, en même temps qu'une autre chose" et caractérise le procès] » et « *synèse* (de σύνεσις "réunion"), subst. fém. (CNRTL). Selon http://www.encyclopediefrancaise.com/Synesis.html, Le *Synesis*… signifie l'unification, réunion, sens, conscience, perspicacité, réalisation, esprit, raison. »

147 [Machuco Rosa 1993, 330], où l'auteur reprend aussi un autre exemple de Peirce : "The connective valency of a line, or linear configuration, is the number of separate pieces less the number it can be cut (through) without increasing the number of separate pieces." [*NEM* 2, 282-3].

148 [*NEM* 3, 471].

149 [*NEM* 3, 471]. Ces insuffisances dénoncées, il doit néanmoins se rendre à l'évidence de la situation existante : "In constructing the conception only rimmed surfaces were contemplated, and perissad surfaces seem to he been overlooked, so that while the conception admirably answers the special Analytical Purpose which its first proposer, Riemann, had in view, it does not very philosophically classify the closed and perissad surfaces. The rule for the measure of connectivity as stated in works on Riemann's theory is not quite consistent, though sufficiently so for that problem. It is, therefore, here necessarily a little modified. A still further improvement of the conception seems desirable; but

Ainsi, les *Listings* (« ces conceptions quelque peu artificielles ») tels qu'ils étaient caractérisés ne suffisaient plus ; Chorisy, Cyclosy, Périphraxy,…, même si elles font alors toujours l'objet d'explications dans ses écrits, ne conviennent plus dans la nouvelle approche[150] : « elles ne constituent pas la manière la plus commode de prendre en compte la valence de connexion [*connective valency*] des places »[151].

Peirce a bien été l'élève attentif des principaux artisans de la topologie combinatoire ; il aura le mérite d'aborder avec quelques réussites des notions essentielles, de corriger les insuffisances de la contribution de Listing, le mérite de dépasser plusieurs des limites de ce *Census* qui l'a principalement guidé dans ses premiers pas et invité à

---

the introductions of the conceptions of *cyclosis* and *periphraxis* do not fill the want. The truth is that the best way of arranging the ideas of topology has not yet been found out. To start with connectivity seems to be the clearest method yet proposed." ([NEM 2, 290], MS (94)) Une fois rappelées les notions de « circuit » (definition 106, p. 289), de « passage » (definition 107, p. 289) et introduite la "*Definition* 108", "One circuit or passage is said to be *reconcileable* with another if either can be gradually deformed into the other while at no time ceasing to be a circuit nor ceasing to be a passage" (p. 290), il pourra préciser (p. 290, *Scholium* 7) : "*Connectivity* is a character the conception of which was constructed with the view of distinguishing between the different categories of surfaces, and it is greater the more numerous are the *irreconcileable* circuits and passages and is less the more the parts are totally cut away." Il définira donc une "measure of connectivity", puis abordera la démonstrations des théorèmes qui s'y rapportent ; viendront enfin des exercices, dont le suivant (p. 293) : "Find out the connectivity of the surface of a single strip of paper with ends pasted together after half a twist. […]

KEY

The connectivity of the surface of a single strip of paper with ends pasted together after a half twist is 2. For if the strip be cut across, two cross-cuts are made in the surface, one on each side of the strip. The result is 2 simply connected surfaces, one on each side of the strip. The connectivity of these is, by the rule, 2 added 2, the number of boundaries, and diminished by 4, or twice the number of separate surfaces. This makes 0; but the two cross-cuts diminished the connectivity by 2, so that it must have been 2 originally. […]"

[150] Voir le paragraphe 3.2.1 consacré à la notion de « connectivité » (nous reprenons là l'expression utilisée par Machuco Rosa pour la distinguer de celle de « connexité » qui nous est familière aujourd'hui et qui est précisément définie en mathématique), où on peut lire que « Peirce s'est aperçu très vite que les notions de cyclosis, periphrasis, etc, définies en fonction des coupures qui rendent une surface simplement connexe (contractile en un point), n'étaient pas le bon critère pour rendre compte de la 'vraie' connexion d'une surface. » ([Machuco Rosa 1993, p. 329])
Rosa est proche ici, à sa manière, du point de vue qui sous-tend la distinction de Havenel. À propos du mot « connectivité » en géométrie (la « qualité de ce qui est connexe »), notons qu'il ne figure pas dans les dictionnaires (selon le *Trésor de la Langue Française informatisé* (TLFi ; http://atilf.atilf.fr/). Néanmoins, « la *connectivité* en géographie rend compte des *connexions* qu'offre un lieu pour relier les autres lieux de son environnement. » (selon *Wikipaedia*). Toujours selon cette dernière : « Contrairement au cas de la notion de *connexité* on ne dispose pas de définition univoque de la *connectivité*. »

[151] [*NEM* 2, 281]. La « valence de connexion » est plus généralement définie comme suit : "The connective valency of a place is the number of the simplest bounded places of the same dimensionality to which it is equivalent in preventing the collapse of unbounded boundaries within it, both as it is and after it has been interrupted in various ways." Son frère James Mills Peirce, professeur de mathématiques à l'Université de Harvard avec lequel il a notamment participé à la rédaction des *New Elements of Geometry based on Benjamin Peirce's Works and Teachings* [MS 94], dira de cette définition qu'elle est « très obscure », qu'elle requière « beaucoup d'explications et d'illustrations » ; il admettra aussi qu'il serait sans doute « préférable de donner cette définition générale plus tard », après en avoir « examiné les cas particuliers ». (p. 281, note 49)

ce dépassement[152]. Mais l' « outil » qu'il entendait parfaire et mettre au service de sa philosophie des continua le poussera en une autre voie où les objectifs subordonneront trop étroitement sa géométrie topique à d'autres horizons et l'en détourneront tout en le privant d'être à son tour un maître en topologie.

Bien qu'il demeure à un niveau tout aussi élémentaire que celui de Listing, on constate cependant que Peirce est plus instruit de topologie que lui ; on peut certes lui reprocher d'ignorer, alors qu'il dénonce le long silence des mathématiciens, ce que sont en train produire d'autres maîtres tels que Poincaré. Il est clair que l'œuvre topologique publiée de Listing, plus précoce, initiatrice et ramassée en quelques rares articles, marquera plus considérablement ses contemporains et successeurs immédiats.

Peirce souhaitera justement que l'on célèbre le nom de Listing comme celui du « père de la géométrie topique »[153], mais l'histoire n'en retiendra pas la leçon : Listing est longtemps resté absent de la plupart des ouvrages qui traitent de l'histoire de la topologie. Ce n'est que tardivement qu'il en ira autrement : aujourd'hui bien mieux connu pour d'autres succès en d'autres disciplines il occupe cependant, outre la *Préhistoire de la topologie algébrique* de J. C. Pont[154], une place conséquente dans *Möbius and his band*[155], dans *History of Topology*[156] ou encore dans le *Handbook of the History of General Topology*[157].

En revanche, le flot des idées et des théories développées par Peirce, dispersées au gré de maintes reconsidérations, n'aura pas le même succès. La plupart de ses écrits topologiques n'ont pas été publiés de son vivant, ou trop tardivement ; instructifs, au delà de leurs seules visées et cause philosophique et métaphysique considérables, ils passeront pratiquement inaperçus et manqueront leur but : aujourd'hui encore toujours point de trace significative de lui dans les ouvrages d'histoire de la topologie, ni même dans les plus récents. Un réel intérêt existe, non pas effectivement ou strictement pour ce que la topologie lui devrait ou lui doit de concepts abstraits, mais surtout pour sa défense de l'importance de la topologie ; pour l'usage qu'il veut faire et fera de cette « géométrie pure », qu'illustrent les derniers éléments que nous venons de mentionner.

Il ne fait aucun doute que beaucoup reste encore à dire de cette œuvre qui aujourd'hui se livre plus que jamais.

---

152 Rappelons qu'il ira jusqu'à écrire que le *Théorème du cens* de Listing est « principalement, sinon totalement, un théorème artificiel » ; et à propos de Listing lui-même : « le peu qu'il savait de mathématiques » ([*RLT*, 257]).

153 [Peirce 1992, 254].

154 [Pont 1974*a*].

155 [John Fauvel, Raymond Flood, and Robin Wilson 1993] ; voir [Biggs 1993], en particulier p. 109-112.

156 [James 1999].

157 [Aull & Lowen 2001].

BIBLIOGRAPHIE

APPEL, Paul, *Traité de mécanique rationnelle*, Paris : Gauthier Villars, 2 tomes, 1893.

AULL Charles Edward & LOWEN Robert (Ed.), *Handbook of the History of General Topology* 3 vol. Kluwer Academic Publishers, 2001

BALDWIN, James Mark (Ed) *Dictionary of philosophy and psychology; including many of the principal conceptions of ethics, logic, aesthetics, philosophy of religion, mental pathology, anthropology, biology, neurology, physiology, economics, political and social philosophy, philology, physical science, and education; and giving a terminology in English, French, German, and Italian*. Written by many hands [**DPP**]; I, 1901; II, 1902; III. 1 et III. 2, 1905).

BIGGS, Norman "The development of Topology", *Möbius and his band* (Edited by J. Fauvel, R. Flood, and R. Wilson). Oxford University Press, 1993, p. 105-119.

BREITENBERGER, Ernst, „Gauß und Listing: Topologie und Freundschaft", *Mitteilungen der Gauss-Gesellschaft*, n°. 30 (1993), 2 – 59.

— "Johann Benedikt Listing", *History of Topology* (Edited by I. M. James), Elsevier Science, 1999.

CARNOT, Lazare, *Géométrie de position*, Paris : Duprat, 1803.

CAYLEY, Arthur, *a*. "On Poinsot's Four New Regular Solids" de Arthur Cayley (*The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4th Series, 17(1859) 123-128.

— *b*. "A Sixth Memoir upon Quantics", Philosophical *Transactions of the Royal Society of London*, 149 (1859) 61-90.

— *c*. " On Contour and Slope Lines", *The Philosophical Magazine* 18 (120), (1859) 264-268.

— "On the Partitions of a Close", *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4th series, 21 (1861) 424-8 ([Cayley *CP* V(1892), 62-65]).

— "On Listing's Theorem", *Messenger of Mathematics*, vol. II. (1873), pp. 81-89.

— "On the mathematical theory of isomers", *Phil. Mag.*, vol. XLVII (1874), 444-446.

— *Collected Mathematical Papers* [*CP*], 13 vol., Cambridge: Cambridge University Press, 1889-1898.

DELEDALLE, Gérard, *Charles S. Peirce, phénoménologue et sémioticien*. Foundations of semiotics 14, Berlin: John Benjamins Publishing Company, 1987.

EISELE, Carolyn, “Mathematical Exactitude in C.S. Peirce’s Doctrine of Exact Philosophy », K. Ketner (Ed.), *Proceedings of the C.S. Peirce Bicentennial International Congress*, Lubbock: Texas Tech. University Press, 1981, 155-168.

— “Mathematical methodology in the thought of Charles S. Peirce”, *Historia Mathematica*, volume 9, issue 3 (1982), 333-341.

EPPLE, Moritz, “Topology, matter, and space, I. Topological notions in 19th-century natural philosophy” (*Archive for History of Exact Sciences*, 52 (1998), 297-382.

— “Geometric aspects in the Development of Knot Theory”, *History of Topology* (Edited by I.M. James, North-Holland, 1999) ; chapter 11, p. 301-357.

EULER, Leonhard, « *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* » (*Novi commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae*, VIII, 1736, 128-. [« Solution d'un problème appartenant à la géométrie de position », trad. du latin par M. E. Coupy, *Nouvelles annales de mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, 10, 1851, 106-119].

FAUVEL John, FLOOD Raymond, and WILSON Robin (Eds.), *Möbius and his Band; Mathematics and Astronomy in the Nineteenth-Century Germany*. Oxford University Press, 1993.

GAUSS, Carl Friedrich, *Carl Friedrich Gauss Werke*, Ergänzungreihe IV, *Briefwechsel C. F. Gauss – H. W. M. Olbers, Hidelsheim* - New York: Georg Olms Verlag, 1976.

— *Werke*, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 12 vol., Leipzig-Berlin, 1863-1929. [rééd., Georg Olms Verlag, Hildesheim - New York, 1981. (http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/toc/?PPN=PPN235957348&IDDOC=38910)].

GRASSMANN, Hermann Günther, *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert. Erster Theil: die lineale Ausdehnungslehre enthaltend*. Leipzig: Verlag von Otto Wigand, 1844.

— *Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik*. Leipzig :Weidmannsche Buchhandlung, 1847.

HADAMARD, Jacques, *Œuvres de Jacques Hadamard*, 4 volumes. Paris : Editions du CNRS, 1968.

— « Géométrie de situation et son rôle en mathématique » (Leçon d’ouverture du cours de Mécanique Analytique et de Mécanique Céleste faite au Collège de France, le 18 mai 1909), *Œuvres*, t. II, Edition du CNRS, 1968, p. 805 – 827.

HAVENEL, Jérôme, “Peirce's Clarifications of Continuity”, *Transactions of the Charles S. Peirce Society: A Quarterly Journal in American Philosophy*, vol. 44, N° 1 (Winter 2008) 86-13.

— “Peirce’s Topological Concepts”, *New Essays on Peirce’s Philosophy of Mathematics*, Matthew E. Moore (Ed.), Open Court, 2010, 283-322.

HELMHOLTZ, Hermann Ludwig von, „Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche der Wirbelbewegung entsprechen“, *Journal für reine und angewandte Mathematik* 55 (1858), 25-55.

HILBERT, David, « Sur les Problèmes futurs des mathématiques » (traduit de l'allemand par L. Laugel ; l’original de la traduction a paru en allemand dans les *Göttinger Nachrichten*, 1900), *Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens – procès-verbaux et communications* publiés par E. Duporcq, Paris, Gauthier-Villars, 1902

JAMES, Isaac M. (Ed.), *History of Topology*, Elsevier Science, North-Holland, 1999.

FAUQUE de Jonquières, Jean-Philippe Ernest [Ernest Jonquières], *C. R.* 1890, t. 110 : « Note sur un point fondamental de la théorie des polyèdres » (20 Janvier), *C. R.* de L'Académie des Sciences de Paris, 110, 1890, p. 110-115.

— « Note sur le théorème d’Euler dans la théorie des polyèdres » (27 Janvier), *C. R.* de L'académie des Sciences de Paris, 110, 1890, p. 169-173.

— *C. R.* 1890, t. 110 : « Note sur un Mémoire de Descartes longtemps inédit, et sur les titres de son auteur à la priorité d'une découverte dans la théorie des polyèdres » (10 Février) 261-266 ; « Ecrit posthume de Descartes sur les polyèdres » (17 Février), 315-317 ; « Note sur un Mémoire présenté, qui contient, avec le texte complet et revu de l'écrit posthume de Descartes : *De solidorum elementis*, la traduction et le commentaire de cet ouvrage » (31 Mars), p. 677-680.

HARDWICK, Charles S. *Semiotic and Significs: The Correspondence between Charles S. Peirce and Victoria Lady Welby*, Indiana University Press, Bloomington, IN, 1977

LEGENDRE, Adrien-Marie, *Eléments de géométrie.* [Première édition publiée en 1793]. Paris : Firmin Didot, 12e éd. 1823.

LHUILIER, Simon A. J., (Extrait) par M. Gergonne « Mémoire sur la polyédrométrie ; contenant une démonstration directe du Théorème d’Euler, et un examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 3 (1812-13), 169-192.

— *Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques*, Genève-Paris, 1809.

— « Démonstration immédiate d’un théorème fondamentale d’Euler sur les polyèdres et exceptions dont ce théorème est susceptible », *Mémoires de l’Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg*, t. 4, Saint-Pétersbourg, 1811, p. 271-301.

LISTING, Johann Benedict, Vorstudien zur Topologie, *Göttinger Studien*, *Erste Abteilung : Mathematische und naturwissenschaftliche Abhandlungen* (1847), Göttingen, p. 811-875. (Réédité sous la forme d'un petit ouvrage par Vandenhoeck und Ruprecht, *Vorstudien zur Topologie*, 1848).

— « Etudes préliminaires à la topologie, par Johann Benedict Listing », traduit par Claude Léger et Michael Turnheim, in *Introduction à la topologie*, *Analytica* n° 60, Navarin Editeur, La découverte freudienne, 1989, p. 23-83.

— Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern, *Abhandlungen der Mathematischen Classe der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, t. 10, (1861-2), 97-180.

MAXWELL, James Clerk, *A Treatise on Electricity and Magnetism* [1873], Unabridged Third Maxwell, Edition, New York: Dover Publications, 2 vol., 1954.

— *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 2 tomes, Oxford : Clarendon Press, 1881.

— *Traité d'électricité et de magnétisme* par James Clerk Maxwell (traduit de l'anglais sur le deuxième édition [1881], par G. Séligmann-Lui avec Notes et Éclaircissements par MM. Cornu, Potier et Sarrau, Tome I. (1885), Tome II. (1887), Paris : Gauthier-Villars.

— *The Scientific letters and papers of James Clerk Maxwell*, Volume II : 1862-1873 (Edited by P. M. Harman), Cambridge : Cambridge University Press, 1995.

— *The Scientific Letters and Papers of James Clerk Maxwell* (Edited by P. M. Harman) Volume III, 1874-1879, Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

MILLER, William H., *A Treatise on Crystallography*, Cambridge, 1839.

MOORE, Matthew E. (Ed.), "The Genesis of the Peircean Continuum", *Transactions of the Charles S. Peirce Society: A Quarterly Journal in American Philosophy*, vol. 43, N° 3 (Summer 2008): 425-469).

— *a*. Essays on Peirce's Mathematical Philosophy. Chicago: Open Court, 2010.

— *b*. Philosophy of Mathematics, Selected Writings Charles S. Peirce. Bloomington: Indiana University Press, 2010.

MÜLLER, Felix, Vocabulaire mathématique ; Français-Allemand et Allemand-Français, contenant les termes techniques employés dans les mathématiques pures et appliquées. Leipzig : B. G. Teubner, 1900. [Paris, Gauthier-Villars, Libraire-éditeur].

MURPHEY, Murray G., *The development of Peirce's Philosophy* (1961); 2nd ed., Indianapolis/Cambridge: Hackett Publishing Company, Inc., 1993.

PANZA, Marco, « Peirce et le continu », *Revue de synthèse*, 1998, vol. 119, n° 4, p. 603-611.

PEIRCE, Charles S., *The New Elements of Mathematics by Charles S. Peirce*, 4 volumes en 5 (Volume 1, Arithmetic, xl + 260 p., Volume 2, Algebra and Geometry, 672 p. ; Volume 3.1, Mathematical Miscellanea, 763 p., Volume 3.2, Mathematical Miscellanea, 390 p. et Volume 4, Mathematical Philosophy, 393 p (Edited by Carolyn Eisele). The Hague: Mouton & Co. B.V. Publishers, 1976.

— “Recent Developments of Existential Graphs and their Consequences for Logic”, *CP* 4.584, 1906.

— “Immortality in the Light of Synechism” [1893], *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings* [*EP*], Edited by the Peirce Edition Project, volume 2 (1893-1913). Indiana University Press, 1998.

— “The Law of Mind”, The Monist: An International Quarterly Journal of General Philosophical Inquiry, 1892.

— *Reasoning and the Logic of Things: The Cambridge conferences lectures of 1898* (Edited by Kenneth Laine Ketner; with an Introduction by Kenneth Laine Ketner & Hilary Putnam). Cambridge, MA: Harvard University Press, 1992.

— *Collected Papers*, (Edited by Charles Hartshorne, Paul Weiss, Arthur W. Burks), *Thoemmes Continuum*; New edition (15 April 1997), 3746 pages.

— *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings* vol. 2, Peirce Edition Project (dir.), Bloomington, Indiana University Press, 1998.

PIETARINEN, Ahti-Veikko, *Signs of Logic: Peircean Themes on the Philosophy of Language, Games, and Communication* (Synthese Library **329**). Dordrecht : Springer, 2006.

PONT, Jean-Claude, a. *La topologie algébrique ; des origines à Poincaré*. Paris : Presses Universitaires de France, 1974.

— *b*. « La petite enfance de la topologie algébrique », *L'enseignement mathématique*, XX, fasc. 1-2 (1974), 111-126.

RIEMANN, Bernhard, *Œuvres mathématiques de Riemann*, traduites par L. Laugel, avec une préface de M. Hermite et un discours de M. Félix Klein. Paris : Gauthier-Villars et fils, 1898.

— *Gesammelte mathematisches Werke und Wissenschaftlicher Nachlass.* Herausgegeben unter Mitwirkung von Richard Dedekind von Heinrich Weber. Leipzig : B. G. Teubner, 1876.

ROSA, António Machuco, *Le concept de continuité chez C. S. Peirce*. Thèse de doctorat de l’É.H.E.S.S (dirigée par le Professeur Jean Petitot, soutenue le 9 Avril 1993, à l’Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris.

TAIT, Peter Guthrie, “On integrals of hydrodynamic equations which correspond to vortex motions”, *Phil. Magazine*, 33 (1867) 485-512.

— “On Knots”, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, *Session* 1876-77, 306-317.

— *Scientific papers of Peter Guthrie Tait*, vol. I, Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1898. N° XXXIX, *On knots* [*Transactions of the Royal Society of Edinburgh*], 1876-7. [Revised *May* 11, 1877].

— “Johann Benedict Listing”, *Nature*, 27 (February 1), 1883, LXV, 81-84.

— "Listing's *Topologie*. Introductory Address to the Edinburgh mathematical Society" (9 November 1883), *Philosophical Magazine*, (5) 17 (N° 103), Jan. 1884, 30-46 & plate opp. p. 80.

— *Scientific Papers of Peter Guthrie Tait,* vol. II, Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1900. LXVI, p. 85-98 (+ planche)

TURNER, J. C. & GRIEND, P. van de (eds.) *History and Science of Knot*s, World Scientific Pub., K & E *Series on knots and everything*, vol. 11, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1996.

VANDERMONDE, Alexandre-Théophile, « Remarques sur les problèmes de situation » (lu le 4 mai 1771), *Histoire de l'Académie royale des Sciences*, année 1772, seconde partie, 566-574

WALTERSHAUSEN, Wolfgang S. von, *Gauss zum Gedächtnis*. Leipzig : Hirzel, 1856.

WEISS, Paul, "Charles Sanders Peirce", *Dictionary of American Biography* (Edited by D. Malone), vol. 14, 1934, New York: Scribner, 398-403.

ZEMAN, J. Jay, *The Graphical Logic of C. S. Peirce*. Ph. D. Dissertation, University of Chicago, 1964 [http://www.clas.ufl.edu/users/jzeman/graphicallogic/introduction.htm, 2002 et http://www.clas.ufl.edu/users/ jzeman/graphicallogic/index.htm].

CDC The Century Dictionary and Cyclopedia, vol. I-X. Prepared under the superintendence of William Dwight Whitney, New York: The Century Co, 1889, 1895

CP Peirce, C. S. *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vol. I-VI : 1931-1935 (Ed. Charles Hartshorne et Paul Weiss) ; vol. VII-VIII (Ed. Arthur W. Burks). Cambridge, MA: Harvard University Press [Édition électronique sur CR-ROM préparée et présentée par John Deely, Intelex Corporation, Charlottesville, VA, USA, 1994].

DPP Baldwin, J. M. (ed) *Dictionary of Philosophy and Psychology*. vols. 1-2. Gloucester, MA: Smith, 1901-1905 (rééd. 1960).

NEM Peirce, C. S., *The New Elements of Mathematics*, vols. 1-4. C. Eisele (ed). La Haya: Mouton, 1976.

RLT Peirce, C. S., *Reasoning and the Logic of Things*. *The Cambridge Conferences Lectures of 1898*. K. L. Ketner (Ed.). Cambridge, MA: Harvard University Press, 1992.