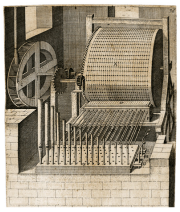

Khronos, Revista de História da Ciência
nº 13, julho 2022

ENSAIOS - ESSAYS

Computadores, Matemática e significado

Paulo Castro
Prof. Dr. Grupo de Filosofia das Ciências da Natureza
Centro de Filosofia das Ciências – Universidade de Lisboa
Paulo.castro.pi@gmail.com

Resumo: Através do computador é possível aceder graficamente a realidades matemáticas de outra forma inacessíveis. Sugere-se que a aplicação de uma didáctica significativa, no âmbito da matemática experimental, permite aos estudantes reflectir sobre questões fundamentais da realidade. Sugere-se que o resultado dessa aprendizagem não formal da matemática permite a construção de referências extensíveis à vida quotidiana, promovendo a maturidade intelectual e o desenvolvimento da personalidade durante a adolescência.

Palavras-chave: Computador; Aprendizagem não formal da matemática; Pedagogia; Pensamento filosófico; Epistemologia.

Computers, Mathematics and Meaning

Abstract: The computer graphical interface gives access to hidden mathematical reality. It is herein suggested that using experimental setups with numbers, students can think about major philosophical questions concerning reality. Furthermore, it is also proposed that such non-formal learning processes can promote common sense wisdom, developing intellectual maturity and personality during adolescence.

Keywords: Computer; Non-formal learning of mathematics; Pedagogy; Philosophical thought; Epistemology.

As virtudes pedagógicas de um computador

Apesar desta ser a época da inteligência artificial, o computador, a plataforma procedimental que instancia a tecnologia conexionista das redes neuronais, não perdeu o seu estatuto operacional e, idealmente, pedagógico. Uma relação mais participativa, por oposição a passiva ou meramente reactiva, entre o utilizador e os écrans que actualmente nos "hipnotizam", é talvez garantia de que não nos deixaremos mesmerizar pelo encanto de uma comunicação, quiçá, demasiado rápida e excessivamente sensual.

O computador, na sua versão conceptualmente mais simples, é uma poderosa máquina de calcular que pode ser utilizada para explorar realidades matemáticas ocultas. Com o software adequado é possível percorrer regiões gráficas até então desconhecidas, reconhecendo padrões e relações surpreendentes. Um exemplo clássico é o das geometrias fractais descobertas em 1979 por Benoît Mandelbrot (MANDELBROT, 1982).

Adequadamente contextualizada, a capacidade exploratória de um computador pode ajudar os estudantes a reflectir sobre os aspectos qualitativos e quantitativos da realidade matemática. O pensamento cartesiano a que nos habituámos por força dos instrumentos didácticos de uma era pré-digital pode ser estendido a uma forma dita não "linear de pensamento". Enquanto que o cartesianismo sustenta que a totalidade é apenas o resultado da composição das suas partes, o pensamento não linear propõe a emergência de novas propriedades a partir da diversidade das relações possíveis entre os termos componentes de um sistema (CROCA; ARAÚJO, 2010). A utilização do computador no âmbito da matemática experimental revela que a manipulação recursiva de um objecto matemático origina complexidade e riqueza. Que a manipulação não trivial dos termos componentes de uma estrutura matemática permite obter resultados qualitativamente muito diferentes entre si, com emergência de novas propriedades. Este facto pode ser aproveitado para desenvolver a aprendizagem não formal da Matemática durante a adolescência, estádios em os estudantes encontram dificuldade em reconhecer significado existencial no discurso técnico-científico, a par de um manifesto desinteresse e falta de resiliência em relação ao domínio da linguagem matemática.

Em decurso serão apresentadas três situações no contexto da matemática experimental, procurando-se ilustrar a possibilidade de uma didáctica qualitativa para o ensino da matemática. Sugere-se que a mesma pode promover a maturidade intelectual, proporcionando referências significativas para o desenvolvimento da personalidade durante a adolescência.

Como metodologia provisória sugere-se que o tipo de didáctica a ilustrar deve preferencialmente i) colocar uma questão fundamental para além do domínio restrito de aplicação matemática, ii) partir de um acto experimental com números utilizando o computador, iii) desenvolver a sensibilidade estética dos estudantes para os resultados obtidos e iv) fomentar a discussão sobre o significado desses resultados, providenciando o acesso a algumas das competências de cálculo que lhes deram origem. Cada um dos exemplos apresentados começará por colocar uma interrogação de pendor filosófico a partir da qual se origina o processo de conhecimento: a) pode a desordem criar ordem ou complexidade, b) podem pequenas diferenças criar grandes mudanças, c) podem objectos triviais ocultar factos surpreendentes.

Conforme se verá, estas questões de natureza essencialmente qualitativa podem ser decididas através das experiências matemáticas apresentadas.

A metodologia sugerida deverá em suma ajudar os estudantes a pensar o mundo do ponto de vista filosófico, matemático e estético, tendo por base uma atitude experimental, proporcionando momentos significativos na vivência escolar e minimizando o desinteresse dos alunos pelo discurso técnico da Ciência.

O que nos dizem realmente os números

No que se segue serão apresentados três casos de matemática experimental. Referencia-se o software utilizado e o procedimento de utilização. Contextualiza-se a situação no âmbito da questão fundamental que se pretende investigar. Enunciam-se as temáticas associadas à questão, tratadas segundo categorias de análise filosófica, matemática e estética. Um conjunto pertinente de figuras é apresentado e comentado procurando tornar explícita uma resposta possível para a interrogação colocada.

Números constroem coisas

Existe software na internet, algum dele em regime de shareware, que permite obter gráficos a partir de expressões analíticas ou a partir de listas de números, representando coordenadas rectangulares num referencial cartesiano. O que aqui se fez tirou partido desta última funcionalidade. O conjunto dos números reais contém, entre outros, dois tipos de números: racionais que dão origem a dízimas infinitas periódicas e irracionais com desenvolvimento decimal infinito sem estrutura aparente. Tomando parte do desenvolvimento decimal de qualquer um desses números, decompõe-se a mesma em pares de dígitos, criando uma lista de coordenadas que é introduzida no software. Os pontos representados no referencial são então unidos por segmentos de recta, produzindo figuras. Aqui utilizou-se um programa chamado 3D Grapher [1]. A questão fundamental colocada é se pode a desordem criar ordem ou complexidade. A esse propósito, os estudantes podem reflectir sobre os seguintes temas:

Filosófico	Matemático	Sensibilidade estética
Relação entre ordem e desordem	Para que também servem os números.	Números podem ter um significado para além do seu aspecto imediato?

Tabela 1. «Números constroem coisas» - Tópicos de reflexão.

O desenvolvimento decimal do número racional 1/3 = 0,3333333(3) permite obter o ponto de coordenadas rectangulares (3,3). É, portanto, um número cuja representação gráfica é desinteressante. O desenvolvimento decimal do número racional 113123/999999 = 0,113123113123(113123) permite obter o triângulo de vértices (1,1), (3,1) e (2,3) representado na figura.

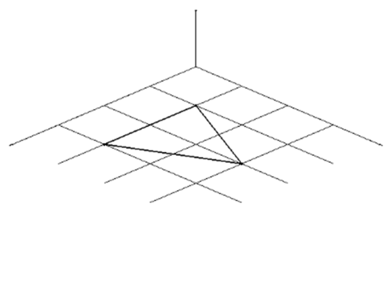

Figura 1: Triângulo produzido a partir do desenvolvimento decimal 0,113123(113123).

[1] «D Grapher - plots animated 2D and 3D graphs of equations and tables». Acedido 2 de Novembro de 2014. http://www.romanlab.com/3dg/.

Dependendo da expansão considerada podem ser formadas outras figuras geométricas simples, de interesse gráfico relativo. Usando os primeiros 5000 dígitos do desenvolvimento decimal de pi, o mais célebre dos irracionais, todo o plano será coberto, como mostra a figura seguinte tendo-se imposto a grelha a branco sobre o gráfico obtido:

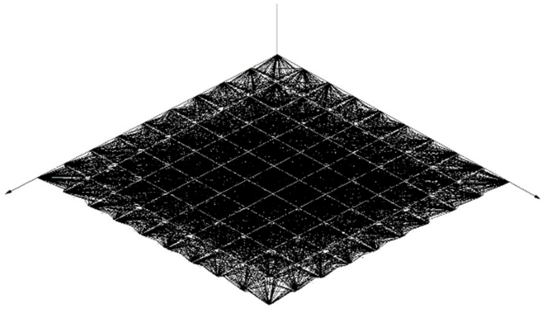

Figura 2. Cinco mil dígitos da expansão decimal de pi.

O plano parece preenchido de forma densa e desordenada. Porém, ampliando, verificamos que existe uma tendência reconhecível para se formarem figuras regulares por todo o plano. A conclusão parece inevitável, menor estrutura na expansão decimal de um número conduz a maior estrutura e diversidade no gráfico total construído: «quanto mais desordem no número utilizado, mais ordem e riqueza na figura obtida».

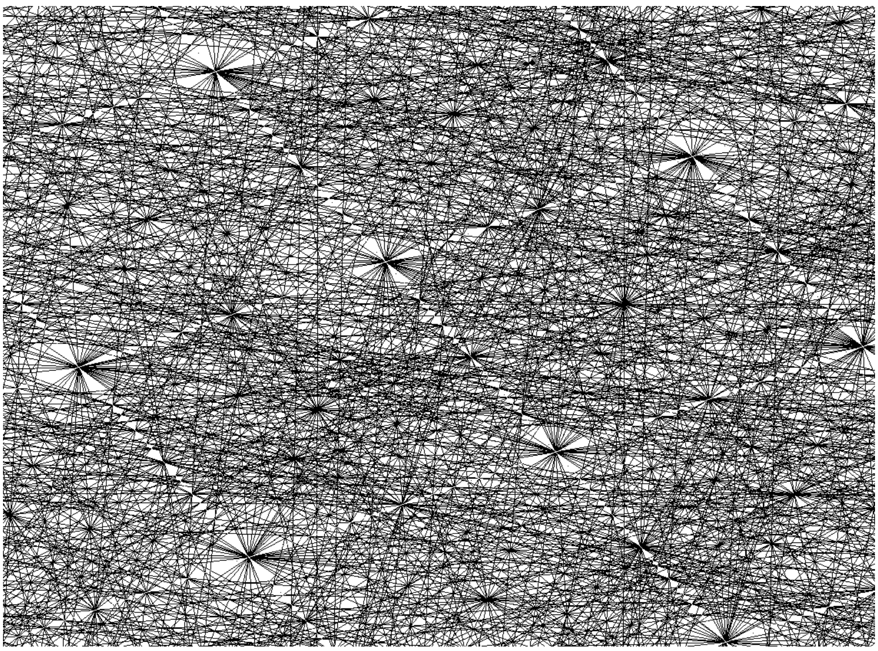

Figura 3. Figuras regulares no plano para cinco mil dígitos do desenvolvimento decimal de pi.

Este resultado é válido para qualquer número irracional e também para qualquer sequência aleatória de dígitos. Desordem pode criar ordem, complexidade e riqueza.

Pequenas diferenças produzem grandes mudanças

Certo tipo de geometrias fractais são produzidas repetindo, sucessivamente, o mesmo procedimento sobre uma dada figura geométrica. Cada aplicação diz-se uma iteração. São casos conhecidos o triângulo de Sierpinski ou a estrela de Koch. Mais uma vez, existe uma quantidade apreciável de software permitindo a construção deste tipo de geometrias através da manipulação de um número limitado de parâmetros. No caso, utilizou-se um programa chamado Fractal Snowflake Generator [2].

Na primeira iteração, um segmento de recta é subdivido em dois segmentos mais pequenos, segundo um certo ângulo e proporção. Na segunda iteração, cada um dos dois segmentos de recta anteriores volta a ser subdividido em dois, seguindo a mesma regra. O programa permite controlar o número de iterações (Complexity) assim como o número de segmentos de recta que serão subdivididos na primeira iteração (Number of rays). Para conduzir as nossas experiências, utilizaremos estes dois parâmetros, juntamente com um outro (Angle) que configura o ângulo entre o segmento de recta divido e cada um dos dois sub-segmentos de recta resultantes. A questão fundamental inicialmente colocada consiste em averiguar se podem pequenas diferenças criar grandes mudanças. Associados à questão consideram-se relevantes os seguintes tópicos de reflexão:

Filosófico	Matemático	Sensibilidade estética
Relação entre simplicidade e complexidade	Para que também serve a divisão.	É possível produzir coisas esteticamente harmoniosas usando regras simples?

Tabela 2. «Pequenas diferenças produzem grandes mudanças» - Tópicos de reflexão.

[2] A.I.Studio Software Informer: Latest A.I.Studio software updates and reviews: Fractal Snowflake Generator, WatzNew, S...» Acedido 2 de Novembro de 2014. http://a-i-studio.software.informer.com/.

As três imagens seguintes mostram as geometrias resultantes sucessivamente por aplicação de uma, duas e três iterações (Complexity = 2, 3 e 4, Number of rays = 1), tendo-se alterado na segunda geometria o valor do ângulo (de Angle = 60º para Angle = 30º) e retornando-se ao valor de 60º nas seguintes. A última geometria é o resultado de quatro iterações aplicadas a três segmentos de recta iniciais (Number of rays = 3).

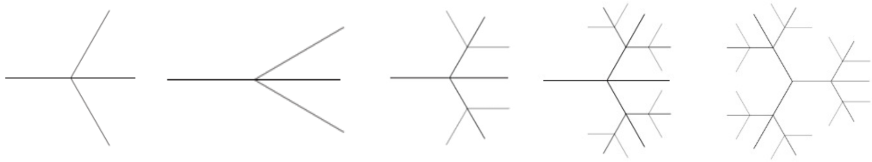

Figura 4: Subdivisões de segmentos de recta.

Ensaiemos agora uma subdivisão aplicada onze vezes sucessivas (Complexity = 12), o máximo que o software permite, para um número inicial de três segmentos de recta (geometria do lado esquerdo da figura 5). E, em seguida, para o mesmo número de iterações (doze), consideremos colocar vinte segmentos iniciais (Number of rays = 20).

Obteremos a geometria à direita na figura.

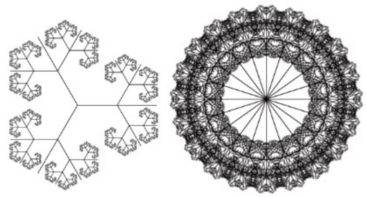

Figura 5. Aumento de complexidade para doze iterações sucessivas.
Três segmentos iniciais à esquerda, vinte à direita.

A complexidade da geometria à direita aumentou e, intuitivamente, esse aumento parece ter a ver com o aumento do número de segmentos iniciais. Se agora manipularmos o ângulo relativo entre os sub-segmentos e o segmento que será dividido, mudanças qualitativamente maiores ocorrem. A figura 6 mostra as geometrias resultantes, usando os mesmos parâmetros utilizados na experiência anterior (Complexity = 12, Number of rays = 20, Angle = 60º) para vários valores do ângulo (Angle = 5º, 20º, 50º, 95º, 110º, 150º).

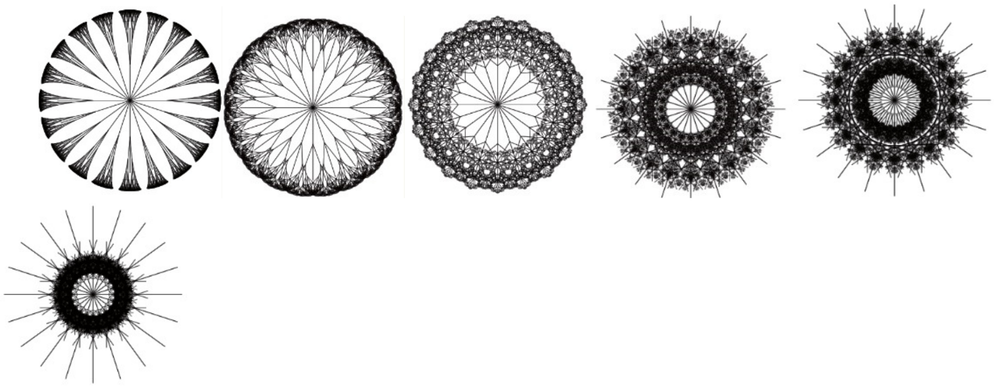

Figura 6: Alteração das geometrias em função do ângulo
(Angle = 5º, 20º, 50º, 60º, 95º, 110º e 150º).

A segunda experiência parece tornar adequada a afirmação de que pequenas diferenças podem, na verdade, produzir grandes mudanças.

Surpresa na monotonia

O programa Excel do Microsoft Office dispensa qualquer apresentação. É uma gigantesca colecção de máquinas de calcular à disposição dos mais curiosos. A próxima experiência introduz-se formulando o seguinte problema:

> Um rapaz dá um passo e acha x moedas no chão. De cada vez que dá um novo passo, acha três moedas mais a metade das moedas que achou no passo imediatamente anterior. Tendo dado três passos e achado onze moedas, quantas moedas achou no primeiro passo?

A resolução do problema implica escrever uma equação do primeiro grau, cuja solução é x = 2 moedas.

Podemos verificar que duas moedas é a solução do problema colocado. No 1º passo são achadas 2 moedas, no 2º passo, são achadas 3 + (1/2)2 = 4 moedas, no 3º passo são achadas 3 + (1/2)4 = 5 moedas. No total o rapaz achou 2 + 4 + 5 = 11 moedas. Se o rapaz tivesse dado um quarto passo, o enunciado do problema deixaria de ter sentido, porque aplicando a regra anterior teríamos 3 + (1/2)11 = 9,5 moedas, uma situação impossível dado que só existem números inteiros de moedas.

Para determinar o número máximo de passos que podem ser dados sem que ocorra um número não inteiro de moedas, há que investigar as sequências de números que se obtêm por aplicação sucessiva da regra dada para vários valores possíveis do número inicial de moedas. A regra em causa (3 + (1/2)x) é a equação de uma recta, um objecto matemático cujo gráfico é infinitamente monótono e desinteressante.

A questão fundamental associada a esta experiência matemática, decorrendo do problema formulado, consiste em averiguar se «podem coisas triviais ocultar factos surpreendentes», considerando-se relevantes os seguintes tópicos de reflexão:

Filosófico	Matemático	Sensibilidade estética
Relação entre visível e oculto.	Para que também serve a equação de uma recta.	É possível percepcionar beleza no que parece comum?

Tabela 3: «Surpresa para além de qualquer monotonia» - Tópicos de reflexão.

As sequências procuradas dependem do número inicial de moedas achadas (no problema, x = 2). A figura seguinte mostra as sequências obtidas no Excel para valores iniciais pares entre 2 e 142 (valores iniciais ímpares não produziram sequências de inteiros seguidos). Em cada coluna, estão indicados todos os números até ao último inteiro a partir do qual só se obtêm números com parte decimal. Na região horizontal, em cima, indicaram-se os períodos de repetição de alguns dos números finais em cada sequência.

Só há uma sequência que contém números inteiros para um número infinito de iterações, aquela que começa no valor inicial 6, repetindo-se indefinidamente ao longo da segunda coluna, à esquerda na figura.

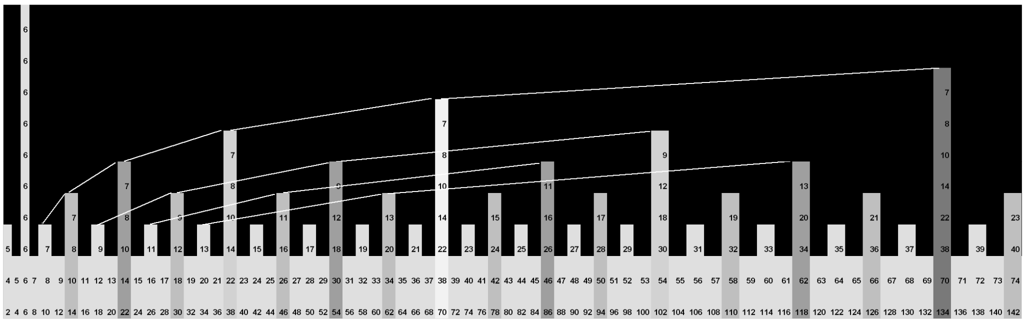

Figura 7. Sequências de números inteiros por iteração da regra 3 + (1/2)x .
Na horizontal indicam-se os períodos de repetição dos inteiros 7, 9, 11 e 13.

Parece que se manipularmos de forma invulgar os termos que compõem a equação de uma recta, esta pode revelar padrões de uma riqueza surpreendente. A experiência matemática produzida de alguma forma sugere que objectos triviais podem, contra todas as expectativas, ocultar factos surpreendentes.

Conclusão

A utilização adequada do computador na experimentação matemática pode constituir pretexto para reflectir sobre outro tipo de preocupações. Parece possível interpretar a realidade de forma a tornar explícitas relações finas entre o comportamento quantitativo dos objectos matemáticos e a enunciação de significados extensíveis à pluralidade da vida. Abaixo, em rodapé, indicam-se algumas obras de referência, fazendo juz ao que aqui se disse e alargando significativamente a relevância da utilização do computador no ensino da matemática (BAILEY et al, 2007; BORWEIN, 2008; MALETSKY et al, 1992).

Talvez uma aplicação didáctica do computador na linha do que aqui se sugeriu se revele um meio de persuasão eficaz perante a suspeição natural dos alunos, quando para defendermos a justeza do seu ensino, afirmamos que a matemática está em tudo. Uma afirmação que mesmo sendo verdadeira, está longe de ser óbvia.

Agradecimento

Este trabalho foi apoiado pela FCT (Portugal) através do CFCUL (projecto FCT UIDB/00678/2020).

REFERÊNCIAS

Bailey, D. H., Borwein, J., Calkin, N., Luke, R., Girgensohn, R., & Moll, V. (2007). *Experimental Mathematics in Action*. Wellesley, Mass: A K Peters/CRC Press.

Borwein, J., & Devlin, K. (2008). *The Computer as Crucible: An Introduction to Experimental Mathematics*. Wellesley, Mass: A K Peters/CRC Press.

Croca, J., & Araújo, E. F. (2010). *A New Vision on Physis, Eurhythmy, Emergence and Nonlinearity* (Center for Philosophy of Science, University of Lisbon.). Center for Philosophy of Science, University of Lisbon.

Maletsky, E., Perciante, T., Yunker, L., Peitgen, H.-O., Jürgens, H., & Saupe, D. (1991). *Fractals for the Classroom: Part One: Introduction to Fractals and Chaos* (1st ed. 1992. Corr. 2nd printing edition.). New York u.a.: Springer.

Mandelbrot, Benoit B. *The Fractal Geometry of Nature*. W.H.Freeman & Co Ltd, 1982.