ISSN 1808-057X
DOI: 10.1590/1808-057x201807320

Artigo Original

Limites superior e inferior para anuidades e seguros de vida a partir de dados incompletos sobre mortalidade

Filipe Costa de Souza[1]
https://orcid.org/0000-0001-9903-5403
E-mail: filipe.costas@ufpe.br

[1] Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Departamento de Ciências Contábeis e Atuariais, Recife, PE, Brasil

Recebido em 05.01.2018 – *Desk* aceite em 15.02.2018 – 2ª versão aprovada em 04.08.2018 – *Ahead of print* em 25.03.2019
Editor Associado: Luís Eduardo Afonso

RESUMO

O objetivo deste estudo foi estabelecer limites superior e inferior para o valor presente esperado de anuidades vitalícias e seguros de vida inteira a partir de dados incompletos sobre mortalidade, generalizando resultados anteriores sobre expectativa de vida. Desde seu surgimento, no século XVII, a ciência atuarial se dedica ao estudo de anuidades e seguros. Assim, estabelecer intervalos que propiciam uma ideia inicial sobre o custo desses produtos a partir de dados incompletos sobre mortalidade representa uma contribuição teórica para a área e isso pode ter importantes aplicações em mercados sem registros históricos ou com pouca confiabilidade dos dados sobre mortalidade, bem como em mercados novos ainda pouco explorados. Foram construídos, para o caso contínuo e o discreto, limites superior e inferior para o valor presente esperado de anuidades vitalícias e seguros de vida inteira, contratados por uma pessoa de idade x, a partir de informação sobre o valor presente esperado desses respectivos produtos financeiros subscritos por uma pessoa de idade $x + n$ e a probabilidade de um indivíduo de idade x alcançar com vida a idade $x + n$. Por meio dos limites de uma anuidade contínua, em um ambiente em que a taxa instantânea de juros é igual a zero, os resultados apresentados também estabelecem limites para a expectativa completa de vida, o que implica que a contribuição desta pesquisa generaliza resultados anteriores da literatura. Constatou-se, ainda, que, tanto para anuidades quanto para seguros, o tamanho dos intervalos construídos cresce com aumentos do tamanho da lacuna de dados e diminui à medida que a curva de sobrevivência se torna mais retangular. Ilustrativamente, limites para a expectativa de vida aos 40 anos e aos 60 anos, para os 10 municípios com maior expectativa de vida ao nascer no Brasil no ano de 2010, foram construídos a partir de dados disponíveis no Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil.

Palavras-chave: matemática atuarial, ciências atuariais, anuidades, seguro de vida, tábua de mortalidade.

Endereço para correspondência

Filipe Costa de Souza
Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Departamento de Ciências Contábeis e Atuariais
Avenida dos Funcionários, S/N – CEP 50670-901
Cidade Universitária – Recife – PE – Brasil

1. INTRODUÇÃO

Segundo Pitacco, Denuit, Haberman e Olivieri (2009), a ciência atuarial floresceu em meados do século XVII, a partir da teoria dos juros compostos e da teoria das probabilidades, além das observações sobre mortalidade. Ainda segundo esses autores, um dos primeiros temas a ser abordado por essa nova ciência foi o cálculo do valor presente esperado de anuidades. Tal interesse surgiu porque os governos costumavam vender rendas vitalícias como forma de financiar empreendimentos públicos.

Pitacco et al. (2009) também indicam que foi Jan de Witt, em 1671, o precursor do cálculo de anuidades a partir de uma tábua de mortalidade hipotética e de uma taxa de juros constante. Contudo, como bem destacam Haberman e Sibbet (1995), a contribuição de de Witt teve pouca repercussão na época. O mesmo, por sua vez, não pode ser dito do trabalho de Edmund Halley, em 1693, o qual, além de desenvolver uma tábua de mortalidade a partir de observações reais, também apresentou um método para o cálculo do custo de anuidades que reverbera até os dias atuais. O leitor interessado em aspectos históricos da ciência atuarial irá beneficiar-se da leitura de Hald (1990) e Haberman e Sibbet (1995).

Percebe-se, pois, que a ciência atuarial, desde seu surgimento, tem como um de seus focos centrais o estudo de anuidades. Para calcular o valor presente esperado de uma anuidade para dado indivíduo de idade x, é necessário ter acesso a uma tábua completa de mortalidade (com informações, pelo menos, a partir da idade x) ou uma função sobrevivência representativa da população na qual a pessoa está inserida. Em algumas ocasiões, também é possível gerar uma tábua completa a partir de tábuas abreviadas e utilizar a tábua completa resultante para calcular o custo da anuidade ou seguro desejado (Baili, Micheli, Montanari, & Capocaccia, 2005; Ibrahim, 2008).

Contudo, quando não existem dados com as probabilidades de mortalidade (idade após idade) a partir da idade x, o cálculo do valor presente esperado da renda aleatória desejada fica comprometido. A impossibilidade de obter dados detalhados sobre mortalidade para uma sequência de idades pode ocorrer por falta de registros históricos ou pouca confiabilidade dos dados existentes ou, ainda, por se tratar de um mercado novo ainda pouco explorado, por exemplo.

A ausência de tábuas completas de mortalidade também limita o cálculo de medidas de longevidade, como no caso da expectativa completa de vida. Nesse sentido, Cohen (2011) estabeleceu limites, superior e inferior, para o valor da expectativa de vida em dada idade x, conhecendo apenas dados detalhados sobre a mortalidade a partir de uma idade $x + n$ (e, com efeito, a expectativa de vida na idade $x + n$), bem como a probabilidade de uma pessoa de idade x alcançar com vida a idade $x + n$.

O objetivo deste estudo é estender os resultados de Cohen (2011), estabelecendo limites (superior e inferior) para o valor presente esperado de anuidades e seguros de vida subscritos por uma pessoa de idade x, tanto no caso contínuo quanto no discreto. A partir da definição desses limites, seria possível estimar o prêmio atuarial desses produtos financeiros sem o conhecimento detalhado do perfil de mortalidade entre a idade x e dada idade $x + n$.

Convém ressaltar que, mesmo sendo mais comum a ausência de dados para idades mais avançadas, entende-se que casos eventualmente mais atípicos também mereçam uma discussão apropriada. Na prática, a lacuna de dados para idades mais jovens poderia ocorrer, por exemplo, em Regimes Próprios de Previdência Social (RPPS) – ou também em fundos de pensão – que tenham poucos empregados nas idades iniciais de trabalho (ou até uma sequência de idades iniciais sem funcionários) e que necessitem estimar tábuas de mortalidade e/ou calcular o custo de anuidades para fins de aposentadoria. Assim, este estudo apresenta uma contribuição teórica para a literatura, ao generalizar os resultados de Cohen (2011), com potencial aplicabilidade prática.

Para alcançar o objetivo traçado, o restante do texto está organizado da seguinte forma: na seção 2 é apresentada a fundamentação teórica, com foco no cálculo dos prêmios únicos puros para rendas aleatórias e seguros de vida, bem como uma exposição dos resultados de Cohen (2011) para a expectativa de vida. Na seção 3 são demonstrados formalmente os limites, superior e inferior, para o valor presente esperado de anuidades e seguros; e na seção 4 resultados numéricos são expostos de modo ilustrativo, também fomentando discussões sobre o tema. Já a seção 5 apresenta as considerações finais deste estudo. Vale destacar, ainda, que, no decorrer do texto, será adotada a notação atuarial padrão. Para maiores detalhes, ver Bowers, Gerber, Hickman, Jones e Nesbitt (1997).

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Suponha uma tábua completa de mortalidade que tem ω como sua idade limite, isto é, não se supõe que qualquer indivíduo alcance com vida a idade ω. Sendo q_x a probabilidade de uma pessoa de idade x falecer ao longo dessa idade, isso implica que $q_{\omega-1} = 1$. Ademais, ${}_tp_x$, para $0 \leq x \leq \omega$ e $t \geq 0$, indica a probabilidade de uma pessoa de idade x alcançar com vida a idade $x + t$. No caso contínuo, ${}_tp_x$ é denominada função sobrevivência. Obviamente, por ser uma função sobrevivência, ${}_tp_x$ é uma função não crescente de t, ou seja, à medida que t aumenta, ${}_tp_x$ diminui ou permanece no mesmo valor. Além disso, ${}_0p_x = 1$ e ${}_tp_x = 0$ sempre que $t \geq \omega - x$. Sendo, ainda, $\mu_x(t) = \lim_{dt \to 0^+} \frac{{}_{dt}q_{x+t}}{dt}$ a força de mortalidade (ou taxa de mortalidade instantânea) na idade $x + t$, para $t > 0$, então, a probabilidade de uma pessoa de idade x sobreviver até a idade $x + t$ e falecer instantaneamente em seguida é definida por ${}_tp_x\mu_x(t)dt$ (Dickson, Hardy, & Waters, 2013). Por fim, seja $i \geq 0$ a taxa de juros anual efetiva em um regime de capitalização composta e seja $\delta \geq 0$ a taxa instantânea de juros no regime de capitalização contínua, tal que $ln(1 + i) = \delta$. Desse modo, o fator de descapitalização financeira é definido como $v = 1/(1 + i) = e^{-\delta}$.

Então, como bem ensinam Dickson, Hardy e Waters (2013), o valor presente esperado de uma anuidade vitalícia, imediata, que paga uma unidade monetária por ano de modo contínuo e que foi contratada por uma pessoa de idade x é dado por:

$$\bar{a}_x = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x . e^{-\delta t} dt. \quad (1)$$

O caso discreto, ou seja, o prêmio único puro para uma anuidade vitalícia, imediata, antecipada, com periodicidade anual, que paga uma unidade monetária por ano e que foi contratado por uma pessoa de idade x é definido como:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} {}_tp_x . v^t. \quad (2)$$

Sendo $\bar{A}_x$ o valor presente esperado de um seguro de vida inteira, imediato, que paga uma unidade monetária no instante da morte do contratante e que foi subscrito por uma pessoa de idade x, e sendo A_x a contraparte discreta, ou seja, que paga uma unidade monetária no final do ano da morte do contratante, então, tais valores são definidos formalmente como:

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x . \mu_x(t) . e^{-\delta t} dt \quad (3)$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} {}_tp_x . q_{x+t} . v^t. \quad (4)$$

É possível associar o valor presente atuarial dos seguros de vida inteira (contínuo e discreto) ao valor presente das respectivas anuidades como segue:

$$\bar{A}_x = 1 - \delta . \bar{a}_x \quad (5)$$

$$A_x = 1 - (1 - v) . \ddot{a}_x. \quad (6)$$

Maiores detalhes sobre a relação entre anuidades e seguros são apresentados por Dickson, Hardy e Waters (2013).

Para calcular o valor tanto de $\ddot{a}_x$ quanto de A_x (quando $i > 0$) é necessário conhecer todo o histórico de sobrevivência a partir da idade x. A mesma exigência também seria necessária caso fosse desejado calcular a expectativa completa de vida de uma pessoa de idade x, que é definida como:

$$\mathring{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x dt. \quad (7)$$

Nesse espírito, Cohen (2011) estabeleceu limites, superior e inferior, para a expectativa de vida de uma pessoa de idade x, $\mathring{e}_x$, mesmo sem conhecimento detalhado do histórico de mortalidade entre as idades x e $x + n$, desde que seja conhecida a probabilidade de um indivíduo de idade x sobreviver até a idade $x + n$, ${}_np_x$, bem como $\mathring{e}_{x+n}$. Formalmente, segundo o autor, tais limites são definidos como:

$${}_np_x \left(n + \mathring{e}_{x+n} \right) \leq \mathring{e}_x \leq n + {}_np_x . \mathring{e}_{x+n}. \quad (8)$$

Logo, a partir desses limites, o pesquisador poderia ter melhor conhecimento sobre, ou até aproximar, o valor de $\mathring{e}_x$. Um exemplo da aplicação desse resultado é o estudo de Rabbi (2013), que calculou os limites, superior e inferior, para a expectativa de vida em diversos grupos etários, como forma de analisar tendências na expectativa de vida em Bangladesh.

Além da clara relevância prática, esse resultado também foi utilizado pelo autor no desenvolvimento de outros resultados teóricos. Cohen (2015) apresentou limites mais acurados para as desigualdades de Markov e Chebyshev quando informações sobre valores esperados condicionais estão disponíveis. Segundo o autor, a desigualdade de Markov fornece um limite superior para a probabilidade de uma variável aleatória não negativa assumir um valor maior do que n (para $n > 0$). Assim, por exemplo, sendo tal variável aleatória o tempo vivido por um recém-nascido até a morte dele, a desigualdade de Markov indicaria que:

$$ {}_{n}p_0 \leq \frac{\mathring{e}_0}{n}. \quad (9)$$

Entretanto, por (8), uma vez conhecida $\mathring{e}_n$ (a esperança condicional), é possível refinar o limite para ${}_{n}p_0$ como segue:

$$ {}_{n}p_0 \leq \frac{\mathring{e}_0}{n + \mathring{e}_n}. \quad (10)$$

Logo, esses resultados só reforçam a importância do estudo de Cohen (2011), estimulando a extensão dessas ideias para outras áreas.

3. LIMITES SUPERIOR E INFERIOR PARA ANUIDADES E SEGUROS DE VIDA

Nesta seção, a ideia de Cohen (2011) é estendida para o caso de rendas aleatórias contínuas, como exposto na Proposição 1. Além disso, o caso discreto também é apresentado na Proposição 2. Entretanto, primeiro, convém definir o valor presente de uma renda certa, imediata, temporária por n anos e que paga uma unidade monetária por ano, tanto para o caso contínuo quanto para o caso discreto (antecipado), como expressos nas equações (11) e (12), respectivamente:

$$ \bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} dt = \begin{cases} n & , \delta = 0 \\ \dfrac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} & , \delta > 0. \end{cases} \quad (11)$$

$$ \ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t = \begin{cases} n & , i = 0 \\ \dfrac{1 - v^n}{1 - v} & , i > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Proposição 1 (caso contínuo): sendo x e $x + n$ duas idades tais que $0 \leq x \leq x + n < \omega$, é possível afirmar que

$$ \left(\bar{a}_{\overline{n}|} + \bar{a}_{x+n}.\, e^{-\delta n}\right).\ {}_{n}p_x \leq \bar{a}_x \leq \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_{n}p_x.\, e^{-\delta n}.\, \bar{a}_{x+n} \quad (13)$$

Essa proposição estabelece limites, superior e inferior, para $\bar{a}_x$ a partir de valores conhecidos de $\bar{a}_{x+n}$ e ${}_{n}p_x$. A prova seguirá a mesma linha de Cohen (2011).

Prova: sabe-se que

$$ \begin{aligned} \bar{a}_x &= \int_0^{\omega - x} {}_{t}p_x.\, e^{-\delta t} dt. \\ &= \int_0^n {}_{t}p_x.\, e^{-\delta t} dt + \int_n^{\omega - x} {}_{t}p_x.\, e^{-\delta t} dt \\ &= \int_0^n {}_{t}p_x.\, e^{-\delta t} dt + {}_{n}p_x.\, e^{-\delta n}. \int_0^{\omega - x - n} {}_{t}p_{x+n}.\, e^{-\delta t} dt. \end{aligned} $$

Por ser uma probabilidade, tem-se que ${}_{t}p_x \leq 1$, para todo $t \geq 0$, então

$$ \int_0^n {}_{t}p_x.\, e^{-\delta t} dt \leq \int_0^n e^{-\delta t} dt = \bar{a}_{\overline{n}|}. $$

Portanto,

$$\bar{a}_x \leq \int_0^n e^{-\delta t} dt + {}_n p_x . e^{-\delta n} . \int_0^{\omega - x - n} {}_t p_{x+n} . e^{-\delta t} dt$$

$$= \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_n p_x . v^n . \bar{a}_{x+n} .$$

Agora resta provar o limite inferior. Assim, retorne ao ponto em que

$$\bar{a}_x = \int_0^n {}_t p_x . e^{-\delta t} dt + {}_n p_x . e^{-\delta n} . \int_0^{\omega - x - n} {}_t p_{x+n} . e^{-\delta t} dt .$$

Como ${}_t p_x$ é uma função não crescente de t, então ${}_n p_x \leq {}_t p_x$, para $0 \leq t \leq n$. Com efeito,

$$\int_0^n {}_t p_x . e^{-\delta t} dt \geq \int_0^n {}_n p_x . e^{-\delta t} dt = {}_n p_x . \bar{a}_{\overline{n}|}$$

Logo,

$$\bar{a}_x \geq \left(\bar{a}_{\overline{n}|} + \bar{a}_{x+n} . e^{-\delta n} \right) . {}_n p_x ,$$

o que finaliza a prova.

Após essa demonstração, dois pontos merecem ser destacados. Primeiro, a Proposição 1 é, de fato, uma extensão dos achados de Cohen (2011). Para constatar isso, basta assumir que $\delta = 0$ em (13), daí se segue naturalmente que

$$\left(n + \mathring{e}_{x+n} \right) . {}_n p_x \leq \mathring{e}_x \leq n + {}_n p_x . \mathring{e}_{x+n} ,$$

ou seja, o resultado de Cohen (2011) é um caso particular da Proposição 1 quando $\delta = 0$.

Segundo, para $\delta > 0$, e tomando como base a relação entre $\bar{A}_x$ e $\bar{a}_x$ apresentada na Equação (5), também é possível estabelecer limites para $\bar{A}_x$ a partir de um conhecimento *a priori* sobre $\bar{A}_{x+n}$ e ${}_n p_x$. Desta forma tem-se que:

$$e^{-\delta n} \left(1 - {}_n p_x \right) + {}_n p_x . e^{-\delta n} . \bar{A}_{x+n} \leq \bar{A}_x \leq 1 - {}_n p_x + {}_n p_x . e^{-\delta n} . \bar{A}_{x+n} \qquad \mathbf{14}$$

Para desenvolver esse resultado, perceba inicialmente que substituir $\bar{a}_x$ pelo limite superior, $\bar{a}_{\overline{n}|} + {}_n p_x . e^{-\delta n} . \bar{a}_{x+n}$, na Equação (5), implicaria que:

$$\bar{A}_x \geq 1 - \delta \left(\frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} + {}_n p_x . e^{-\delta n} . \bar{a}_{x+n} \right)$$

e como, também pela Equação (5), sabe-se que

$$\bar{a}_{x+n} = \frac{1 - \bar{A}_{x+n}}{\delta} ,$$

então,

$$\bar{A}_x \geq 1 - \delta \left[\frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} + {}_n p_x . e^{-\delta n} . \left(\frac{1 - \bar{A}_{x+n}}{\delta} \right) \right]$$

$$= e^{-\delta n} \left(1 - {}_n p_x \right) + {}_n p_x . e^{-\delta n} . \bar{A}_{x+n} ,$$

estabelecendo, assim, o limite inferior para $\bar{A}_x$.

De modo análogo, substituir $\bar{a}_x$ pelo limite inferior, $\left(\bar{a}_{\overline{n}|} + \bar{a}_{x+n} . e^{-\delta n} \right) . {}_n p_x$, na Equação (5), implicaria que:

$$\bar{A}_x \leq 1 - \delta \left(\frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} + e^{-\delta n} . \bar{a}_{x+n} \right) {}_n p_x$$

$$= 1 - \delta \left[\frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} + e^{-\delta n} . \left(\frac{1 - \bar{A}_{x+n}}{\delta} \right) \right] . {}_n p_x$$

$$= 1 - {}_n p_x + {}_n p_x . e^{-\delta n} . \bar{A}_{x+n} ,$$

o que, por sua vez, estabelece o limite superior para $\bar{A}_x$.

Uma vez conhecido o resultado para o caso contínuo, o caso discreto é desenvolvido de modo semelhante, como exposto na Proposição 2.

Proposição 2 (caso discreto): sendo x e $x + n$ duas idades inteiras, tais $0 \leq x \leq x + n < \omega$, é possível estabelecer que

$$\left(\ddot{a}_{\overline{n|}} + \ddot{a}_{x+n}.v^n\right).\,{}_np_x \leq \ddot{a}_x \leq \ddot{a}_{\overline{n|}} + {}_np_x.v^n.\ddot{a}_{x+n} \quad \boxed{15}$$

Prova: sabe-se que

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} {}_tp_x \, . \, v^t$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x \, . \, v^t + \sum_{t=n}^{\omega-x-1} {}_tp_x \, . \, v^t$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x \, . \, v^t + {}_np_x.v^n. \sum_{t=0}^{\omega-x-n-1} {}_tp_{x+n} \, . \, v^t.$$

Por ser uma probabilidade, tem-se que ${}_tp_x \leq 1$, para $t = 0,1,..., n - 1$, então

$$\sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x \, . \, v^t \leq \sum_{t=0}^{n-1} v^t = \ddot{a}_{\overline{n|}}.$$

Portanto,

$$\ddot{a}_x \leq \sum_{t=0}^{n-1} v^t + {}_np_x.v^n. \sum_{t=0}^{\omega-x-n-1} {}_tp_{x+n} \, . \, v^t$$

$$= \ddot{a}_{\overline{n|}} + {}_np_x.v^n.\ddot{a}_{x+n}.$$

Agora resta provar o limite inferior. Assim, retome o ponto em que

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x \, . \, v^t + {}_np_x.v^n. \sum_{t=0}^{\omega-x-n-1} {}_tp_{x+n} \, . \, v^t.$$

Como ${}_tp_x$ é uma função não crescente de t, então ${}_np_x \leq {}_tp_x$, para $t = 0,1,... n - 1$. Com efeito,

$$\sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x \, . \, v^t \geq \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, . \, {}_np_x = {}_np_x.\ddot{a}_{\overline{n|}}.$$

Logo,

$$\ddot{a}_x \geq \left(\ddot{a}_{\overline{n|}} + \ddot{a}_{x+n}.v^n\right).\,{}_np_x,$$

o que finaliza a prova.

Novamente, para $i > 0$, e a partir da Equação (6), são estabelecidos os limites para A_x a partir de um conhecimento prévio sobre A_{x+n} e ${}_np_x$. Desse modo, tem-se que:

$$v^n\left(1 - {}_np_x\right) + {}_np_x.v^n.A_{x+n} \leq A_x \leq 1 - {}_np_x + {}_np_x.v^n.A_{x+n} \quad \boxed{16}$$

O desenvolvimento desse resultado será omitido, pois segue a mesma argumentação apresentada para o caso contínuo e, portanto, pode ser facilmente replicado pelo leitor.

4. APLICAÇÃO E DISCUSSÕES

Nesta seção são sugeridas aplicações e são apresentados exemplos numéricos sobre os resultados demonstrados na seção 3. Além disso, são discutidos os efeitos de variação na taxa de juros e na lacuna de dados (ou seja, no valor de n) e a retangularização da curva de sobrevivência.

Inicialmente, de modo ilustrativo, intervalos para os valores de $\ddot{a}_{20}$ e A_{20} são calculados considerando a disponibilidade completa de dados a partir das idades de 20, 30, 40, 50, 60 e 70 anos, ou seja, os intervalos foram calculados diante de diferentes valores para a lacuna de dados. Além disso, ainda para fins ilustrativos, o ponto central do intervalo é considerado uma estimativa do valor atuarialmente justo dos respectivos produtos financeiros e, a partir dessa estimativa, o erro (valor estimado menos valor real, o qual utiliza os dados completos a partir dos 20 anos) também é computado. Para os cálculos foi considerada a "Tábua de mortalidade IBGE 2015", para ambos os sexos – extrapolada para idades acima de 80 anos, e uma taxa efetiva de juros de 3% ao ano. Os resultados para $\ddot{a}_{20}$ são sumarizados na Tabela 1, enquanto os resultados para A_{20} são expostos na Tabela 2.

Tabela 1

Limites, estimativas e erros para $\ddot{a}_{20}$ com base em dados completos sobre mortalidade a partir das idades de 20, 30, 40, 50, 60 e 70 anos

Idade	Lacuna de dados (n) - em anos	Limite inferior	Limite superior	Valor central	Tamanho do intervalo	Erro	Percentual de erro
20	0	27,21419	27,21419	27,21419	0,00000	0,00000	0,00000%
30	10	27,13380	27,27153	27,20267	0,13773	-0,01152	0,04234%
40	20	26,88249	27,42508	27,15379	0,54259	-0,06040	0,22194%
50	30	26,24663	27,65945	26,95304	1,41283	-0,26115	0,95960%
60	40	24,72109	28,00480	26,36294	3,28371	-0,85124	3,12794%
70	50	21,47332	28,50447	24,98890	7,03115	-2,22529	8,17695%

Fonte: *Elaborada pelo autor.*

Tabela 2

Limites, estimativas e erros para A_{20} com base em dados completos sobre mortalidade a partir das idades de 20, 30, 40, 50, 60 e 70 anos

Idade	Lacuna de dados (n) - em anos	Limite inferior	Limite superior	Valor central	Tamanho do intervalo	Erro	Percentual de erro
20	0	0,20735	0,20735	0,20735	0,00000	0,00000	0,00000%
30	10	0,20568	0,20969	0,20768	0,00401	0,00033	0,16183%
40	20	0,20121	0,21701	0,20911	0,01580	0,00175	0,84840%
50	30	0,19438	0,23553	0,21496	0,04115	0,00760	3,66823%
60	40	0,18551	0,27382	0,22966	0,08831	0,02231	10,7621%
70	50	0,16977	0,37456	0,27216	0,20479	0,06481	31,2578%

Fonte: *Elaborada pelo autor.*

Nota-se na Tabela 1 que a estimativa de $\ddot{a}_{20}$ pelo valor central do intervalo para a idade de 30 anos subestima o valor real da anuidade em questão em menos de 0,05%. Por sua vez, se fossem utilizados dados referentes aos 70 anos, em que há uma lacuna de 50 anos nos dados, o valor de $\ddot{a}_{20}$ seria subestimado em pouco mais de 8%. Já na Tabela 2, a estimativa de A_{20} pelo valor central do intervalo para a idade de 30 anos superestimaria o valor real da anuidade em questão em apenas 0,16%. Contudo, se fossem utilizados dados referentes aos 70 anos, o valor seria superestimado em mais de 31%.

Como forma de visualizar os efeitos que uma variação na taxa de juros produziria nos resultados, utilizando a mesma tábua de mortalidade, foram construídos intervalos para o valor de $\ddot{a}_{20}$ e A_{20} considerando dados a partir dos 30 anos e variando o valor da taxa de juros. Os resultados são detalhados nas tabelas 3 e 4, respectivamente. Nelas, diante das escolhas realizadas, observa-se que, em ambos os casos, à medida que a taxa de juros aumenta, o erro também tende a aumentar.

Tabela 3

Limites, estimativas e erros para $\ddot{a}_{20}$ com base em dados a partir dos 30 anos diante de diferentes taxas de juros

Taxa de juros	Limite inferior	Limite superior	Valor central	Tamanho do intervalo	Erro	Percentual de erro
1%	43,27120	43,42116	43,34618	0,14996	-0,01012	0,02335%
2%	33,71009	33,85372	33,78191	0,14363	-0,01086	0,03214%
3%	27,13380	27,27153	27,20267	0,13773	-0,01152	0,04234%
4%	22,46578	22,59801	22,53189	0,13223	-0,01211	0,05371%
5%	19,05272	19,17982	19,11627	0,12710	-0,01263	0,06604%

Fonte: *Elaborada pelo autor.*

Tabela 4

Limites, estimativas e erros para A_{20} com base em dados para a idade de 30 anos diante de diferentes taxas de juros

Taxa de Juros	Limite inferior	Limite superior	Valor central	Tamanho do intervalo	Erro	Percentual de erro
1%	0,57008	0,57157	0,57083	0,00148	0,00010	0,01756%
2%	0,33620	0,33901	0,33761	0,00281	0,00021	0,06312%
3%	0,20568	0,20969	0,20768	0,00401	0,00033	0,16183%
4%	0,13084	0,13593	0,13338	0,00508	0,00046	0,35037%
5%	0,08667	0,09272	0,08970	0,00605	0,00060	0,67511%

Fonte: *Elaborada pelo autor.*

Neste ponto, dois aspectos merecem ser destacados: primeiro, só seria possível calcular o erro de posse dos reais valores dos produtos financeiros; mas, obviamente, tais valores não estariam disponíveis em situações envolvendo dados incompletos sobre mortalidade. Segundo, o erro dependeria do valor utilizado como estimativa. Se, por exemplo, o pesquisador resolvesse, de modo conservador, utilizar valores maiores do que o valor central do intervalo como forma de analisar o valor presente esperado de anuidades e seguros de vida, então os resultados sobre o erro seriam diferentes. Logo, é profícuo avaliar como o tamanho do intervalo produzido se comporta diante de variações nos parâmetros, como será feito na próxima subseção.

4.1 O Tamanho dos Intervalos

Uma vez apresentados alguns resultados ilustrativos, é importante discutir formalmente o impacto de certos parâmetros no tamanho do intervalo (limite superior menos o limite inferior) produzido. Seja T_a o tamanho do intervalo formado pelos limites em (15), então, T_a é definido pela expressão:

$$T_a = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1 - {}_np_x). \quad \boxed{17}$$

Pela Equação (17), percebe-se que, tudo mais constante, T_a cresce com aumentos em n, uma vez que $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ é uma função crescente de n e ${}_np_x$ é uma função não crescente de n (ver exemplo na Tabela 1); bem como se observa que T_a diminui com aumentos em i, uma vez que $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ é função decrescente de i (Faro, 2006). Esse resultado é visualizado na Tabela 3. Por fim, T_a diminui com aumentos em ${}_np_x$, pois, como dito, ${}_np_x$ é função não crescente de n.

Este último resultado remete ao fenômeno da retangularização da curva de sobrevivência. O processo de retangularização, como bem expõem Wilmoth e Horiuchi (1999), é caracterizado por altas taxas de sobrevivência na infância e na idade adulta, e rápida mortalidade em idades avançadas. Assim, no caso hipotético em que ${}_np_x = 1$, então os limites inferior e superior em (15) serão iguais e, com efeito, $\ddot{a}_x = \ddot{a}_{\overline{n}|} + \ddot{a}_{x+n}.v^n$. Esse fato reforça o resultado de que quanto mais retangular for a curva de sobrevivência, menor será a distância entre os limites inferior e superior de $\ddot{a}_x$, ou seja, menor será o intervalo produzido.

À semelhança da discussão realizada para os limites de uma anuidade, também é relevante analisar os limites para um seguro. Para esse produto, seja T_A o tamanho do intervalo formado pelos limites em (16), então T_A é definido por:

$$T_A = (1 - v^n).(1 - {}_np_x). \quad \boxed{18}$$

Por (18), observa-se que T_A cresce com aumentos em n (ver Tabela 2) e diminui com aumentos em ${}_np_x$, de modo similar ao que ocorre com T_a. Contudo, T_A aumenta com aumentos em i, uma vez que $(1 - v^n)$ é uma função crescente de i (ver Tabela 4).

4.2 Definindo Limites para $\mathring{e}_{40}$ e $\mathring{e}_{60}$ a partir de Informações do Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil

Nesta subseção é apresentada uma aplicação real dos resultados de Cohen (2011) e, consequentemente, desta pesquisa. Trata-se do cálculo de limites para $\mathring{e}_{40}$ e $\mathring{e}_{60}$ a partir de informações do Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil (Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento Humano, 2013a).

A expectativa de vida ao nascer é a principal medida de longevidade e é comumente utilizada como indicador de desenvolvimento humano (Mayhew & Smith, 2015). Pela sua importância, dados sobre a expectativa de vida ao nascer são tipicamente apresentados em pesquisas demográficas, de saúde pública etc. Contudo, quando não existem dados detalhados sobre mortalidade, essa disponibilidade não ocorre com a mesma facilidade para a expectativa de vida em outras idades. Mathers, Stevens, Boerma, White e Tobias (2015) destacam que a expectativa de vida aos 60 anos, por exemplo, é um relevante indicador da longevidade para pessoas em idade mais avançada e conhecê-la para dada população é fundamental para o planejamento público em previdência e saúde, entre outras áreas.

Originalmente por meio do resultado de Cohen (2011), viu-se que é possível definir limites, superior e inferior, para a expectativa completa de vida na idade x, tendo conhecimento apenas da probabilidade de uma pessoa de idade x sobreviver até a idade $x + n$ e a expectativa completa de vida na idade $x + n$. Naturalmente, pelo mesmo argumento, limites para $\mathring{e}_{x+n}$ são construídos a partir de conhecimento prévio sobre ${}_np_x$ e $\mathring{e}_x$. Ou seja, segue-se diretamente de (8) que:

$$\frac{\mathring{e}_x - n}{{}_np_x} \leq \mathring{e}_{x+n} \leq \frac{\mathring{e}_x}{{}_np_x} - n. \tag{19}$$

O Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil (Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento Humano, 2013b) é uma ferramenta de consulta ao Índice de Desenvolvimento Humano Municipal, para os anos de 1991, 2000 e 2010, e encontra-se disponível em Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento Humano (2013a). Por meio dessa ferramenta é possível, por exemplo, para os referidos anos, obter informações sobre a expectativa de vida ao nascer, a probabilidade de um recém-nascido sobreviver até os 40 anos e a probabilidade de um recém-nascido sobreviver até os 60 anos, para todos os municípios brasileiros. Convém destacar que, em 2010, o Brasil tinha 5.565 municípios. Logo, pode-se construir intervalos para os valores das expectativas de vida nas idades de 40 e 60 anos para os municípios brasileiros nos respectivos anos.

Ilustrativamente, a Tabela 5 apresenta os limites para $\mathring{e}_{40}$ e $\mathring{e}_{60}$ para os 10 municípios com maior expectativa de vida ao nascer no Brasil, no ano de 2010. Curiosamente, todos esses municípios pertencem ao estado de Santa Catarina. Os dados foram coletados no Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil (Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento Humano, 2013a) em 22 de dezembro de 2017.

Tabela 5
Limites para $\mathring{e}_{40}$ e $\mathring{e}_{60}$ para os 10 municípios com maior expectativa de vida ao nascer no Brasil, no ano de 2010

Município	Limite inferior para $\mathring{e}_{40}$	Limite superior para $\mathring{e}_{40}$	Tamanho do intervalo para $\mathring{e}_{60}$	Limite inferior para $\mathring{e}_{60}$	Limite superior para $\mathring{e}_{60}$	Tamanho do intervalo para $\mathring{e}_{60}$
Blumenau	40,29197	42,00209	1,710115	21,15297	29,24194	8,08897
Brusque	40,29197	42,00209	1,710115	21,15297	29,24194	8,08897
Balneário Camboriú	40,26272	41,96414	1,701418	21,11829	29,16865	8,050357
Rio do Sul	40,22294	41,89395	1,671007	21,05918	28,95553	7,896345
Rancho Queimado	40,20629	41,88164	1,675349	21,04131	28,95303	7,911715
Rio do Oeste	40,14591	41,83429	1,688379	20,98346	28,96442	7,980965
Joaçaba	40,07924	41,78501	1,705766	20,91652	28,97459	8,058076
Iomerê	40,07924	41,78501	1,705766	20,91652	28,97459	8,058076
Porto União	40,06881	41,77458	1,705766	20,90992	28,98344	8,073519
Nova Trento	40,06881	41,77458	1,705766	20,90992	28,98344	8,073519

Fonte: *Elaborada pelo autor.*

Tomando, por exemplo, o caso de Blumenau e se o valor central do intervalo (aproximadamente, 41,15 anos) fosse utilizado como estimativa para $\mathring{e}_{40}$; mesmo sem conhecer o valor real dessa expectativa de vida, tem-se a certeza de que, nesse contexto, o erro causado pelo uso de tal estimativa seria de, no máximo, 312 dias, ou seja, pouco mais de 10 meses.

Assim, utilizar esses intervalos poderia disponibilizar informações relevantes para pesquisa sobre a heterogeneidade da mortalidade da população brasileira e fomentar discussões sobre a adoção de uma idade mínima de aposentadoria, em particular no atual contexto político-econômico em que o país se encontra (Souza, 2018).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo, a partir de Cohen (2011), foram demonstrados os limites, superior e inferior, para o valor presente esperado de anuidades e seguros de vida vitalícios. Ademais, por meio da análise dos limites para anuidades contínuas, pôde-se constatar que os resultados apresentados são uma extensão daqueles de Cohen (2011), o que ampliou a discussão para um contexto atuarial.

Tanto para as anuidades quanto para os seguros de vida, o tamanho dos intervalos construídos aumenta com aumentos na lacuna de dados e diminui quanto mais retangular for a curva de sobrevivência. A taxa de juros, por sua vez, tem efeito diferente sobre os intervalos, aumentando-os quando há aumento da taxa de juros, no caso dos seguros e diminuindo-os no caso das anuidades.

Além da contribuição teórica, convém evidenciar que a definição desses intervalos pode ter importante potencial de aplicabilidade em mercados em que não há registro histórico de mortalidade para certas idades ou em que os dados são pouco confiáveis ou, ainda, em mercados novos ainda pouco explorados. E, além de ser empregados para a precificação dos referidos produtos financeiros, podem fornecer informações para pesquisas em demografia, saúde pública, previdência e planejamento público, por exemplo.

REFERÊNCIAS

Baili, P., Micheli, A., Montanari, A., & Capocaccia, R. (2005). Comparison of four methods for estimating complete life tables from abridged life tables using mortality data supplied to EUROCARE-3. *Mathematical Population Studies*, *12*, 183-198.

Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., & Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial mathematics* (2nd ed.). Schaumburg, IL: Society of Actuaries.

Cohen, J. E. (2011). Life expectancy: lower and upper bounds from surviving fractions and remaining life expectancy. *Demographic Research*, *24*, 251-256.

Cohen, J. E. (2015). Markov's inequality and Chebyshev's inequality for tail probabilities: a sharper image. *The American Statistician*, *69*(1), 5-7.

Dickson, D. C., Hardy, M. R., & Waters, H. R. (2013). *Actuarial mathematics for life contingences risks* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Faro, C. (2006). *Fundamentos da matemática financeira: uma introdução ao cálculo financeiro e à análise de investimento de risco*. São Paulo: Saraiva.

Haberman, S., & Sibbett, T. A. (1995). The history of actuarial science. In S. Haberman & T. A. Sibbett (Ed.), *History of actuarial science* (Vol. 1, pp. xix-lxxxiii). London: William Pickering.

Hald, A. (1990). *A history of probability and statistics and their applications before 1750*. New York: John Wiley & Sons.

Ibrahim, R. I. (2008). Expanding an abridged life table using the Heligman-Pollard model. *Matematika*, *24*(1), 1-10.

Mathers, C. D., Stevens, G. A., Boerma, T., White, R. A., & Tobias, M. I. (2015). Causes of international increases in older age life expectancy. *Lancet*, *385*, 540-548.

Mayhew, L., & Smith, D. (2015). On the decomposition of life expectancy and limits to life. *Population Studies*, *69*(1), 73-89.

Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S., & Olivieri, A. (2009). *Modelling longevity dynamics for pension and annuity business*. Oxford: Oxford University Press.

Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento Humano. (2013a). Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil (homepage). Recuperado de http://www.atlasbrasil.org.br/2013/

Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento Humano. (2013b). *O Índice de Desenvolvimento Humano Municipal Brasileiro*. Brasília, DF: PNDU/IPEA/FJD. (Série Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil 2013).

Rabbi, A. M. F. (2013). Lower and upper bounds of life expectancies and total expected longevity of a developing country. *South East Asia Journal of Public Health*, *3*(2), 52-57.

Souza, F. C. (2018). A heterogeneidade da mortalidade da população brasileira e aspectos distributivos na previdência social: uma análise atuarial da proposta de idade mínima de aposentadoria. *Administração Pública e Gestão Social*, *10*(1), 2-11.

Wilmoth, J. T., & Horiuchi, S. (1999). Rectangularization revisited: variability of age at death within human population. *Demography*, *36*(4), 475-495.