



HUMBERTO M. FRANÇA  
GERSON G. GOMES



# Einstein e a dança dos grãos de pólen



**HUMBERTO M.  
FRANÇA e GERSON G.  
GOMES** são professores  
do Departamento de Física  
Matemática do Instituto de  
Física da USP.



## A HIPÓTESE ATÔMICA

Albert Einstein é muito bem conhecido pela sua teoria da relatividade e pela sua explicação do efeito fotoelétrico, pela qual ganhou o Prêmio Nobel em 1921.


Entretanto, seu trabalho sobre o movimento browniano, muito menos conhecido, é, talvez, o seu trabalho mais importante. Poucos físicos reconhecem isso. A relevância desse trabalho pode ser medida, não só pelo fato de estar entre os artigos científicos mais citados do mundo, mas por ser o principal responsável pela aceitação da hipótese atômica.

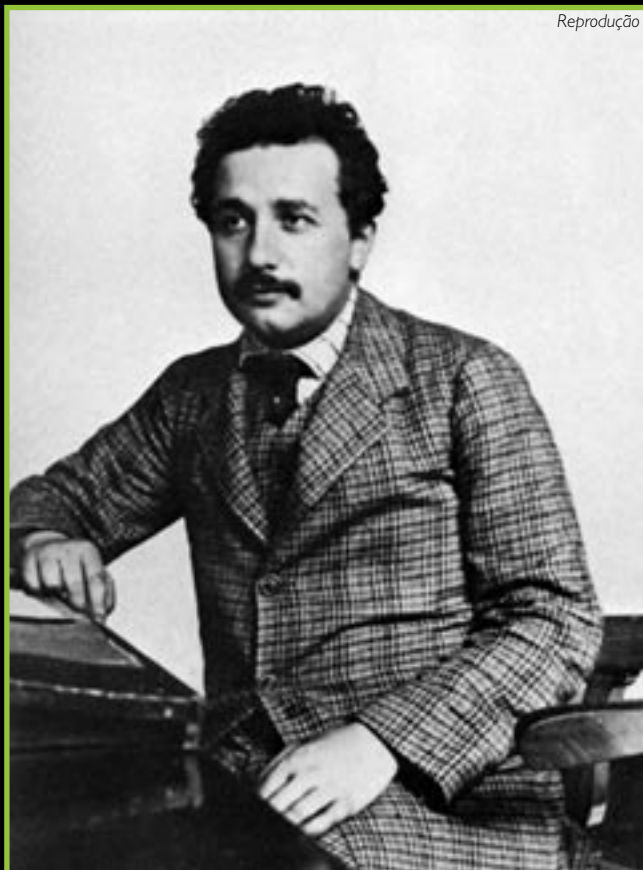
É possível que o autor das palavras abaixo não seja imediatamente reconhecido: “Se, em alguma catástrofe mundial, todo o conhecimento científico fosse destruído, e uma única sentença pudesse

ficar para as gerações de criaturas sobreviventes, qual afirmativa poderia conter, em poucas palavras, a maior quantidade de informações?”.

Essa questão é colocada pelo brilhante físico, e também Prêmio Nobel, Richard Feynman, na introdução de seu conhecido livro *The Feynman Lectures on Physics*. E a resposta que ele mesmo fornece é a seguinte: “Eu acredito que seria a hipótese atômica, de que todas as coisas são feitas de átomos – pequenas partículas movendo-se em movimento perpétuo, atraindo-se... e repelindo-se mutuamente. Nesta única sentença... há uma enorme quantidade de informação sobre o mundo...”.

Essa afirmação ilustra muito bem a importância do conceito de átomo dentro do conhecimento científico atual da humanidade. Apesar de a idéia de átomo remontar à Grécia antiga, ela só foi, finalmente, incorporada à ciência após os trabalhos de Albert Einstein sobre o movimento browniano.





**Em um de seus trabalhos menos conhecidos, dentre aqueles publicados em 1905, Einstein esclarece a física do movimento browniano e estabelece a base teórica para se demonstrar a realidade dos átomos.**

## ROBERT BROWN

No verão de 1827 o botânico irlandês Robert Brown começou a fazer observações microscópicas de suspensões com grãos de pólen de um tipo de flor noturna chamada *Clarkia pulchella*. O que Brown viu surpreendeu-o muito: os pequenos grãos, suspensos em água, estavam em constante movimento, numa espécie de dança caótica. O movimento era perene, como um *moto-perpétuo*. Além disso, conforme foi

verificado por Brown, o movimento não era provocado por influências externas, como, por exemplo, variações de luz e as pequenas variações da temperatura ambiente.

Robert Brown não foi o primeiro a observar esse fenômeno, mas parece ter sido o primeiro a enfatizar que este era um fenômeno mais geral. Examinando pequenos grãos de diferentes materiais inorgânicos, verificou a existência da mesma dança caótica e abandonou a idéia de que os grãos de pólen fossem *vivos*. Brown mostrou que, o que quer que fosse, a dança incessante não tinha nada a ver com a biologia: era a manifestação de um fenômeno físico. O completo esclarecimento desse fenômeno físico só foi possível mais de 70 anos depois, no início do século XX, com os trabalhos de Albert Einstein. Einstein mostrou que a *agitação térmica dos átomos invisíveis* era o fenômeno físico mais importante.

## O DESAFIO DAS TEORIAS DO CALOR

O estudo da dinâmica do fluxo de calor, ou termodinâmica, culminou em duas leis fundamentais a respeito do calor. A primeira lei relaciona calor, energia e trabalho útil em processos térmicos. Essa lei pode ser facilmente entendida em termos de movimentos e colisões entre átomos, coisa que não acontece com a segunda lei. De acordo com a segunda lei da termodinâmica o fluxo de calor em um processo natural, por exemplo o derretimento de um cubo de gelo, é sempre irreversível. O calor não pode fluir espontaneamente na direção oposta, isto é, o cubo de gelo derretido à temperatura ambiente não se recongelará sozinho. Como entender isso em termos da mecânica newtoniana?

Se, como sugeriram Isaac Newton, John Dalton e Ludwig Boltzmann, toda a matéria consistir de átomos (ou moléculas), então o calor nada mais seria do que a energia de movimento, ou energia cinética, desses átomos. Como bolinhas de gude ou bolas de

bilhar, todos os átomos em suas interações microscópicas devem obedecer à mecânica newtoniana. Tais interações são reversíveis: um “filme” do movimento de colisão entre átomos parecerá perfeitamente normal se ele for passado de trás para a frente. Então como funcionaria a irreversibilidade dos eventos macroscópicos, tais como um cubo de gelo derretendo?

Esse e outros paradoxos encorajaram aqueles que, como Ernest Mach, escolheram negar a existência de átomos materiais. Ele e outros físicos admitiam que o atomismo teria apenas uma utilidade didática. Entretanto, em certas áreas da física, especialmente na teoria do calor, rejeitavam até mesmo essa utilidade. Einstein provavelmente tomou conhecimento dessa controvérsia em sua época de estudante. Sendo ele partidário da hipótese atomista e molecular, utilizou em seu trabalho de 1905 a teoria microscópica molecular do calor, além da teoria macroscópica da dissipação. Estes se constituíram nos ingredientes principais de sua fórmula aplicada para a explicação do movimento browniano.

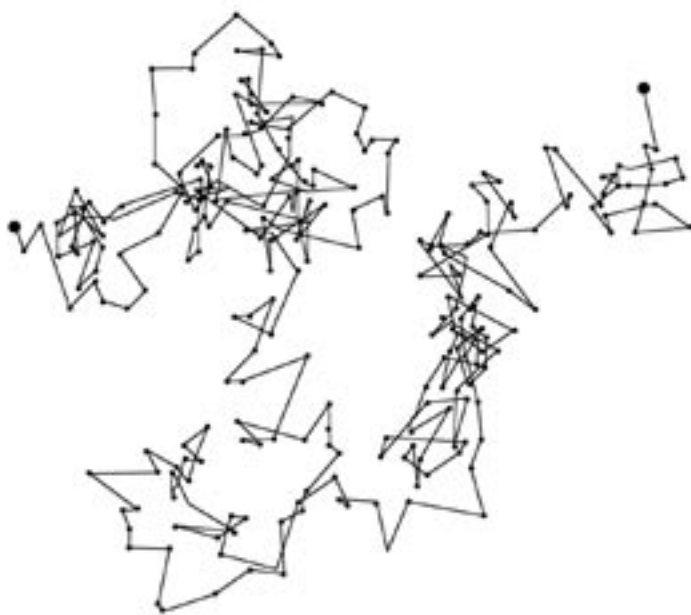
Um grupo, liderado pelo físico-químico Wilhelm Ostwald, baseou-se principalmente no paradoxo de irreversibilidade para rejeitar o programa mecânico, mantendo as leis da termodinâmica, não as da mecânica, como fundamentais. A mecânica requeria hipóteses sobre a matéria e os átomos invisíveis em movimento, mas a termodinâmica referia-se unicamente à energia e suas transformações observadas em nosso cotidiano. Por outro lado, as leis da termodinâmica eram mais próximas das observações experimentais, eram universais, livres de paradoxos e prescindiam de qualquer modelo sobre a constituição da matéria. Por isso Ostwald e seus seguidores proclamaram o predomínio de um novo ponto de vista “energético” para o mundo: a energia e as leis da termodinâmica seriam as bases para entender todos os processos dentro do mundo físico e mesmo fora dele. Os seguidores dessa corrente, que eram cada vez menos numerosos no início do século XX, ficaram conhecidos como “energicistas”. Outros, entretanto, mantiveram

sua crença nos átomos. Estes encontraram suporte no trabalho de Maxwell, Clausius e Boltzmann, que conduziram a solução do paradoxo da reversibilidade em favor dos átomos.

A segunda lei da termodinâmica nos diz que a maioria dos processos naturais é irreversível, em aparente contradição com a mecânica newtoniana dos átomos. Boltzmann, em particular, resolveu essa contradição interpretando a segunda lei como um novo tipo de lei: uma lei *estatística*, não absoluta. Os átomos e moléculas apresentam-se em quantidades muito grandes, da ordem do número de Avogadro  $N_A \approx 10^{23}$ . Então, mesmo quando tratamos de um pequeno cubo de gelo, é *extremamente improvável* – mas não impossível – que as miríades de moléculas do gelo derretido retornem, mesmo após um tempo muito longo, da desordem do líquido para o ordenado arranjo cristalino da forma sólida. As propriedades macroscópicas do calor e dos objetos materiais, em especial a irreversibilidade, surgem do comportamento *estatístico* do enorme número de átomos newtonianos.

**FIGURA 1**

**Ilustração do movimento observado por Robert Brown.**

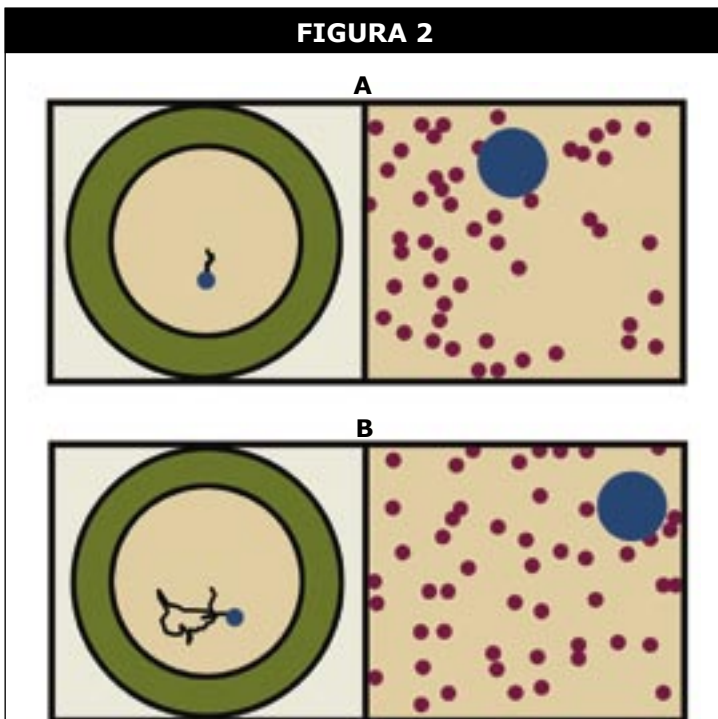


Esse comportamento seria descrito por uma *nova mecânica estatística*.

Boltzmann e o físico norte-americano J. W. Gibbs forneceram o primeiro cálculo de como a segunda lei da termodinâmica advém do comportamento estatístico das miríades de átomos movendo-se aleatoriamente. Sem conhecer esses trabalhos, Einstein dedicou três artigos, entre os anos de 1902 e 1904, a uma dedução (independente)

da segunda lei em termos de sua “própria” mecânica estatística. Essa dedução também era baseada na existência dos átomos e na mecânica newtoniana. Continuando seu trabalho, Einstein utilizou a mecânica clássica, a hipótese atômica e argumentos estatísticos para realizar o que ele mesmo chamou de *teoria molecular geral do calor*. Confirmou que tanto a primeira quanto a segunda leis da termodinâmica são, de fato, explicadas nas bases da mecânica newtoniana.

**FIGURA 2**



**O movimento de uma partícula browniana (em azul) visto em dois instantes diferentes (A) e (B). À esquerda temos as visões obtidas com o auxílio de um microscópio, em que aparece apenas a partícula browniana (os átomos são invisíveis). A sua trajetória (semelhante à da Figura 1) é reconstruída com uma sucessão de fotografias. À direita temos duas representações pictóricas de pequenos átomos (bolinhas vermelhas) em inúmeras colisões com a partícula browniana muito maior. Essas colisões são responsáveis pelo seu deslocamento quadrático médio  $\langle x^2 \rangle$  observado experimentalmente.**

## O TRABALHO DE MAIO DE 1905: MOVIMENTO BROWNIANO

Quando o ano de 1905 começou, Einstein ainda era um físico desconhecido trabalhando na obscuridade de um escritório de patentes em Berna, na Suíça. Mas, naquele ano, ele daria um passo decisivo na direção da prova de que os líquidos eram realmente feitos de átomos (moléculas). Segundo ele mesmo caracterizou posteriormente seu trabalho, ele estava “em busca de fatos que garantiriam, tanto quanto possível, a existência de átomos de tamanho finito definido” (Stachel, 2001). Ele juntou a termodinâmica dos líquidos com a mecânica estatística para obter a primeira teoria física, testável experimentalmente, do movimento browniano. Aproximava-se a primeira chance de investigação direta do mundo atômico.

Na questão da existência real dos átomos Einstein aceitava o fato de que átomos individuais não podiam ser visualizados. O que quase todos acreditavam, naquela época, é que eles eram simplesmente muito pequenos e rápidos. Mas foi Einstein quem primeiro reconheceu que, se as predições da mecânica estatística eram corretas, então qualquer partícula visível, imersa em um banho de átomos, deveria basicamente comportar-se como um “átomo grande”. Além disso ele sabia que o princípio da equipartição da energia forneceria como a energia cinética das partículas brownianas visíveis dependeria da temperatura. Para cada grau de liberdade a energia cinética

média seria  $k_B T/2$ , onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura absoluta do banho térmico.

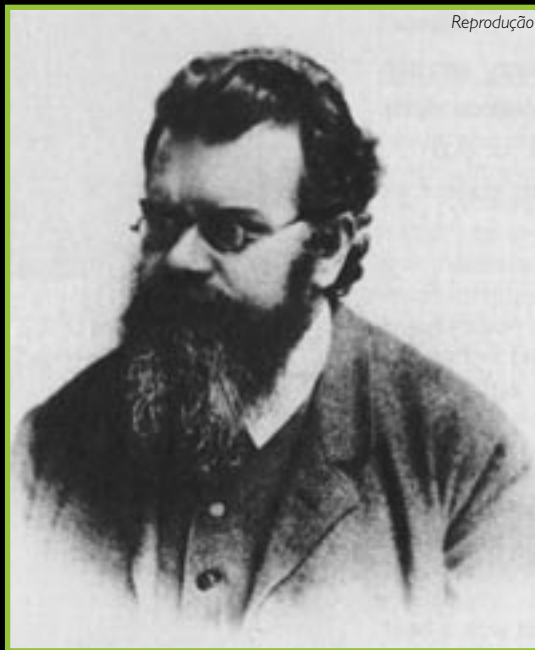
Einstein imaginou que uma partícula browniana com um diâmetro de, por exemplo, 0,001 mm (grande o bastante para ser visível em um microscópio) proporcionaria a *lente de aumento* para a investigação do mundo atômico. Seria como se você pudesse “ver um átomo invisível” e comparar seu comportamento diretamente com a teoria cinética para decidir, de uma vez por todas, se as idéias de Boltzmann concordavam ou não com a realidade (ver Figura 2).

Einstein predisse que uma partícula browniana em uma solução, tal qual um átomo, iria difundir-se nesse líquido de tal forma que o seu deslocamento quadrático médio  $\langle x^2 \rangle$ , estaria relacionado com o número de Avogadro  $N_A$ , pela seguinte expressão:

$$N_A = \frac{R}{\langle x^2 \rangle} \frac{T}{6\pi\eta a} t.$$

Aqui  $R$  é constante universal dos gases,  $T$  é a temperatura absoluta da solução,  $\eta$  é a viscosidade do líquido e  $a$  é o raio da partícula browniana. Nessa relação,  $t$  é o tempo necessário para que a partícula tenha um deslocamento quadrático médio  $\langle x^2 \rangle$ , em uma trajetória extremamente irregular (ver as Figuras 1 e 2).

Com exceção, talvez, do raio da partícula, todas essas grandezas eram conhecidas ou passíveis de medição naquela época. O número de Avogadro  $N_A$  é, certamente, a quantidade de interesse pois fornece o número de moléculas (ou átomos) em uma certa quantidade de substância (1 mol). Além disso, de posse da massa de 1 mol da substância (já conhecida da química), pode-se calcular a massa de *uma* molécula, simplesmente dividindo a massa de 1 mol por  $N_A$ . Einstein obteve  $N_A \approx 2 \times 10^{23}$ . Nos anos seguintes, Einstein aperfeiçoou seus cálculos e obteve valores um pouco maiores ( $N_A \approx 4 \times 10^{23}$ ). O valor aceito atualmente é  $N_A = 6,023 \times 10^{23}$ .



**Ludwig Boltzmann (1844-1906).**

**Físico austríaco que fez trabalhos pioneiros no campo da mecânica estatística, contribuindo enormemente para o desenvolvimento da teoria atômica dos gases. As idéias de Boltzmann sofreram pesado ataque da escola de pensamento de Ernest Mach e Wilhelm Ostwald. Desencorajado, Boltzmann escreveu em 1898: “Estou consciente de que sou apenas um homem que se debate, fracamente, contra a corrente do tempo”. Sujeito a crises de depressão sucessivas, Boltzmann cometeu suicídio em 1906. Pouco depois, em 1908, os experimentos de Perrin sobre o movimento browniano forneceram evidências diretas da existência de átomos e moléculas.**

Com esse trabalho, Einstein convenceu Jean Perrin a realizar experimentos cuidadosos para medir  $\langle x^2 \rangle$  e o raio das partículas brownianas. Essas experiências foram realizadas, a partir de 1908, pelo grupo de pesquisadores liderados por Jean Perrin, encontrando o valor  $N_A \approx 7 \times 10^{23}$  (Stachel, 2001). Por esses trabalhos Jean Perrin ganhou o Prêmio Nobel de física em 1926.

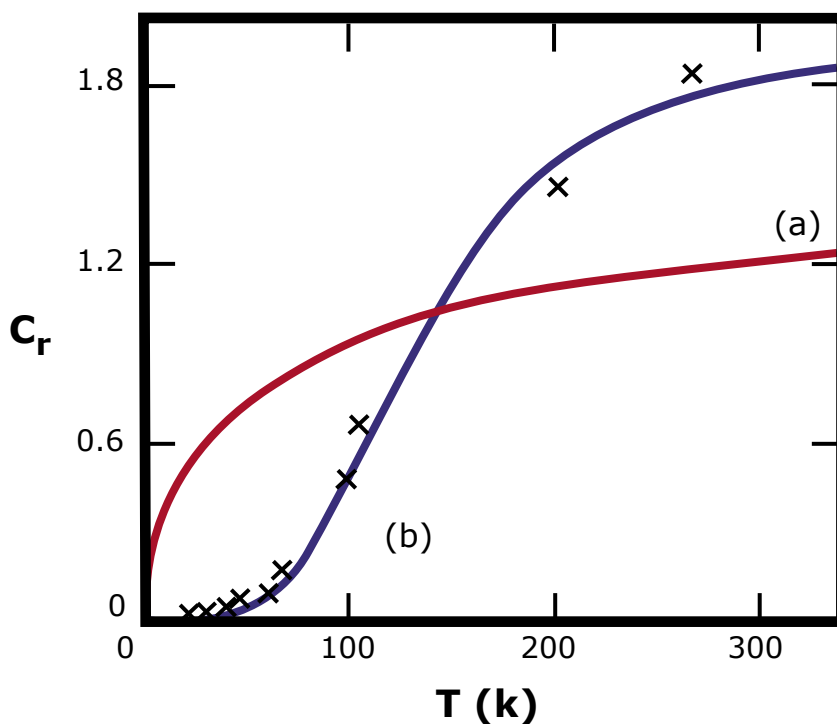
É interessante destacar ainda que Einstein, a partir de 1907, iniciou o estudo experimental das flutuações da voltagem em capacitores. Dessa forma tornou-se o pre-

cursor da análise teórica e experimental do “ruído” existente em circuitos elétricos.

Suas previsões a respeito de flutuações de voltagem em condensadores estimulou-o a explorar a possibilidade de medir pequenas quantidades de eletricidade. Seu trabalho tratava de “um fenômeno, no campo da eletricidade, relacionado com o movimento browniano” (Stachel, 2001). Em 15 de julho de 1907, ele escreveu a seus amigos Conrad e Paul Habicht a respeito da sua descoberta, um método para medir pequenas quantidades de energia elétrica. Einstein desejava patentear essa descoberta. Logo depois, os

**FIGURA 3**

**Calor específico molar,  $C_r(T)$ , associado à energia média,  $E_r(T)$ , devida à rotação de uma molécula de hidrogênio. Para a comparação com os dados experimentais de Eucken (x), Einstein e Stern consideraram que a energia média total  $E_{\text{total}}(T) = E_r(T) + 3/2kT$ , visto que  $3/2kT$  corresponde à energia média de translação de cada molécula de hidrogênio. A curva (a) não inclui a energia de ponto-zero, mas a curva (b) inclui a energia de ponto-zero  $h\nu/2$  (ver equação [1]).**



Habicht tentaram construir o dispositivo proposto por Einstein. No final de 1907, Einstein abandonou a idéia de obter uma patente para o dispositivo, conforme escreveu, em 24 de dezembro, para Conrad Habicht, “sobretudo por causa da falta de interesse por parte dos fabricantes” (Stachel, 2001). Por outro lado, publicou um novo trabalho sobre os aspectos básicos do seu método, que iria estimular o surgimento de trabalhos de outros físicos sobre dispositivos semelhantes. Entretanto, o uso desses dispositivos para medir fenômenos de flutuação em condutores mostrou-se difícil. Apesar disso, o trabalho experimental realizado por outros pesquisadores logo forneceu evidências a favor da constituição atômica da matéria e da eletricidade, que excederam as expectativas iniciais de Einstein. Exemplos interessantes são os fenômenos associados às flutuações térmicas da corrente elétrica, descobertos por Nyquist e Johnson em 1928.

## O MOVIMENTO BROWNIANO E A “MECÂNICA QUÂNTICA” DE EINSTEIN (1910-13)

No ano de 1913, Albert Einstein e Otto Stern publicaram o trabalho intitulado “Alguns Argumentos para a Aceitação da Agitação Molecular no Zero Absoluto” (*Ann. Phys.*, 40, 1913, p. 551). Esse trabalho foi motivado pela recente comunicação de Eucken (1912), de que o calor específico molar do hidrogênio gasoso era cerca de 5 *calorias/mol.K* à temperatura ambiente, e de apenas 3 *calorias/mol.K* quando a temperatura baixava para 60 K.

O artigo de Einstein e Stern era baseado em um outro concluído por Einstein e seu assistente Ludwig Hopf em 1909 (*Ann. Phys.*, 33, 1910, p. 1105). Ambos os trabalhos são comentados, com detalhes, por P. W. Milonni na primeira seção (*zero-point energy in early quantum theory*) de seu livro sobre eletrodinâmica quântica (Milonni, 1994).

Comentaremos brevemente esses trabalhos porque eles são precursores da atual mecânica quântica. São baseados, entretanto, nas idéias de conteúdo clássico de Einstein, Hopf e Stern sobre o movimento browniano, isto é, são utilizados conceitos da mecânica newtoniana e teoria de probabilidades clássica. Achamos importante divulgar esse ponto porque o desenvolvimento histórico da física quântica é muito mal descrito nas reconstruções populares existentes. Por exemplo, quase não é conhecido o fato de que, em 1913, Einstein e Stern deduziram a lei de Planck para a radiação de corpo negro, “sem a necessidade de usar qualquer dos postulados de quantização” usados por Planck em 1900.

O trabalho publicado em 1910 tem o título “Investigação Estatística sobre o Movimento de um Oscilador em um Campo de Radiação”. A linha básica de raciocínio é permitir que um oscilador (de massa  $M$ ) interaja com a radiação térmica que existe em uma cavidade. O método de cálculo, como é característico de Einstein, é bastante original. Nele Einstein e Hopf introduzem o conceito de radiação eletromagnética clássica desordenada (aleatória), isto é, com todas as frequências e com *fases aleatórias*. Por hipótese vale o princípio de equipartição para o oscilador mecânico ( $1/2M\langle v^2 \rangle = 1/2kT$ ). Com isso Einstein e Hopf obtêm a lei de Rayleigh-Jeans, válida para altas temperaturas.

Einstein e Stern (1913) usaram técnicas matemáticas probabilísticas, desenvolvidas no estudo anterior de Einstein e Hopf (1910). Entretanto, duas hipóteses foram introduzidas: 1) consideraram o movimento browniano rotacional associado a moléculas de hidrogênio ( $H_2$ ), em equilíbrio com radiação eletromagnética maxwelliana; 2) supuseram que tanto a radiação eletromagnética aleatória como a rotação de moléculas de hidrogênio deveriam apresentar agitação perto do zero absoluto (energia de ponto-zero *clássica* introduzida por Planck em 1912).

O raciocínio de Einstein-Stern pode ser resumido da seguinte maneira. Eles consideraram que a molécula de hidro-



gênio tem uma energia rotacional média,  $E_r(T) = I/2I(2\pi\nu)^2$ , onde  $T$  é a temperatura absoluta,  $I$  é o momento de inércia da molécula e  $\nu$  a frequência *média* de rotação na temperatura  $T$ . Essa é a energia de um rotor rígido em equilíbrio com a radiação de Planck, de natureza aleatória (não há quantização). Eles tomaram então como válida a expressão

$$E_r(T) = \frac{1}{2} I(2\pi\nu)^2 = \frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad [1]$$

de onde se pode obter  $\nu$  como função da temperatura, desde que seja conhecido o momento de inércia  $I$ .

O calor específico molar associado à rotação das moléculas é então dado por

$$C_r(T) = N_A \frac{dE_r}{dT} = N_A I 2\pi\nu \frac{d\nu}{dT}, \quad [2]$$

onde  $N_A$  é o número de Avogadro. A relação [2] combinada com [1] leva a *duas* expressões para  $C_r(T)$ , conforme  $E_r$  possui ou não a energia de ponto-zero,  $h\nu/2$ . Einstein e Stern encontraram que  $E_r(T)$ , sem o termo  $h\nu/2$ , não estava em acordo com os dados experimentais de Eucken (curva (a) na Figura 3). Por outro lado, a fórmula completa para  $E_r(T)$ , com o termo  $h\nu/2$ , levava a um *bom acordo* com os dados experimentais de Eucken (curva (b) na Figura 3). Para isso Einstein e Stern utilizaram o valor  $2\pi^2 I \approx 0.3 \times 10^{-40} \text{ g/cm}^2$ , que é aproximadamente a metade do valor experimental atual. Conhecido  $I$ , eles calcularam a distância entre os átomos de hidrogênio, obtendo um valor que tem a ordem de magnitude do valor aceito atualmente (Milonni, 1994).

Einstein e Stern concluem o trabalho com as seguintes palavras:

1) “Os resultados de Eucken para o calor específico do hidrogênio tornam provável a existência de uma energia de ponto-zero cujo valor é  $h\nu/2$ ”;

2) “A hipótese da energia de ponto-zero abre um caminho para a dedução da fórmula de Planck para a radiação (de corpo negro) sem fazer uso de qualquer descontinuidade. Entretanto, nos parece duvidoso se as outras dificuldades também podem ser superadas sem a hipótese dos *quanta*”.

Essas duas conclusões do trabalho de Einstein e Stern são quase que proféticas, apesar de o trabalho ter sofrido algumas críticas (Pais, 1995; Milonni, 1994).

Em 1925 Heisenberg deduziu a energia de ponto-zero de um oscilador harmônico de frequência  $\nu_0$ . Utilizou a sua mecânica matricial e redescobriu a energia de ponto-zero do oscilador ( $h\nu_0/2$ ). Em 1927 Dirac encontrou novamente a energia de ponto-zero, agora associada à radiação eletromagnética do vácuo, quando quantizou o campo eletromagnético. Certamente Dirac foi influenciado pelo trabalho de Heisenberg de 1925.

Segundo Milonni (1994) esses e outros trabalhos – Dirac (1927), Heisenberg (1925), Einstein (1917), Einstein e Stern (1913), Planck (1912) e Einstein e Hopf (1910) – estão relacionados historicamente, de forma direta ou indireta, com o trabalho de Einstein de maio de 1905. Isso nos permite ter uma boa idéia da enorme envergadura de seu estudo sobre o movimento browniano.

À guisa de conclusão, gostaríamos apenas de dizer que entre 1905 e 1910 Einstein elaborou pelo menos seis métodos diferentes para determinar o número de Avogadro  $N_A$ . Seu objetivo era, como ele próprio afirmou, resolver de uma vez por todas a questão acerca da existência dos átomos e moléculas, o que de fato conseguiu. O fator decisivo foi a extraordinária concordância dos valores de  $N_A$  obtidos por muitos meios diferentes, tanto teóricos como experimentais.

## BIBLIOGRAFIA

EINSTEIN, A. *Investigations on the Theory of Brownian Movement*. New York, Dover Publications, 1956.

MILONNI, P. W. *The Quantum Vacuum: an Introduction to Quantum Electrodynamics*. New York, Academic Press, 1994.

PAIS, A. *Sutil É o Senhor*. . . . Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1995.

PHYSICS WORLD. *Einstein 2005*, vol. 18, n.1, jan./2005.

STACHEL, J. *O Ano Miraculoso de Einstein*. Rio de Janeiro, Editora UFRJ, 2001.

---