



La tensión entre estática y dinámica desde la Antigüedad hasta el Renacimiento

Daniel SILVIO VACCARO



RESUMEN

Que la estática es un capítulo más de la física es aceptado con total naturalidad desde que Newton estableció las bases de la mecánica clásica. Pero estas dos disciplinas, estática y dinámica, tienen historias diferentes, con encuentros y desencuentros, desde la Antigüedad hasta el Renacimiento. En este artículo, se describe parte de este proceso en relación a algunos aspectos de la mecánica, en particular de la estática. Cómo esta disciplina quedó establecida, ya en la Antigüedad, en forma rigurosa y matemática, mientras que la dinámica se enfrentó con dificultades conceptuales y empíricas que comenzaron a esclarecerse recién en el Renacimiento. Las leyes de la estática fueron establecidas inicialmente por Arquímedes utilizando un sistema axiomático riguroso. En el presente artículo, se muestra cómo la tradición arquimediana resurgió con gran impulso durante el renacimiento mientras existía la tradición rival de aquellos que estaban dispuestos a sacrificar hasta cierto punto el rigor matemático, recurriendo a principios dinámicos de fundamentación dudosa pero de eficacia heurística. Galileo fue un exponente claro de la nueva cultura renacentista y no renunció a conectar las tradiciones estática y dinámica, pero a la vez consideraba posible fundamentar rigurosa y geoméricamente el estudio del movimiento, y fue quien logró resolver la crisis entre estática y dinámica, conduciendo la matemática renacentista a una realización exitosa y contribuyendo al nacimiento de una nueva física.

PALABRAS-CLAVE • Arquímedes. Física aristotélica. Galileo. Estática. Dinámica. Antigüedad. Renacimiento. Momento. Palanca. Plano inclinado.

INTRODUCCIÓN

Las leyes que rigen el equilibrio mecánico de los cuerpos se obtienen como un caso particular de las leyes generales de la dinámica newtoniana con la sola condición de hacer que todas las aceleraciones valgan cero. Por lo tanto, que la estática es un capítulo más de la física es aceptado con total naturalidad desde que Newton estableció las bases de la mecánica clásica.

Pero estas dos disciplinas, estática y dinámica, tienen historias diferentes, con encuentros y desencuentros, hasta el Renacimiento. Aristóteles, en su física, consideró al movimiento como el concepto central “ya que la naturaleza es un principio de movimiento y de cambio (...) no podemos dejar de investigar qué es el movimiento”

(Física, III, 1, 200b1-3). El concepto de movimiento para Aristóteles es mucho más amplio que el de desplazamiento o cambio de lugar. Además dicho concepto está fuertemente comprometido con las concepciones metafísicas y cosmológicas de su filosofía. Aristóteles y los aristotélicos en la Antigüedad, en la Edad Media y en el Renacimiento se ocuparon en particular del movimiento local como un aspecto particular de la física. Esa ciencia del movimiento local presentaba ciertos conflictos con la observación, mientras que la estática parecía ajustarse perfectamente a ella.

En la física aristotélica, ocupa un lugar central la causa final que sería la respuesta a la pregunta: ¿Hacia dónde se dirige espontáneamente la naturaleza para producir el orden y la perfección que la caracterizan? Entonces para Aristóteles el movimiento natural es un proceso teleológico. En particular, el movimiento *natural local* no es un *estado* de las cosas ante el cual éstas se muestran indiferentes, sino un *proceso* que conduce a actualizar el lugar propio que corresponde a cada cuerpo en el cosmos ordenado espacialmente.

La estática, dentro de las ciencias griegas de la Antigüedad, estaría ubicada dentro de las ciencias matemáticas aplicadas, también llamadas “ciencias mixtas”. El objeto de tal disciplina es el estado de equilibrio mecánico de los cuerpos. Las leyes de la estática fueron establecidas inicialmente por Arquímedes utilizando una geometrización de los fenómenos y formuladas en un sistema axiomático riguroso. El rigor del enfoque de Arquímedes se logró a costa de restringir el tipo de problemas tratados y los conceptos básicos empleados (cf. Solís & Sellés, 2005).

Entre Aristóteles y Arquímedes está el texto *Problemas mecánicos*. Esta obra está incluida en el corpus aristotélico ya que durante mucho tiempo se creyó que el autor era el propio Aristóteles. Se supone que se escribió después de la muerte del estagirita y antes del nacimiento de Arquímedes y que el autor pudo haber sido un discípulo de aquel. En dicha obra del siglo III a.C. encontramos planteados, como su nombre lo indica, un conjunto de problemas o preguntas referidas a cuestiones relativas a las máquinas simples. Desde entonces se inició un camino que con el correr de los siglos llevaría a reajustar la relación entre matemática y física, para lo que contribuyo, en particular en la estática, los diversos intentos de deducir las leyes de la estática a partir de principios dinámicos basados en la física aristotélica.

I LA FÍSICA ARISTOTÉLICA

La física de Aristóteles es el estudio de la naturaleza y ésta es el conjunto de sustancias naturales. Aristóteles (384-322 a.C.) denomina sustancia a todo aquello que puede existir por sí mismo, y accidente a todo aquello que requiere de otro para existir. Pero

como la ciencia debe tratar de encontrar la esencia universal que se encuentra en cada una de las sustancias naturales, Aristóteles concibe a toda sustancia como un compuesto de un sustrato material (*hyle*) y un componente universal, que es su esencia o forma (*morphé*). A esta concepción se la denomina hilemorfismo.

Aristóteles fue un distinguido naturalista comprometido filosóficamente con la plena realidad de los individuos mutables que constituyen el mundo sensible y, por lo tanto, el punto de partida de su filosofía natural fue asumir el punto de vista de sentido común de que el cambio es auténtico (cf. Lindberg, 2002). En palabras del propio Aristóteles:

Entre los seres, unos son por naturaleza, otros por otras causas; por naturaleza, los animales y sus partes, las plantas y los cuerpos simples, como la tierra, el fuego, el agua, el aire (...); cada ser natural, en efecto, tiene en sí mismo un principio de movimiento y de reposo, unos en cuanto al lugar, otros en cuanto al aumento y la disminución, otros en cuanto a la alteración... pues la naturaleza es un principio y una causa de movimiento y de reposo para la cosa en la que reside inmediatamente, por esencia y no por accidente (Física, II, 1, 192b, 8-25).

Un acto de movimiento o cambio exige un agente y un paciente y ambos deben ser compatibles. El paciente no puede responder al influjo del agente a no ser que posea la facultad de actuar así. Ésta es su *dynamis*. Una piedra sujeta al mismo influjo que una semilla no se desarrollará en una planta.

Al impugnar la existencia de entidades universales en un mundo *separado*, pero admitir al mismo tiempo que toda *ciencia* (*episteme*) es de lo universal, uno de los principales problemas de la metafísica de Aristóteles es cómo *concebir* tales universales como objetos de la ciencia. El universal no es un concepto subjetivo ni un *modo de expresión*. Si lo consideramos en el objeto, es su esencia (lo que le hace ser lo que es). Si lo consideramos en la mente, es la definición (concepto) universal de tal esencia. El universal no existe en ningún estado de separación fuera de la mente. Es real tanto en la mente como en el objeto, aunque su existencia en la cosa no implica la universalidad formal que tiene en la mente.

Examinando las doctrinas de los filósofos precedentes sobre lo que hace que algo sea lo que es, Aristóteles dirá que algunos han enfatizado la causa *material*, otros la causa *formal*, otros la causa *eficiente*. Reconocerá que efectivamente todas estas son causas verdaderas, la material se refiere a aquello de lo que algo está hecho, la formal a aquello a lo que algo llega a ser y la eficiente la que origina el movimiento. Sin embargo, Aristóteles considerará que esta lista es *incompleta*. Es necesaria una causa que cumpla el papel rector que cumplía la *idea de bien* en la filosofía platónica: postula una cuarta

causa, la *causa final*. La causa final es el fin al que se dirigen todas las cosas y que también forma parte de la explicación del *por qué* algo es como es, o cambia del modo en que lo hace. La *causa final* es igual a la *causa formal en potencia* que llega a ser forma en *acto* gracias a la *causa agente*. Con ello Aristóteles inaugura las explicaciones *teleológicas*, explicaciones a través de su fin (*telos*). Este tipo de explicaciones le permitirá una concepción global del cambio natural (concepción organicista), como *actualización de la forma* hacia su punto máximo de *perfección*. Solís & Sellés (2005) se refieren a estos temas de la siguiente manera:

Para Aristóteles las matemáticas son el modelo del conocimiento demostrativo acabado, mientras que la dialéctica filosófica contribuye al proceso que conduce de la experiencia sensible a los primeros principios de la demostración. De este modo, Aristóteles abandonó el idealismo y la teología platónicas a favor de un inmanentismo y empirismo que lleva a ver el orden y la teleología o finalidad como algo propio de la naturaleza. La variabilidad, el cambio y el no ser de que nos informan nuestros sentidos no debe atribuirse a su carácter engañoso sino a una característica universal y necesaria de la naturaleza, objeto, por lo tanto, de conocimiento científico (Solís & Sellés, 2005, p. 97).

Para Aristóteles, todas las sustancias se consideran compuestas de los cuatro elementos simples: tierra, agua, aire y fuego y cada uno de éstos, a su vez, como una combinación de los cuatro principios opuestos primarios: lo seco, lo húmedo, lo frío y lo caliente (cf. Lloyd, 1977). La física de Aristóteles se concibe como una explicación de las cualidades sensibles. Su forma misma de plantear la cuestión lo remite a una teoría cualitativa. Sugerir que estas cualidades derivan a su vez de diferencias cuantitativas más fundamentales sería, según su punto de vista, dar una respuesta equivocada al problema; en realidad, confundir su misma naturaleza (cf. Lloyd, 1977). El movimiento natural de estos cuatro elementos terrestres desde el centro de la Tierra es tanto hacia arriba como hacia abajo; el agua y la tierra, naturalmente, caen. Por supuesto que también pueden moverse en otras direcciones pero el movimiento de una piedra arrojada no es natural sino violento porque requiere de un agente impulsor. El movimiento de una llama al elevarse es un movimiento natural. Pero el movimiento circular de los cuerpos celestes, por ser eterno no puede ser forzado, por consiguiente debe ser natural. Por otro lado, un objeto que se mueve naturalmente en círculos no puede estar formado por elementos terrestres. Por lo tanto, para Aristóteles, los cuerpos celestes están formados por una sustancia muy diferente, un quinto elemento, *aither* (cf. Lloyd, 1977). La física de Aristóteles es cualitativa para que se pueda aplicar la lógica deductiva. Es decir a partir de premisas físicas y a través del silogismo se alcanzan conclusiones físicas.

Según Lloyd (1977), no es exagerado afirmar que antes de Aristóteles no existía en la ciencia griega nada digno de ser llamado dinámica. Los textos de Aristóteles suministran las primeras enunciaciones generales concernientes a las relaciones entre los diversos factores que rigen la velocidad de un cuerpo en movimiento. Así como su cosmología es doble, también hay dos dinámicas: la de los objetos terrestres, o más generalmente, de la región sublunar, y la de los objetos celestes. Para cada elemento terrestre en estado puro existe un lugar natural. El más pesado, la tierra, se ubicará en el centro del universo. El agua sobre la tierra. El aire sobre el agua y el lugar del fuego es la región entre el aire y la esfera de la luna, la esfera inferior de la región celeste.

2 LAS CIENCIAS MATEMÁTICAS GRIEGAS

En la tradición científica occidental, ha habido un largo debate sobre la aplicabilidad de las matemáticas a la naturaleza. La cuestión es si el mundo es fundamentalmente matemático, en cuyo caso el análisis matemático es el camino más seguro para una comprensión más profunda, o si las matemáticas son aplicables sólo a los aspectos superficiales cuantificables de las cosas, sin alcanzar realidades últimas (cf. Lindberg, 2002). Es bastante obvio que para las ciencias naturales desde el Renacimiento hasta nuestros días ha habido un progresivo énfasis en el enfoque matemático. Sin embargo el debate entre ambas posiciones sigue vigente entre los científicos sociales y los historiadores.

En la antigüedad, la posición de predominio de la matemática fue asumida por los pitagóricos, y posteriormente fue tomada muy en serio por Platón. Pero para Aristóteles, de quien no nos cabe duda que poseía formación matemática por haber sido miembro de la Academia de Platón, existía una diferencia entre las matemáticas y la ciencia natural o física. “La física, por definición, considera las cosas naturales en su totalidad, como cuerpos sensibles, mutables. El matemático, en cambio, desnuda los cuerpos de todas las cualidades sensibles y se concentra en las matemáticas restantes” (Lindberg, 2002, p. 122). Aristóteles en su *Física* se ocupa específicamente de este tema:

Puesto que hemos determinado en cuántos sentidos se entienden la naturaleza, hay que considerar ahora en qué se diferencia el matemático del físico. En efecto, los cuerpos naturales tienen superficie, volumen, longitud y puntos, cosas sobre las que investiga el matemático. Debemos examinar, además, si la astronomía es una ciencia distinta o bien es parte de la física, ya que si corresponde al físico saber qué es el sol o la luna resulta absurdo que no conozca sus atributos esenciales. Y, principalmente, porque claro está, los que discurren sobre la natu-

raleza y la figura de la luna o del sol también investigan si la tierra y el mundo son esféricos o no (Física, II, 2, 193b21-31). (...) la geometría investiga lo concerniente a la línea física pero no en cuanto física; la óptica investiga la línea matemática pero no en cuanto matemática sino en cuanto física (Física, II, 2, 194a9-13).

Contra los pitagóricos y platónicos, para Aristóteles, las entidades matemáticas sólo son formas abstraídas de un sujeto material y, como tales, no tienen una existencia realmente independiente. Cuando la física considera los atributos geométricos los toma como accidentes, mientras que las matemáticas los estudian por sí mismos, haciendo abstracción de los cuerpos físicos a que pertenecen.

En el siglo IV a.C., las conquistas de Alejandro Magno pusieron a los griegos en contacto con las matemáticas de los pueblos orientales. En Alejandría, se fundó el Museo, con su famosa biblioteca, en el que los eruditos se dedicaban al estudio de diversas disciplinas. Entre ellas, a las matemáticas, que incluían los campos más abstractos de la geometría, la aritmética y el álgebra. Pero las investigaciones se ocupaban

también de aquellas áreas en que las matemáticas se aplicaban a ciertos terrenos físicos aptos para el tratamiento geométrico, como la geografía y la geodesia, la mecánica y la teoría de máquinas, la estática y la hidrostática, la óptica y la música, la astronomía de posición; esto es, lo que se dio en llamar “matemáticas mixtas”, por ser una mezcla de matemática abstracta y física (Solís & Sellés, 2005, p. 135).

Por lo tanto, la estática es una de estas ciencias “medias” o “mixtas” en donde los términos mayores y menores de los silogismos científicos son de tipo físico y el término medio es matemático. Uno de los temas centrales de la estática es el equilibrio de la balanza tanto la de brazos iguales como la de brazos desiguales conocida como balanza romana. Pero este tema puede incluirse a su vez en uno mucho más general: la palanca. En la ciencia de la palanca, la física parecía casi completamente reducible a lo matemático (cf. Linberg, 2002). El desarrollo, en la Antigüedad, de la ciencia de la estática está íntimamente vinculado con la mecánica o ciencia de las máquinas. Desde el siglo IV a.C., la mecanización avanzó en sectores estratégicos como en la minería, en la ingeniería militar y en la navegación, especialmente en Siracusa (Arquímedes, siglo III a.C.), en Alejandría (Herón, siglo I d.C.) y en Bizancio (Filón, siglo III a.C.).

Un importante testimonio acerca de esta época de gran desarrollo técnico y científico es la *Colección matemática* de Pappo de Alejandría (ca. 300 d.C.). Este gran matemático griego de la escuela alejandrina escribió comentarios a los *Elementos* de Euclides y a la gran sintaxis matemática de Tolomeo, llamada *Almagesto* por los árabes. Su obra principal, la *Colección matemática*, escrita hacia el 340, reviste una particular

importancia desde el punto de vista histórico, porque, además de ser una exposición completa y sistemática de los conocimientos de su época, recoge fragmentos, a veces íntegros, de las obras que constituían los fundamentos de la enseñanza de las matemáticas en la ciudad de Alejandría, hoy en gran parte perdidas. La *Colección* está compuesta por ocho libros, casi todos conservados. El libro VIII trata sobre la ciencia de la mecánica que para Pappo no es solamente útil por sus muchas e importantes aplicaciones prácticas de interés para los hombres, sino que es estimada por los filósofos y matemáticos, ya que fundamentalmente concierne a la doctrina de la naturaleza con especial referencia a la composición material del cosmos. Según Pappo, ya que la mecánica estudia la estabilidad de los cuerpos tanto como su tendencia natural a caer y sus movimientos en general, no sólo establece las causas de su movimiento natural, sino que permite diseñar dispositivos por medio de los cuales es posible impulsar a los cuerpos a cambiar su posición, oponiéndose a sus naturalezas (tendencias naturales), en una dirección más allá de sus lugares naturales (cf. Lahanas, 2006; Cohen & Drabkin, 1958).

3 Los *Problemas mecánicos*

DE LA TRADICIÓN ARISTOTÉLICA (PSEUDO-ARISTÓTELES)

Uno de los primeros textos que se conservan, y a la vez muy significativo, sobre esta relación entre estática y dinámica son los *Problemas mecánicos*. Esta obra es un producto de la escuela peripatética posterior a Aristóteles, pero, como la tradición se la atribuyó a Aristóteles y no se conoce su verdadero autor, se la llama pseudo-Aristóteles. Solís y Sellés consideran que su posible autor haya sido Estratón, que murió en el 268 a.C., y que fuera el tercer director del Liceo. Según estos autores:

Los matemáticos tendían a estudiar la mecánica eliminando las consideraciones dinámicas (las fuerzas o causas) para concentrarse en el equilibrio (sin fuerzas netas), mientras que los físicos tendían a tomar en cuenta los movimientos y sus motores, con lo que sus esfuerzos eran difíciles de geometrizar, ya que el estudio matemático del movimiento estaba por hacer (Solís & Sellés, 2005, p. 148).

El contraste entre estos dos enfoques se puede apreciar si se compara a Arquímedes con Estratón, el tercer director del Liceo y posible autor de los *Problemas mecánicos*. Desde la perspectiva de la mecánica, Estratón consideraba que las diversas tendencias al movimiento de los elementos de Aristóteles se reducían a una sola: el peso. Consideraba que la ligereza no era la tendencia natural de moverse hacia arriba si no el

resultado del desplazamiento hacia arriba de lo menos pesado provocado por el descenso de lo más pesado.

Los *Problemas mecánicos* constituyen una colección de 35 problemas, unos sobre máquinas y otros sobre cuerpos en movimiento. La idea básica de este tratado es que casi todos los movimientos se reducen al caso de la palanca, que remite al uso de la balanza y a la vez a las propiedades de la circunferencia (cf. Solís & Sellés, 2005). Esta obra, de gran influencia en el Renacimiento, comienza así:

Lo que sucede según la naturaleza, pero cuya causa no nos resulta evidente, nos parece maravilloso. Pero también nos asombramos ante aquellos fenómenos producidos artificialmente por la técnica en beneficio de la humanidad. La naturaleza actúa frecuentemente en contra de los intereses humanos, pues ella siempre tiene la misma tendencia, simple, en cambio su uso resulta complejo. Por lo tanto cuando hemos de hacer algo contra la naturaleza, la dificultad de la tarea nos causa perplejidad y hemos de llamar a la técnica en nuestra ayuda. A esta parte de la técnica que resuelve tal perplejidad la denominamos *habilidad mecánica*. Como dice el poeta Antifón: “vencemos a través de la técnica, donde somos derrotados por la naturaleza”. Tal como ocurre cuando el más pequeño vence al más grande, y cuando cosas que tienen pequeño ímpetu mueven grandes pesos. Denominamos mecánicos a todos esos problemas. Ellos no son totalmente idénticos ni enteramente desconectados a los problemas naturales, sino que tienen algo en común con la matemática y con los conocimientos de la física: el cómo se justifica a través de la matemática, el por qué se explica a través de la física.

A las dificultades de este género pertenecen las inherentes a la palanca, porque parece insólito mover un gran peso con una pequeña fuerza, y más en tanto es más grande el peso. Lo que una persona no puede mover sin una palanca, con la ayuda de ésta lo mueve fácilmente (aun agregándole el propio peso de la palanca). La causa fundamental de todo esto reside en el círculo y es, en verdad, muy natural que sea así, pues no es absurdo que lo maravilloso surja de lo maravilloso. Porque es asombroso que los contrarios coexistan, y el círculo está compuesto de contrarios. En efecto, él está engendrado por algo que se mueve y por algo que se mantiene en su sitio (Mech, 847a10-847b20).

3.1 ¿POR QUÉ PEQUEÑAS FUERZAS PUEDEN MOVER GRANDES PESOS CON UNA PALANCA?

Así está planteado el Problema 3 de los *Problemas mecánicos*. El autor nos explica que la palanca es una barra AB con un fulcro E (punto de apoyo) que la divide en partes de

distinta longitud $EA > EB$ como podemos apreciar en la figura 1. Dicho punto de apoyo es un centro, es decir, no se mueve. Sobre los extremos de la barra hay dos pesos:

- El peso “moviente”, es decir, la pequeña fuerza f que se menciona en la pregunta inicial, apoyado en el extremo A más alejado del fulcro E .
- El peso P movido por la fuerza f , apoyado en el extremo B más cercano al fulcro.

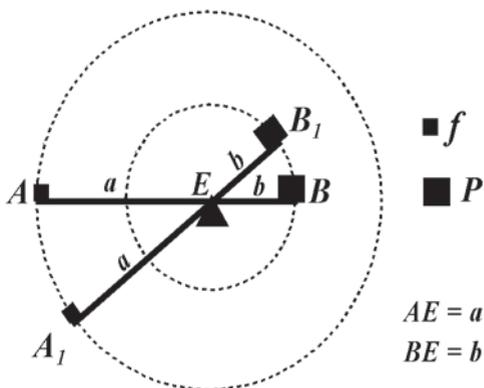


Figura 1. Problemas mecánicos.

El autor enuncia la ley de la palanca: la razón entre el peso movido P al peso que causa el movimiento f es igual a la razón inversa de las distancias desde el centro. En lenguaje moderno lo expresamos así:

$$P/f = a/b \quad \text{o} \quad Pb = fa.$$

Cuando la fuerza f se desplaza desde A hasta A_1 describe un arco de circunferencia AA_1 mayor que el desplazamiento del peso P según el arco BB_1 . De esta manera, una fuerza provoca mayor movimiento al actuar a una distancia mayor del fulcro (cf. Winter, 2007; Aristóteles, 1936). Se podría decir que, en esta obra, encontramos un antecedente de la definición de momento de una fuerza.

Acabamos de exponer una de las primeras explicaciones que han sobrevivido del funcionamiento de la palanca. Es importante hacer notar que es una explicación “dinámica” de un fenómeno “estático”, ya que la ley enunciada anteriormente es válida para el caso en que la palanca se mantenga en equilibrio. Podemos inferir que el autor quiere decir que, si la palanca se pusiera en movimiento, las velocidades de los pesos serían inversamente proporcionales a la magnitud de dichos pesos (cf. Lindberg, 2002), aunque esto no se enuncia explícitamente (cf. Solís & Sellés, 2005).

Según Solís y Sellés (2005), en *Problemas mecánicos*, se pone a la par el mundo natural y el mundo artificial. A partir de entonces, los ingenieros alejandrinos iniciaron el estudio teórico y sistemático de las máquinas. Es decir que, en el siglo III a.C., filósofos y matemáticos se ocuparon del sorprendente mundo de las máquinas, iniciando un largo camino que llevaría con el tiempo a reajustar la relación entre física y matemática. El estudio de las máquinas simples como la palanca, la polea, engranajes,

plano inclinado y de las combinaciones entre ellas presenta una relativa simplicidad a la vez que una gran posibilidad de control. Estas investigaciones permitieron el aislamiento de los elementos esenciales del funcionamiento de las máquinas y facilitaron la formulación de conceptos y principios con que sistematizar deductivamente las leyes de operación. Sin embargo, la relación entre geometría, máquinas y experimentación siguió un camino tortuoso hasta alcanzar el éxito con el mecanicismo del siglo XVII.

4 ARQUÍMEDES Y LA LEY DE LA PALANCA

Arquímedes (ca. 287-211 a.C.) contribuyó tanto a la matemática teórica como a la aplicada y es estimado especialmente por la elegancia de sus demostraciones matemáticas. En particular, nos ocuparemos en esta sección de su demostración estática de la ley de la palanca tal como fue desarrollada en *Sobre el equilibrio de los planos*. En ella, Arquímedes elimina la consideración dinámica del movimiento para centrarse en los casos de equilibrio estático y hace abstracción de consideraciones físicas de los cuerpos, tales como naturalezas y tendencias teleológicas (cf. Solís & Sellés, 2005). Si exceptuamos la afirmación de que los pesos efectivamente pesan, las consideraciones físicas no aparecen por ningún lado. El brazo de la palanca es considerado como una línea inmaterial y los pesos se aplican a puntos geométricos (cf. Lindberg, 2002). La demostración tiene el estilo de Euclides a partir de premisas que se establecen por intuición y simetría geométrica. Los postulados de *Sobre el equilibrio de los planos* son los siguientes (Cohen & Drabkin, 1958, p. 186-8):

Postulado 1: Pesos iguales a distancias iguales están en equilibrio y pesos iguales a distancias desiguales no están en equilibrio sino que se inclina (la palanca) hacia el peso que está a mayor distancia.

Se sobreentiende que las distancias se miden desde el fulcro o punto de apoyo de la palanca.

Postulado 2: Si, cuando los pesos ubicados a ciertas distancias están en equilibrio, se agrega algo a uno de los pesos ya no estarán en equilibrio, sino que descende el lado donde se ha agregado peso.

Postulado 3: Análogamente, si algo se quita de uno de los pesos, ya no permanecerán en equilibrio y descende el peso del que no se ha quitado nada.

En los postulados 2 y 3, se considera de manera implícita que todo es pesado y que la ligereza de un cuerpo no es otra cosa que la cualidad de ser menos pesado que otro cuerpo. Por otra parte, estos postulados resultan evidentes si nos imaginamos en la situación de estar realizando pesadas en una balanza de platillos de brazos iguales.

Postulado 4: Cuando figuras semejantes son iguales y se superponen una con la otra, sus centros de gravedad coinciden.

Postulado 5: En figuras semejantes que son desiguales, los centros de gravedad estarán similarmente situados. Por puntos análogos ubicados con relación a figuras semejantes, quiero decir puntos tales que si se trazan líneas rectas desde ellos con ángulos iguales, dichas líneas forman ángulos iguales con los correspondientes lados de las figuras.

Este postulado establece que figuras semejantes, es decir de la misma “forma”, pero desiguales, es decir de diferente tamaño, tendrán sus centros de gravedad en la misma posición “relativa”.

Postulado 6: Si magnitudes a ciertas distancias están en equilibrio, otras magnitudes iguales a ellas también estarán en equilibrio a las mismas distancias.

En este postulado, se plantea que a los efectos del equilibrio sólo son relevantes la magnitud y la distancia, con independencia de la forma o la sustancia. Es fundamental para la deducción de la ley de la palanca. Cuando Arquímedes dice “magnitudes iguales a otras magnitudes”, quiere decir “magnitudes del mismo peso”. Y cuando dice “magnitudes a ciertas distancias” quiere decir “los centros de gravedad de las magnitudes están a la misma distancia del fulcro” (Assis, 2008, p. 179).

Postulado 7: En cualquier figura cuyo perímetro es cóncavo en una y la misma dirección, el centro de gravedad debe estar dentro de la figura.

Con estos postulados, Arquímedes ha convertido un ámbito físico en una cuestión geométrica y, en el libro 1 de *Sobre el equilibrio de los planos*, procede a demostrar rigurosamente siete proposiciones sobre el equilibrio.

Proposición 1: Pesos que se equilibran a iguales distancias son iguales.

Enuncia la inversa de la primera parte del Postulado 1, que se puede demostrar por el absurdo utilizando el Postulado 3. De acuerdo al Postulado 1 y a la Proposición 1, la igualdad de pesos y distancias es condición necesaria y suficiente del equilibrio.

Proposición 2: Pesos desiguales a distancias iguales no se equilibrarán sino que se inclinarán hacia el lado del peso mayor.

Proposición 3: Pesos desiguales se equilibran a distancias desiguales, el peso más grande estará a menor distancia que el peso más pequeño.

Proposición 4: Si dos pesos iguales no tienen el mismo centro de gravedad, el centro de gravedad de ambos tomados conjuntamente está en el punto medio de la línea que une sus centros de gravedad.

Proposición 5: Si tres magnitudes iguales tienen sus centros de gravedad sobre una línea recta a distancias iguales, el centro de gravedad del sistema coincidirá con el centro de gravedad de la magnitud ubicada en el punto medio.

Corolario 1: Lo mismo es verdad para cualquier número impar de magnitudes, si aquellas que están a iguales distancias del punto medio son iguales, mientras la distancia entre sus centros de gravedad sean iguales.

Corolario 2: Si hay un número par de magnitudes con sus centros de gravedad situados a iguales distancias sobre una línea recta y si las dos del medio son iguales, mientras que aquellas que equidistan entre sí (a cada lado) son iguales respectivamente, el centro de gravedad del sistema es el punto medio de la línea que une los centros de gravedad de los dos del medio.

Es interesante visualizar gráficamente lo expresado en el corolario 2, ya que es esencial en la demostración de la ley de la palanca. Los cuerpos indicados con letras mayúsculas iguales, en la figura 2, tienen pesos iguales. Dichos cuerpos están situados en posiciones simétricas respecto del eje de simetría que pasa por el punto medio ubicado entre los dos cuerpos centrales. Dicho eje de simetría perpendicular a la línea que une todos los centros de gravedad de los n cuerpos determina el centro de gravedad del sistema.

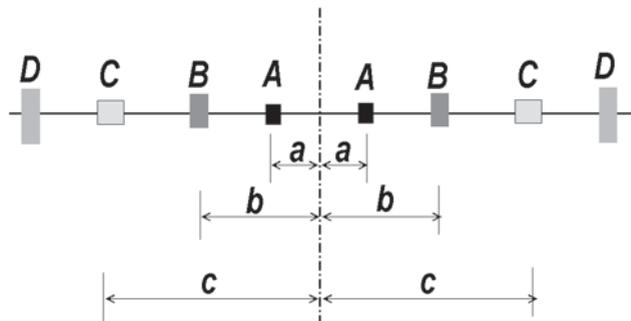


Figura 2. Corolario 2.

4.1 DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE LA PALANCA

La ley de la palanca fue demostrada por Arquímedes como la Proposición 6 de *Sobre el equilibrio de los planos*, para el caso en que el cociente entre el peso mayor y el peso menor es un número entero:¹

Proposición 6: Dos magnitudes, conmensurables entre sí, se equilibran a distancias inversamente proporcionales a sus magnitudes.

Observemos la figura 3 y supongamos que las magnitudes (pesos) A y B son conmensurables y que los puntos A y B son sus centros de gravedad. Sea DE un línea recta dividida en el punto C en dos segmentos: EC de longitud a y CD de longitud b . Supongamos que estas longitudes verifican la relación: $A/B = b/a$. Tenemos que probar que si A se ubica en E y B se ubica en D , C es el centro de gravedad común de ambos tomados conjuntamente.

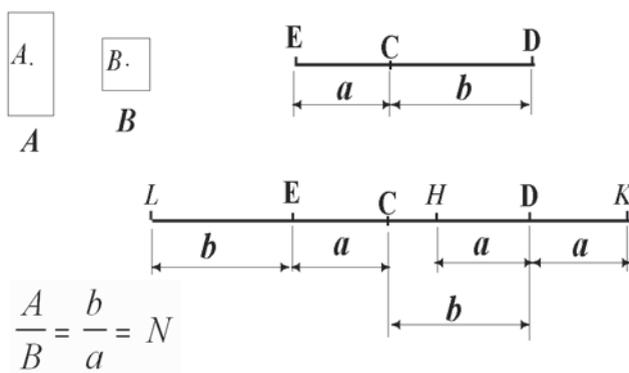


Figura 3. Demostración de la ley de la palanca.

Como los pesos A y B son conmensurables, también lo serán b y a . Sea N una medida común de ambos. Tracemos HD y DK ambas iguales a EC , es decir, de longitud a . Tracemos LE igual a CD , es decir, de longitud b . Entonces $EH = CD$, ya que $HD = EC$. Como se puede apreciar en la figura 3,

$$EH = a + CH \text{ y } CD = b = a + CH.$$

Por lo tanto, el segmento LH está dividido en dos partes iguales, de longitud b , por el punto E y el segmento HK está dividido en dos partes iguales, de longitud a , en el punto D . Tomemos una magnitud (peso) Z que esté contenida en el peso A , tantas veces como N está contenida en LH . De esto concluimos que: $A/Z = LH/N$. Pero como, entonces, por lo tanto, el peso Z está contenido un número entero de veces tanto en el peso A como en el peso B .

¹ En la proposición 7, Arquímedes completa la demostración para el caso de magnitudes inconmensurables.

Si dividimos tanto el segmento LH como el segmento HK en partes de igual longitud N y dividimos los pesos A y B en partes iguales a Z , como se muestra en la figura 4, la cantidad de partes en que quedará dividido el peso A será igual a la cantidad de partes en que quedará dividido el segmento LH . De igual modo, el peso B quedará dividido en una cantidad de partes iguales a Z y dicha cantidad será igual a la cantidad de partes en que quedará dividido el segmento HK .

De esta manera, hemos distribuido el peso A a lo largo del segmento LH en forma simétrica respecto del punto E . El Corolario 2 de la Proposición 5 nos permite afirmar que E es el centro de gravedad de A . En forma análoga, el peso B ha quedado repartido en partes iguales a lo largo del segmento HK , cuyo punto medio es D . Por lo tanto, D es el centro de gravedad del peso B .

Como C es el punto medio de LK , entonces C es el centro de gravedad de los pesos A y B tomados en forma conjunta. Por lo tanto, A actuando en E y B actuando en D estarán en equilibrio respecto al punto C (cf. Solís & Sellés, 2005, p. 151-2; Cohen & Drabkin, 1958, p. 186-9).

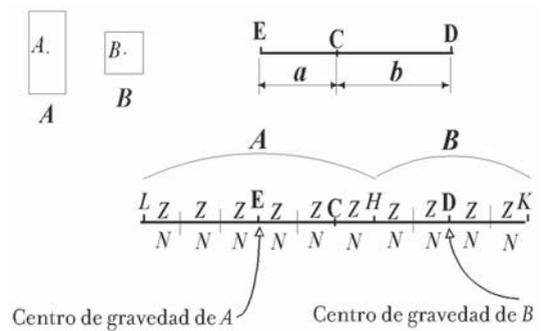


Figura 4. Demostración de la ley de la palanca.

4.2 LA IDEA CLAVE DE LA PRUEBA

Consideremos una barra sin peso de la cual cuelgan 6 unidades equidistantes de igual peso. La barra está suspendida de su punto medio C y, por lo tanto, en equilibrio. Las 6 unidades están suspendidas de los puntos medios de 6 segmentos iguales en que ha sido dividida la barra (cf. Renn; Damerow & McLaughlin, 2003). Esta situación se ilustra en la figura 5.

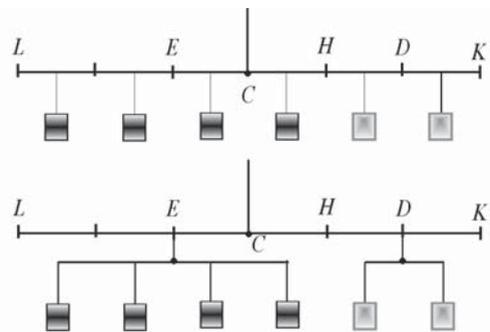


Figura 5. La idea clave de la prueba.

Estas 6 unidades de peso están repartidas de la siguiente manera: 4 unidades forman el cuerpo A (cuadros oscuros) y 2 unidades forman el cuerpo B (cuadros en color claro). Estas seis unidades están situadas en el punto medio de cada una de las seis secciones iguales en que se ha dividido la barra. A continuación el cuerpo A (cua-

dros oscuros) se cuelga de una barra adicional que a su vez cuelga de la primera barra, pero la posición relativa de estas 4 unidades de peso no cambia. Hacemos lo mismo con las 2 unidades que forman el cuerpo *B*. El equilibrio se mantiene, si las barras adicionales están suspendidas de sus respectivos puntos medios *E* y *D*.

El tercer paso en la deducción de Arquímedes consiste en considerar que el equilibrio no se modificará, si *todo* el cuerpo *A* se suspende del punto *E* y *todo* el cuerpo *B* se suspende del punto *D* (cf. Assis, 2008).

Llegamos al caso particular en que un cuerpo de 4 unidades de peso ubicado a una distancia de 1 unidad del punto de suspensión *C* está equilibrado por un cuerpo de 2 unidades de peso ubicado a una distancia de 2 unidades. Como podemos apreciar, este resultado, ilustrado en la figura 6, es fácilmente generalizable. En este sencillo análisis, podemos reconocer cómo el Postulado 6 (“si magnitudes a ciertas distancias están en equilibrio, otras magnitudes iguales a ellas también estarán en equilibrio a las mismas distancias”) es la premisa fundamental que le permite a Arquímedes demostrar la ley de la palanca. Concluimos este análisis acordando con Lindberg que:

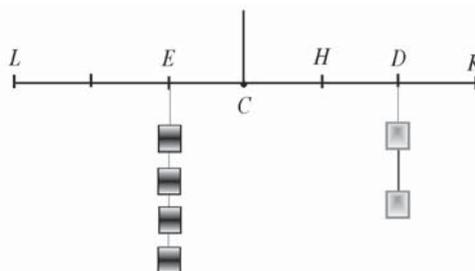


Figura 6. La idea clave de la prueba.

(...) el examen de su prueba de la ley de la palanca revela la minuciosidad y la extraordinaria pericia con la que geometrizó la naturaleza. Muchos problemas científicos continuaron resistiéndose a la solución mediante métodos matemáticos, pero Arquímedes permaneció como un símbolo del poder del análisis matemático y fuente de inspiración para aquellos que creían que las matemáticas eran capaces de triunfos aun mayores. Sus obras tuvieron una influencia limitada durante la Edad Media, pero en el Renacimiento se convirtieron en la base de una poderosa tradición de la ciencia matemática (Lindberg, 2002, p. 151).

4.3 LA CRÍTICA DE MACH A LA DEMOSTRACIÓN DE ARQUÍMEDES

El físico Ernest Mach (1838-1916), en su análisis histórico-crítico de la mecánica, expuso una crítica a la demostración de Arquímedes. Según Mach, la demostración contiene presupuestos que no se explicitan y que se deben obtener de la experiencia. A pesar de la elegancia y el rigor lógico de la demostración, Mach se cuestiona:

De la mera suposición del equilibrio de iguales pesos a iguales distancias, se deduce la proporcionalidad inversa entre los pesos y los brazos de palanca! ¿Cómo es esto posible? Si el mero hecho de que el equilibrio depende del peso y de la distancia, lejos de poder deducirlo lógicamente, tuvimos que buscarlo en la experiencia, muchos menos podrá encontrarse, con recursos puramente especulativos, la forma de esa dependencia, vale decir la proporcionalidad inversa. En verdad, Arquímedes y todos sus sucesores, tácitamente o en forma más o menos oculta, introdujeron la hipótesis de que el efecto perturbador del equilibrio de un peso P a una distancia D está medido por el producto $P \times D$ – el llamado momento estático (Mach, 1949, p. 24).

Lo que nos quiere decir Mach es que si la dependencia del momento con D no fuera lineal, no serían válidas las transformaciones que hemos visto en los gráficos de la sección anterior. Por ejemplo, 4 unidades de peso actuando en E no serían equivalentes a esas mismas 4 unidades actuando en forma “distribuida”. Es decir, la dependencia lineal $P \times D$ ya está supuesta desde el inicio en la demostración.

Otros historiadores, como Valiati y Hölder, se han opuesto a la crítica de Mach. En forma análoga, lo ha hecho Dijksterhuis enfatizando que en el paso crítico de su prueba, Arquímedes hace uso del concepto de centro de gravedad (cf. Renn; Damerow & McLaughlin, 2003).

En efecto, en las figuras 5 y 6 que hemos utilizado para ilustrar la sección 4.2, podemos apreciar que el centro de gravedad del cuerpo de peso A (4 unidades) está en E y el centro de gravedad del cuerpo de peso B (2 unidades) está en D . Del mismo modo, la distribución inicial tiene su centro de gravedad en C en forma independiente del tipo de función que vincula momento con distancia siempre que se respete la simetría; lo que se aceptaría como evidente (cf. Assis, 2008).

En la figura 7, designamos con P_1, P_2, \dots, P_6 al peso de cada uno de los 6 cuerpos colgados de la barra, y con L a la longitud total de la barra LK . Si utilizamos la definición correcta de momento estático y nos basamos en la figura 7, el equilibrio queda determinado por la igualdad:

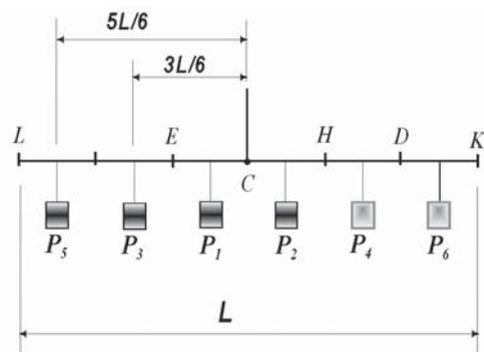


Figura 7. Crítica de Mach a Arquímedes.

$$P_5 \cdot \frac{5L}{12} + P_3 \cdot \frac{3L}{12} + P_1 \cdot \frac{L}{12} = P_6 \cdot \frac{5L}{12} + P_4 \cdot \frac{3L}{12} + P_2 \cdot \frac{L}{12}.$$

Podemos apreciar que el equilibrio se verifica, si $P_1 = P_2$, $P_3 = P_4$ y $P_5 = P_6$, una condición más restrictiva que la utilizada en la demostración donde todos los cuerpos tienen igual peso. Además, si la dependencia del momento con la distancia no fuera lineal, siempre que se mantenga la condición de simetría, el equilibrio respecto de C se conserva. Dicho de otro modo, C es el centro de gravedad del sistema. Supongamos que el momento estático se definiera como $P \times Db$, entonces se puede ver fácilmente, tal como lo señala Assis (2008), como el equilibrio no es modificado ya que la igualdad se mantiene:

$$P_5 \cdot \left(\frac{5L}{12}\right)^b + P_3 \cdot \left(\frac{3L}{12}\right)^b + P_1 \cdot \left(\frac{L}{12}\right)^b = P_6 \cdot \left(\frac{5L}{12}\right)^b + P_4 \cdot \left(\frac{3L}{12}\right)^b + P_2 \cdot \left(\frac{L}{12}\right)^b.$$

Según el punto de vista de los críticos de Mach, la consideración de simetría y el concepto de centro de gravedad son los elementos esenciales que permiten a Arquímedes realizar la deducción y no la dependencia lineal con la distancia. Como ya hemos dicho, el Corolario 2 de la Proposición 5, así como el Postulado 6 son las claves de la demostración. Aceptando esto, la dependencia lineal del “efecto perturbador del equilibrio”, tal como llama Mach al concepto de momento estático, queda demostrada en la deducción de Arquímedes y no está supuesta implícitamente.

Es importante destacar que Mach aceptó las críticas, especialmente las de Valiati, y al mismo tiempo defendió su posición:

Debo aquí llamar la atención de mis lectores sobre un hermoso trabajo de G. Valiati (*La dimostrazione del principio della leva data da Archimedes*, 1904) (...) [que] muestra que Arquímedes deduce la ley de la palanca apoyándose en experiencias generales sobre el centro de gravedad. Que tal proceso sea posible, admisible y hasta muy fecundo (...) jamás lo he negado. Mas todo mi libro persigue la finalidad de convencer al lector que las propiedades de la naturaleza no nacen fácilmente de suposiciones evidentes, sino que ellas deben ser deducidas de la experiencia (...). Tal deducción de teoremas simples, hasta evidentes, puede entusiasmar al matemático (...). Pero en otro tono y con otros objetivos, nos asisten todas las razones para distinguir el “artificio lógico” de la “convicción”, la “sorpresa de la reflexión”, lo “superficial” de lo “valioso” (Mach, 1949, p. 29).

5 JORDANO NEMORARIO Y LA CIENCIA DE LOS PESOS MEDIEVAL

Los medievales se encontraron con diferentes tradiciones antiguas acerca de la estática y de la dinámica y realizaron el intento de armonizarlas (cf. Solís & Sellés, 2005). Existía un enfoque geométrico (formal) y otro físico (los materiales con sus tendencias naturales al movimiento). Como hemos visto, la tradición geométrica de Arquímedes poseía una organización matemática impecable pero dicho rigor se alcanzaba con el costo de recurrir a principios formales de indiferencia en situaciones de simetría. Por otra parte, existía la tradición peripatética de los *Problemas mecánicos* (pseud-Aristóteles), que se basaba en una teoría física de la dinámica de los cuerpos, pero que estaba formulada en forma confusa desde el punto de vista matemático. En esta tradición, uno de los principios fundamentales es el hecho de que los cuerpos pesados se mueven, si no hay impedimentos, hacia el centro del universo. Es decir, hacia el centro de la Tierra. Si un cuerpo está vinculado a un sistema mecánico, su tendencia natural se ve afectada, de manera tal que conserva parte de su movimiento natural vertical y adquiere un movimiento horizontal violento.

En el Islam, se combinaron ambas tradiciones en lo que se llamó “ciencia de los pesos”. Thābit ibn Qurra escribió, en el siglo IX, un libro sobre la balanza romana (de brazos desiguales), utilizando la tradición dinámica peripatética y con demostraciones matemáticas (cf. Folkerts & Lorch, 2007). Prescindió de los movimientos circulares de los extremos de la palanca alrededor del fulcro y concentró su atención a los desplazamientos verticales (cf. Solís & Sellés, 2005). Utilizó el principio de los desplazamientos virtuales según el cual, si una fuerza eleva a un peso P hasta una altura H , la misma fuerza elevará un peso kP hasta una altura H/k .

En lenguaje moderno, deberíamos llamar a este principio de los *trabajos* virtuales ya que lo que afirma es la equivalencia entre el producto $P \times H$ y el producto $kP \times H/k$. Efectivamente el producto $P \times H$ es el trabajo, tal como se lo entiende actualmente, que realiza un fuerza para elevar un cuerpo de peso P hasta una altura H , siendo la velocidad inicial igual a la final. El principio de Thābit ibn Qurra permite deducir la ley de la balanza romana.

En el siglo XII, la obra fue traducida por Gerardo de Cremona con el título *Liber charastonis* (*Libro de la balanza de brazos desiguales*). También se conocieron, para la misma época, los *Problemas mecánicos* y se tradujeron las obras de Arquímedes. A principios del siglo XIII, se realizó la traducción de un texto griego de autor desconocido de tradición arquimediana con el título *De canonio* (*De los cánones*), una obra que tuvo gran influencia. Nos enfrentamos con el encuentro de dos tradiciones, la dinámica del *Liber charastonis* y la arquimediana-eucléida de *De canonio*.

Jordano Nemorario (ca. 1220) intentó compatibilizar las dos tradiciones en su obra *Elementa Jordani super demonstrationem ponderum* (*Elementos de Jordano para las demostraciones de los pesos*). Comienza planteando siete postulados, a la manera de Arquímedes, pero cuyo contenido es básicamente aristotélico:

Postulado 1: El movimiento de todo peso es hacia el centro y su fuerza es la virtud de tender hacia abajo y resistir el movimiento en dirección contraria.

Postulado 2: Lo más pesado desciende más aprisa.

Postulado 3: Es más grave en el descenso en la medida que su movimiento hacia el centro es más directo.

Postulado 4: Es más grave según la posición cuando en dicha posición su trayectoria de descenso es menos oblicua.

Postulado 5: Un descenso es más oblicuo si para la misma distancia participa menos de la vertical.

Postulado 6: Un peso es menos grave que otro según la situación si se ve obligado a ascender por el descenso de otro.

Postulado 7: La posición de igualdad es la equidistancia de los brazos al plano del horizonte.

En el Postulado 1, podemos apreciar el carácter teleológico del movimiento natural, tomado de la física de Aristóteles. El carácter aristotélico del Postulado 2 es evidente pero podemos decir que, en dicho postulado, no se dice explícitamente que la velocidad es directamente proporcional al peso. Tan sólo podemos interpretar, por ahora, que este postulado dice que el cuerpo más pesado llegará antes que el menos pesado, es decir, en menor tiempo. El Postulado 3 se puede interpretar fácilmente para el caso de un cuerpo apoyado en un plano inclinado. Si el peso del cuerpo para el movimiento vertical es P (su gravedad en el descenso), en un plano inclinado su gravedad en el descenso será $P' < P$.

El Postulado 4 define el concepto de gravedad según la posición, pero para ello se requiere la definición de oblicuidad. Ésta se da en el Postulado 5, que es una mera definición. Debemos observar aquí que el concepto de oblicuidad (inclinación) está tomado respecto a la vertical, es decir, en forma contraria a como lo hacen los libros modernos de física. Así, la línea vertical tiene para Jordano oblicuidad nula y en ella la gravedad según la posición es el peso P . Una línea inclinada cierto ángulo respecto a la vertical tiene cierta oblicuidad que hace que la gravedad según la posición sea menor que P . Podemos aventurarnos a inferir que, para Jordano, una línea horizontal tiene oblicuidad máxima y en ella la gravedad según la posición sería nula. Dicho de

otro modo, para Jordano un cuerpo apoyado en una superficie horizontal tendría su tendencia natural al descenso “anulada”. De cualquier modo para poder aplicar el Postulado 4 a diversas situaciones, debería aclararse, en la definición de oblicuidad (Postulado 5), qué quiere decir “para la misma distancia”.

El Postulado 6 se adecúa perfectamente al caso de la balanza desequilibrada. Si uno de los cuerpos asciende, en contra de su tendencia natural, es porque está “obligado” por el descenso de otro que es más pesado. El Postulado 7 se puede interpretar como una forma de expresar parte del Postulado 1 y la Proposición 1 de *Sobre el equilibrio de los planos* de Arquímedes. El Postulado 1 de Arquímedes establece que “pesos iguales a distancias iguales están en equilibrio” y la Proposición 1 dice que “pesos que se equilibran a iguales distancias son iguales”. Por lo tanto, la igualdad de pesos y distancias es condición necesaria y suficiente para el equilibrio de la palanca.

5.1 EL PLANO INCLINADO

Vamos a aplicar la teoría de Jordano al caso del plano inclinado. Sean dos planos inclinados de igual longitud L , como se ilustra en la figura 8, e interpretemos esta igualdad de longitudes como “la misma distancia”. Para ello, las longitudes L de ambos planos serán iguales al radio de la circunferencia. Entonces, “para la misma distancia”, el plano de altura H_2 al participar menos de la vertical tiene mayor oblicuidad. El plano de altura mayor H_1 al participar más de la vertical es menos oblicuo, es decir, más próximo a la vertical.

Por lo tanto, la oblicuidad² queda determinada por L/H y se puede ver que se cumple:

$$\frac{L}{H_2} > \frac{L}{H_1} \Rightarrow \text{oblicuidad}_2 > \text{oblicuidad}_1.$$

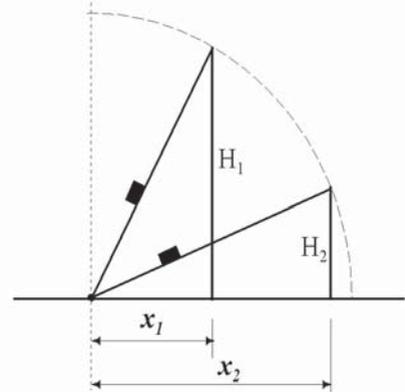


Figura 8. El concepto de “oblicuidad” en Jordano Nemorario.

² Utilizando trigonometría podemos ver que la oblicuidad de Jordano es la secante del ángulo b que forma el plano inclinado con el plano vertical. Entonces el peso según la posición sería $P' = P/\sec b$.

Los dos rectángulos negros de la figura 8 representan cuerpos de igual peso apoyados en los planos inclinados. El cuerpo apoyado en el plano de menor altura, más oblicuo, tiene menor gravedad según la posición. El cuerpo apoyado en el plano de mayor altura, menos oblicuo, tiene mayor gravedad según la posición.

En la opinión de Solís y Sellés (2005), lo más original del tratado de Jordano y a la vez de toda la mecánica medieval es el establecimiento, por primera vez, de la ley del plano inclinado. En primer lugar, Jordano, en su Proposición 9, establece que la gravedad según la posición es la misma en todos los puntos del plano. En efecto, para una longitud (o distancia) dada sobre el plano, en cualquier posición le corresponde el mismo segmento horizontal y el mismo vertical. Esto significa que la oblicuidad de un plano inclinado es constante a lo largo del mismo.

A continuación, en la Proposición 10, demuestra que dos pesos ubicados en planos inclinados de diferente inclinación tienen la misma “fuerza de descenso”, si se verifica entre ellos que la proporción entre los pesos es igual a la proporción entre las longitudes de los planos.

La demostración de Jordano es casi completamente geométrica como veremos a continuación. Sean dos planos inclinados DC y DA de igual altura y distintas longitudes L_1 y L_2 respectivamente. Sobre cada uno de ellos está apoyado un cuerpo. Sobre DC un cuerpo de peso P_1 y sobre DA un cuerpo de peso P_2 . Esto se puede apreciar en la figura 9, donde se ha incluido una cuerda que vincula a los cuerpos. Es importante hacer notar que en la demostración de Jordano los cuerpos son puntuales. Es decir, siguiendo la tradición de Arquímedes, los cuerpos son reemplazados por sus centros de gravedad.

Lo que afirma la ley de Jordano es que si la proporción de los pesos es igual a la proporción entre las longitudes, la “fuerza del descenso” (o gravedad según la posición) para ambos cuerpos será la misma y, por lo tanto, si están vinculados por una cuerda, permanecerán en equilibrio.

La demostración requiere la construcción geométrica adicional de otro plano inclinado auxiliar DK de longitud L_1 y sobre el cual descansa un cuerpo auxiliar de peso $P_3 = P_1$ ubicado en G . Luego se supone que el cuerpo P_1 desciende sobre el plano DC una distancia d o verticalmente una altura h_1 . Por lo tanto el cuerpo P_2 se ve obligado a ascender sobre el plano DA la misma distancia d , lo que equivale a subir verticalmente una altura h_2 , como podemos ver en la figura 10.

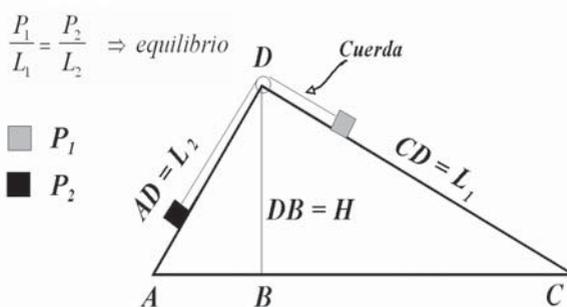


Figura 9. Jordano y la ley del plano inclinado.

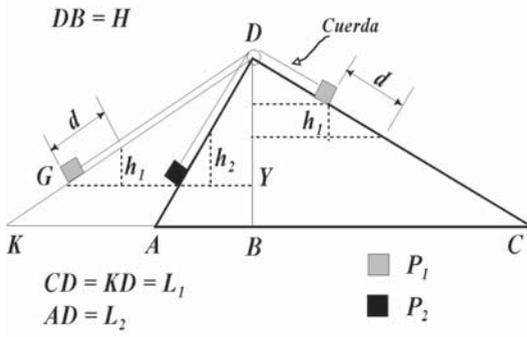


Figura 10. Demostración de Jordano.

Analizando la figura 10 se puede apreciar que la proporción entre h_1 y d es la misma que entre DB y DK , ya que $DB = H$. Análogamente se puede ver que la proporción entre h_2 y d es la misma que entre H y DA . De estas dos últimas relaciones, Jordano concluye que h_2 es a h_1 como L_1 es a L_2 . Entonces:

$$\frac{h_1}{d} = \frac{H}{DK} \quad \frac{h_2}{d} = \frac{H}{DA} \quad \Rightarrow \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{DK}{DA} = \frac{L_1}{L_2},$$

es decir, si P_1 descendiera verticalmente una altura h_1 , el cuerpo de peso P_2 , ubicado en el plano de menor oblicuidad, debería subir una altura h_2 mayor que h_1 . La relación entre estos desplazamientos verticales debería ser: $h_2/h_1 = L_1/L_2$. (Recordemos que menor oblicuidad para Jordano es lo que para nosotros sería mayor inclinación.) Por hipótesis, la proporción de los pesos es igual a la proporción entre las longitudes. Entonces:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{P_3}{P_2} \quad \text{o} \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{P_1}{P_2}, \quad \text{ya que} \quad P_3 = P_1.$$

Pero P_1 no puede elevar a P_3 hasta la altura h_1 , tampoco podrá elevar a P_2 hasta la altura h_2 . Podemos apreciar como Jordano aplica el principio de Thābit ibn Qurra (que también se conoció como el axioma de Jordano), según el cual si una fuerza P_1 eleva a un peso P_3 hasta una altura h_1 , la misma fuerza elevará un peso kP_3 hasta una altura h_1/k . En este caso, P_1 es igual a P_3 y *no puede* elevarlo, y $k = L_2/L_1$ por lo que kP_3 es igual a P_2 y este peso tampoco podrá ser elevado. En consecuencia tanto P_1 como P_2 no se desplazarán si la proporción entre ellos es igual a la proporción entre las longitudes.

Hemos visto, en este ejemplo, como con la geometrización se logra deducir a partir de la física los principios de la estática. A diferencia del planteo estático-geométrico donde la deducción parte de una situación de equilibrio dada, aquí podemos ver como la ley que rige un estado de equilibrio se deduce al suponer un posible desplazamiento (o velocidad virtual) “compatible con los vínculos”, como se dice en el lenguaje de la mecánica racional. Según Solís y Sellés:

La ciencia de los pesos se inició de manera ecléctica y llena de dificultades conceptuales y de geometrización pero consiguió la proeza de derivar a partir de la física los principios de la mecánica geométrica y, por lo tanto, toda la mecánica, con lo que una ciencia matemática clásica se fundió esencialmente con la física. Esa era la pretensión de las ciencias medias. Pero, a la vez, la física cualitativa tradicional se organizaba esencialmente de modo axiomático, por lo que de forma paulatina se desarrolló la idea de que las matemáticas, lejos de ser inútiles, son el método mismo de la filosofía natural. Aunque durante un tiempo los matemáticos retornasen a la estática geométrica por la mayor transparencia de sus supuestos formales, existía un modelo alternativo que andando el tiempo daría lugar a la visión mecánica y matemática de toda la naturaleza (Solís & Sellés, 2005, p. 253).

6 LA CONTRIBUCIÓN DEL RENACIMIENTO: TARTAGLIA Y GUIDOBALDO

La obra de Jordano, que comentamos en la sección anterior, forma parte del gran despertar cultural de los siglos XII y XIII en el que se pueden encontrar llamativos precedentes para el renacimiento de la matemática (cf. Rose, 1975). Los traductores prehumanistas de este período llevaron a cabo un inmenso programa de traducción de las ciencias griega y árabe. Algunas de estas versiones jugaron un importante rol en el posterior renacimiento de la matemática. Los trabajos de Fibonacci y de Jordano atestiguan el surgimiento de la invención matemática. En el siglo XVI, se dieron en Italia dos escuelas mecánicas inspiradas en autores de la Antigüedad (cf. Solís & Sellés, 2005).

- La tradición arquimediana fue desarrollada por los matemáticos de Urbino, amantes del rigor de la prueba, como Commandino y sus discípulos Guidobaldo y Baldi. Se dedicaron a la estática y al estudio geométrico de los centros de gravedad, donde la precisión y el rigor se pueden alcanzar con principios sencillos y prescindiendo del movimiento.
- En el Norte, Tartaglia, Cardano, Benedetti y otros estaban dispuestos a sacrificar hasta cierto punto el rigor en aras de la relevancia práctica, recurriendo a principios dinámicos de fundamentación dudosa pero de eficacia heurística.

Fueron estos últimos que, con ensayos que se basaban en conceptos poco claros y principios nada obvios, comenzaron a lograr algunas generalizaciones empíricas que tenían la capacidad potencial de describir y explicar fenómenos dinámicos. De esta manera, iniciaron eficazmente la crítica a la física peripatética. Por el contrario, los de Urbino, al considerar a la física (dinámica) aristotélica irrelevante, no chocaron con ella.

Uno de los más importantes restauradores de las matemáticas, Niccolò Tartaglia (1500-1557) publicó *Quesiti ed inventioni diverse* (*Quesitos e invenciones diversas*) en 1546. En el libro VIII de dicha obra, consagrado a la crítica de algunos problemas clave de los *Problemas mecánicos* (pseudo-Aristóteles), no rechaza los contenidos pero sí cuestiona la ausencia de principios rigurosos. Considera que para que los *Problemas mecánicos* sean inteligibles es necesario el estudio de la ciencia de los pesos de Jordano.

Los escritores arquimedianos del siglo XVI rechazaron las demostraciones de Tartaglia y, de hecho, toda la tradición de Jordano. Benedetti, que fue alumno de Tartaglia, encontró el teorema del plano inclinado de Jordano como “indigno”. El *Restaurator mathematicorum* (Restaurador de las matemáticas) Commandino, fundador de la escuela de Urbino, desaprobó la tradición de Jordano y Tartaglia. Guidobaldo dal Monte, para quien “Commandino brilló como el sol en el medio de la oscuridad”, manifestará su disgusto por la demostración de Jordano, pero aceptará en cambio la demostración errónea de Pappo de Alejandría.

Guidobaldo dal Monte publica su *Liber mechanicorum* (*Libro de las mecánicas*), una obra sobre mecánica de rigor desconocido desde los tiempos de Arquímedes, gracias a que prescindía de la dinámica del movimiento. Al considerar que la potencia que mueve una resistencia es superior a la que equilibra supuso que a la dinámica y a la estática le correspondían principios distintos (cf. Solís & Sellés, 2005). El *Libro de las mecánicas* fue publicado en Pesaro en 1577. Luego fue traducido al italiano en 1581 y posteriormente reimpresso en Venecia en 1615. Gozó de una amplia circulación y fue considerado por sus contemporáneos como la obra más autorizada y sistemática sobre estática desde la época de los griegos (cf. Rose, 1975). Fue entendido como un retorno a los modelos arquimedianos clásicos de pruebas matemáticamente rigurosas y representó la clave del resurgimiento de Arquímedes. En su dedicatoria al Duque Francesco María II de Urbino en la edición de 1577, el mismo Guidobaldo trató de ubicar su obra en el contexto del renacimiento de las matemáticas. Comienza por considerar a Pappo de Alejandría como un discípulo de Arquímedes. El libro VIII de las *Colecciones matemáticas* de Pappo contiene la aplicación de la ley de la palanca de Arquímedes a las otras máquinas simples. Guidobaldo, por lo tanto, al revivir a Pappo está restituyendo a Arquímedes.

La dedicatoria ya mencionada está consagrada al punto de vista según el cual la mecánica, siendo una ciencia mixta, debe referirse a fenómenos físicos y que no debe permanecer simplemente como una ciencia abstracta y contemplativa. Para Guidobaldo, “la mecánica no puede seguir llamándose mecánica cuando es abstraída y separada de las máquinas” (Guidobaldo *apud* Rose, 1975, p. 231) y no se conforma con pedir que la ciencia de la mecánica se ocupe de las máquinas, si no que insiste en que los mecánicos mismos se involucren en los asuntos prácticos concernientes a las máquinas reales. Con cierto espíritu baconiano, Guidobaldo afirma que la nobleza de la

mecánica consiste en que ésta le da al hombre el control del reino de la naturaleza. Su enfática defensa de la mecánica se basa también en el hecho de que Arquímedes fue un infatigable inventor y que esta actividad fue una parte natural de su interés en la mecánica teórica (cf. Rose, 1975).

Guidobaldo apreciaba a Galileo, a quien recomendó en forma reiterada para puestos universitarios, por la pericia que había mostrado probando teoremas sobre centros de gravedad. Galileo no renunciaba a conectar la tradición estática y dinámica mediante consideraciones que permitieran pasar de manera continua de condiciones de equilibrio al movimiento utilizando los mismos principios, pero a la vez consideraba posible fundamentar en forma rigurosa y geométrica el estudio del movimiento. De esta manera llegó a pensar que una fuerza insensible podría *poner* en movimiento a un cuerpo inicialmente en reposo en un plano horizontal. De aquí se podría pensar que un cuerpo podría *mantenerse* indefinidamente en movimiento sobre una superficie horizontal, si se prescinde de la fricción, empujado por una fuerza insensible.

Guidobaldo en cambio consideraba que había allí un cambio radical de situación física. Por esta razón rechazó el teorema correcto del plano inclinado de Jordano y adhirió al erróneo de Pappo. En efecto, la Proposición 9 del libro VIII de las *Colecciones matemáticas* de Pappo está planteado en forma de problema y dice: “para arrastrar un peso dado sobre un plano horizontal es necesaria una fuerza dada. Se requiere hallar la fuerza necesaria para arrastrar a dicho peso hacia arriba sobre un plano inclinado que forma cierto ángulo con el plano horizontal” (Cohen & Drabkin, 1958, p. 194). En la demostración de Pappo:

- (a) Se considera que la fuerza necesaria para empujar un cuerpo sobre un plano horizontal es proporcional al peso. En esta suposición implícitamente se está considerando la fuerza de rozamiento que la superficie del plano horizontal ejerce sobre el cuerpo.
- (b) Se utiliza ingeniosamente la ley de la palanca de Arquímedes para “construir” un sistema de dos cuerpos equilibrados alrededor de su centro de gravedad común.
- (c) Se logra una impecable geometrización del fenómeno físico al considerar que el cuerpo que debe ser llevado hacia arriba es una esfera y por lo tanto existe un solo punto de contacto entre ésta y el plano inclinado.

Pero se llega a un resultado incorrecto debido a que no tuvo la habilidad de descomponer el peso en dos componentes, paralela y perpendicular respectivamente, al plano inclinado. Un procedimiento que recién estaría disponible a partir de las demostraciones de Stevin y de Galileo, cerca de 1600 (cf. Mach, 1949).

7 GALILEO Y LA NUEVA DINÁMICA

Galileo Galilei (1564-1642) se convirtió en matemático en la década de 1580 y se unió a la gran ola del renacimiento de la matemática. Las obras de Tartaglia y Commandino estaban en amplia circulación; Benedetti publicó *Liber diversarum speculationum* (*Libro de las varias especulaciones*) en 1585; y el *Libro de las mecánicas* de Guidobaldo ya había aparecido tanto en latín como en italiano. Mientras la ciencia de la estática había quedado firmemente establecida en el marco arquimediano, la dinámica se resistía a tal transformación desde los tiempos de Arquímedes mismo. Tanto Tartaglia como Benedetti habían logrado sólo algunos buenos resultados en algunos aspectos aislados de la dinámica y esto parecía confirmar la dificultad de establecer una dinámica matemática general arquimediana. La crisis se puso de manifiesto cuando Guidobaldo en 1577 denunció los intentos de reducir la ciencia de la mecánica a los principios arquimedianos que rigen a la estática. Para Guidobaldo la dinámica permanecía como una ciencia obstinadamente física que debía ser explicada en términos de causas y efectos cualitativos. Mientras prevaleciera esta perspectiva, no habría una ciencia mecánica unificada y, en consecuencia, no habría física moderna. Galileo logró resolver la crisis y conducir al renacimiento de la matemática a una conclusión exitosa (cf. Rose, 1975).

Las primeras obras científicas de Galileo fueron *Theoremata circa centrum gravitatis* (1585) y *La bilancetta* (1586). La primera de estas obras mereció la aprobación de Guidobaldo que comenzó a apoyarlo académicamente. Con poco más de veinte años, Galileo empezó a moverse con soltura en las tradiciones prácticas tipo Tartaglia y en las más rigurosas al estilo de Guidobaldo (cf. Solís & Sellés, 2005). En 1589, ocupó la cátedra de matemáticas de Pisa y en 1591 se trasladó a la Universidad veneciana de Padua. En ambas ocasiones fue recomendado por Guidobaldo.

7.1 EL MOVIMIENTO

Posteriormente redactó *De motu* (1589-1592) cuyo propósito explícito es analizar y criticar la doctrina peripatética acerca de los movimientos naturales y violentos. Empleando métodos de análisis tomados tanto de la estática como de la hidrostática de Arquímedes, Galileo intentó construir una dinámica general, válida para todo tipo de movimientos (cf. Navarro, 1991). Debemos destacar que, en esta obra, Galileo comienza aceptando la cosmología aristotélica de los cuatro elementos y la física basada en los lugares naturales. Sin embargo su concepción del peso es diferente y por lo tanto también habrá diferencias en toda explicación dinámica que lo tenga como su *causa* (cf. Molina, 2005). Para Galileo, en lo que respecta a la mecánica, todos los cuerpos están

hechos de una misma materia. No existe la liviandad natural. Todos los cuerpos tienden hacia abajo. Cuando un cuerpo asciende es porque su densidad es menor que la del medio (cf. Solis & Sellés, 2005). Dado que los cuerpos livianos ubicados en un medio más pesado ascienden por *extrusión* y no en razón de una propiedad natural que les sea propia, se infiere que no habrá movimientos ascendentes *naturales* y que el único movimiento rectilíneo natural será el movimiento *descendente* hacia el centro de la Tierra. Es decir, la “levedad” hay que entenderla en un sentido relativo: son livianos aquellos cuerpos cuyo peso específico es menor que el del medio. En este marco conceptual, la velocidad de caída sería directamente proporcional a la diferencia de pesos específicos. Resumiendo: “pesado” y “liviano” ya no son cualidades absolutas sino que se han transformado en relaciones (cf. Koyré, 2001).

Galileo reconoce que esta regla, propuesta para determinar la velocidad de caída, no está corroborada experimentalmente y además señala la dificultad empírica que significa reconocer que dicha velocidad no es constante. Para resolver esta dificultad, Galileo procede al estudio de los movimientos violentos y de la explicación de éstos obtendrá una analogía para justificar la aceleración en los movimientos naturales (cf. Navarro, 1991).

Galileo no puede evitar la obligación de justificar la incongruencia entre la propia teoría de los movimientos naturales uniformes y el dato experimental de la aceleración. Dado que Galileo enfatiza que en el movimiento natural no hay variación ni en la gravedad del móvil, ni en la del medio, la aceleración debe depender de factores externos que operan sobre la gravedad del móvil. La solución viene dada por la *virtus impressa* empleada para justificar los movimientos violentos.

Tomemos el caso de una piedra que se lanza en el aire verticalmente hacia arriba. La piedra sube; por lo tanto, podemos decir que ha adquirido cierta cualidad (o *virtud*) que la hace subir. Como el hecho de elevarse es una propiedad de los cuerpos leves, lo que la piedra ha adquirido es levedad. Esta levedad es una *virtus impressa* no natural. Esta virtud motriz (levedad) se mantiene en la piedra privada del contacto con el motor³ de forma análoga a como se conserva el calor en el hierro luego de haber sido retirado del contacto con el fuego. Esta virtud impresa por la acción del lanzamiento se va debilitando progresivamente en el objeto lanzado, una vez separado del agente lanzador, de forma análoga a como el calor “disminuye” al ser retirado del contacto con el fuego. La virtud motriz es algo impreso al objeto pero además es algo *cuyo ser consiste en actuar*. Ahora bien, al producir este movimiento ascendente, la levedad, como toda fuerza impresa, se agota por y en su misma acción.

³ Recordemos que para la física aristotélica no puede haber movimiento sin motor y el motor debe estar en contacto con lo movido.

La dinámica de Galileo contenida en su obra *De motu* permite la existencia de movimientos neutros, ni naturales ni violentos, ya que no van en contra ni a favor de la gravedad. En una superficie horizontal equidistante del centro de la Tierra un cuerpo está en un estado indiferente respecto al movimiento. Galileo sostiene, en contra de Pappo y de Guidobaldo, que una fuerza *insensible* alcanza para poner en movimiento un cuerpo en esas condiciones.

La demostración de Galileo comienza por considerar que un cuerpo apoyado sobre un plano apenas inclinado respecto al horizonte descenderá naturalmente si no hay ninguna resistencia externa. Esto se puede apreciar claramente en el caso del agua. Un cuerpo ascenderá por dicho plano inclinado sólo violentamente. Pero en un plano horizontal no se moverá ni natural ni violentamente. Por lo tanto se puede probar que con una fuerza *mínima* se puede poner en movimiento. Aceptemos que cualquier grave puede moverse sobre un plano horizontal por medio de una fuerza *menor* que la necesaria para moverse por un plano inclinado.

En la figura 11, AB representa al plano del horizonte y CB una recta vertical. El móvil es una esfera de peso P . El segmento indicado con f representa la magnitud de una fuerza *cualquiera*. El segmento indicado con F representa la magnitud de la fuerza capaz de elevar a la esfera verticalmente. Supongamos que F es a f como AD es a BD .⁴ Es decir:

$$\frac{F}{f} = \frac{AD}{BD} \quad \text{o} \quad \frac{F}{f} = \frac{L}{H}$$

Entonces, si F puede elevar a la esfera verticalmente, $f < F$ podrá hacerlo sobre el plano inclinado AD . Por hipótesis la esfera podrá ser movida por el plano horizontal AB por medio de una fuerza menor que f . En esta demostración, la fuerza f se puede elegir de manera tal que sea muy pequeña, sólo reduciendo la inclinación del plano. Dicho de otro modo achicando su altura H respecto a su longitud L . Como la fuerza necesaria para mover al cuerpo sobre el plano horizontal es menor que f y ésta es tan pequeña como queramos, Galileo está planteando la posibilidad de mover a la esfera por medio de una fuerza que en términos actuales la denominaríamos infinitesimal.

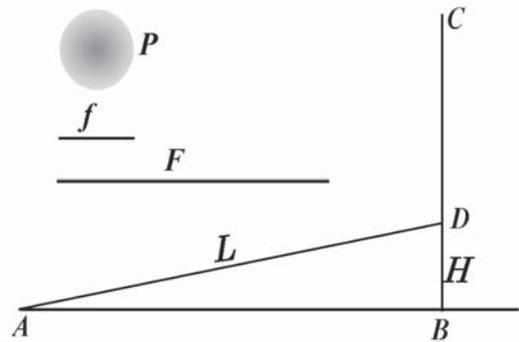


Figura 11. Galileo y la fuerza insensible.

⁴ Aquí, Galileo está utilizando la ley del plano inclinado, cuya primera demostración correcta se atribuye a Jordano Nemorario (ca. 1220) quien utilizara el principio de los trabajos virtuales de Thabit ibn Qurra.

Entonces para Galileo es posible mover sobre una superficie horizontal, es decir equidistante del centro de la Tierra, y prescindiendo del rozamiento, a un grave con movimiento eterno y uniforme (cf. Solís & Sellés, 2005). De este modo, una esfera ubicada en el centro del mundo puede ponerse en movimiento circular uniforme y eterno. ¿Y qué es la Tierra sino una esfera ubicada en el centro del mundo? En esta época, en que todavía Galileo no manifestó su adhesión al sistema copernicano, pudo haber empezado a concebir que la Tierra pueda estar animada de movimiento. Es decir, es posible considerar a la Tierra como un cuerpo celeste, especulando sobre su posible movimiento circular, aunque todavía considere que es el centro del universo (cf. Molina, 2005).

7.1 LAS LECCIONES DE MECÁNICA, EL MOMENTO, LA PALANCA (BALANZA ROMANA) Y EL PLANO INCLINADO

En 1592, Galileo se trasladó a la Universidad de Padua. Se ha hallado documentación que muestra que en el período lectivo 1597-98, los *Problemas mecánicos* (pseudo-Aristóteles) fueron tema de sus clases. Esta obra atribuida erróneamente a Aristóteles fue casi desconocida durante la Edad Media, pero en el siglo XVI fue traducida a varias lenguas y tuvo una amplia circulación (cf. Molina, 2005).

Allí redactó varias versiones de un nuevo tratado dedicado al estudio de las máquinas simples titulado *Le mecaniche* (*Las mecánicas*) (cf. EN, 2, p. 155-90). Esta obra pudo haber sido utilizada por Galileo para sus clases en la Universidad pero es más probable que hayan estado destinadas a sus clases particulares (cf. Molina, 2005). En dicha obra, la situación estática simplificada de la tradición arquimediana se amplía al considerar fuerzas insensibles capaces de romper el equilibrio. Galileo considera que la fuerza natural y general para todos los cuerpos es la gravedad pero en una máquina el movimiento efectivo de un cuerpo no depende sólo de ella. Es esencial para la explicación de movimiento la ubicación del centro de gravedad de todo el sistema. Galileo introduce el concepto de *momento* para designar a la efectividad de la fuerza según los movimientos posibles (cf. Solís & Sellés, 2005). Este concepto incluirá al de gravedad según la posición que Jordano ya había utilizado en su deducción de la ley del plano inclinado y también al bien conocido *momento de una fuerza*. Este concepto implica para Galileo una renovación del propio léxico y tiene una notable importancia ya que parece abrir la puerta a la posibilidad de una derivación de la dinámica a partir de los propios principios de la estática (cf. Molina, 2005).

7.1.1 EL MOMENTO

Le mecaniche comienza con una introducción dedicada a “la utilidad que se obtiene de la ciencia de la mecánica y de sus instrumentos” (EN, 2, p. 155). A continuación Galileo define gravedad, momento y centro de gravedad. Interesa señalar la definición de momento:

Momento es la propensión de ir hacia abajo, causada no tanto por la gravedad del móvil cuanto por la disposición que tengan entre sí los diversos cuerpos graves. Mediante este momento se verá muchas veces contrapesar un cuerpo menos pesado a otro más pesado, como se ve en la balanza romana a un contrapeso pequeño levantar otro peso grandísimo, no por exceso de gravedad, sino más bien por la lejanía respecto del punto por donde se sostiene la romana; ésta, junto con la gravedad del peso menor, le aumenta el momento y el ímpetu de ir hacia abajo, con el cual puede exceder el momento del otro de más peso. Es pues el momento ese ímpetu de ir hacia abajo, compuesto de gravedad, posición y de cualquier otra cosa que pueda causar tal propensión (EN, 2, p. 159).

Como podemos apreciar, aunque no se lo exprese en forma simbólica, en estas palabras de Galileo podemos encontrar la definición de momento de una fuerza con respecto a un punto. El ejemplo de la balanza romana es más que claro para darse cuenta que se está refiriendo al producto del peso por la distancia desde el punto de suspensión del mismo hasta el fulcro. Pero por si este concepto no hubiera quedado suficientemente claro, Galileo introduce una razonable suposición, que consiste en replantear el Postulado 1 y la Proposición 1 de Arquímedes, y nos aclara cómo se debe calcular el momento:

El centro de gravedad de dos cuerpos igualmente graves está en medio de la línea recta que une los dos dichos centros; o, en verdad, dos pesos iguales, suspendidos a distancias iguales, tienen el punto de equilibrio en la unión común de esas distancias iguales; como, por ejemplo, siendo la distancia CE igual a la distancia ED , y suspendidos de ellas dos pesos iguales, A y B , el punto de equilibrio está en el punto E , no habiendo más motivo para que se incline de un lado o

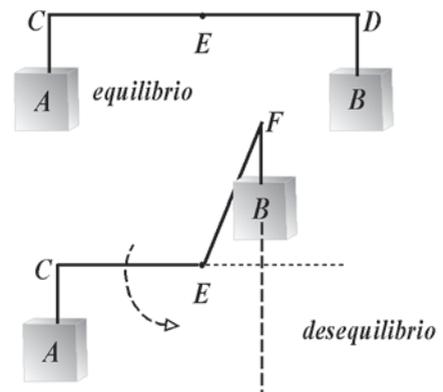


Figura 12. Galileo: balanza y momento.

de otro. Pero aquí debe advertirse cómo tales distancias deben medirse con líneas perpendiculares, que desde el punto de suspensión caen sobre las líneas rectas que se trazan desde los centros de gravedad de los dos pesos al centro común de las cosas graves. Y así, si la distancia ED fuese transportada a EF , el peso B no contrapesaría al peso A , porque trazándose desde los centros de gravedad dos líneas rectas al centro de la Tierra, veremos que la que viene del centro del peso [ubicado en F] está más cerca del punto E que la otra trazada desde el centro del peso A (EN, 2, p. 160).

7.1.2 LA PALANCA (O BALANZA ROMANA)

A continuación Galileo desarrolla, en *Las mecánicas*, una brillante y detallada demostración de la ley de la palanca que en sus rasgos esenciales responde al espíritu de la original de Arquímedes. Varias décadas después (ca. 1630) reproducirá dicha demostración en la Jornada Segunda de los *Discorsi* de 1638 (cf. EN, 8; Galilei, 1945). En efecto, en dicha obra, Salviati, el portavoz de Galileo, dice:

Tal vez será mejor que yo, por un camino un poco distinto del de Arquímedes, os introduzca en el campo de todas las especulaciones futuras, y suponiendo solamente que pesos iguales en balanzas de brazos iguales producen el equilibrio (principio supuesto igualmente por el mismo Arquímedes), yo pase después a demostrarvos que no sólo es verdad que pesos desiguales producen equilibrio en una romana de brazos desiguales según la razón inversa de los pesos suspendidos, sino también que idéntico efecto consigue aquel que coloca pesos iguales en distancias iguales, que aquel que coloca pesos desiguales en distancias que tengan inversamente la misma razón que los pesos (Galilei, 1945, p. 148).

Si bien Galileo desarrolla su demostración en *Las mecánicas* utilizando el típico rigor geométrico arquimediano, a continuación sostiene como argumento en defensa de la ley de la palanca ideas bastante similares a las expuestas en *Problemas mecánicos* (pseudo-Aristóteles). En “Algunas advertencias a cerca de las cosas dichas” (EN, 2, p. 163-4), Galileo nos muestra claramente su aceptación de las dos tradiciones, tanto la representada, entre otros, por Commandino y Guidobaldo y que podríamos denominar “estática-arquimedea”, como la posición menos “rigurosa” y “dinámica”, representada por Tartaglia y Benedetti. Así, cuando se trata de la demostración matemática recurre a Arquímedes pero luego utiliza los argumentos dinámicos con los que “pueden razonablemente confirmar la misma verdad” (EN, 2, p. 163).

Para pasar de la situación de equilibrio a la de desequilibrio es suficiente con agregar a uno de los pesos, por ejemplo, el *B*, un peso insensible y, por lo tanto, se lo puede considerar nulo y sin embargo analizar el fenómeno dinámico: “no tendremos en cuenta esa cantidad insensible y no distinguiremos entre poder un peso sostener a otro y poderlo mover” (EN, 2, p. 164).

Lo que “se gana” en fuerza (peso) “se pierde” en desplazamiento. El cuerpo más pesado *A* recorre, al subir, un arco menor mientras que el cuerpo menos pesado *B*, al descender, recorre un arco mayor. Entonces para que *A* pueda subir desde *A* hasta *D*, es necesario que el cuerpo menos pesado *B*, descienda más que lo que sube *A* como podemos ver en la figura 13. Encontramos en este fragmento de *Las mecánicas* de Galileo un antecedente del concepto de trabajo. Podríamos decir que el trabajo realizado por *B* al descender cierta altura consiste precisamente en hacer subir al peso mayor *A* pero a una altura menor. Si bien esto no lo dice Galileo, si nosotros no distinguimos entre el desplazamiento vertical y el desplazamiento por el arco de circunferencia, la analogía es perfecta. Por lo tanto si repetimos el razonamiento de Galileo para el caso de pequeños desplazamientos en donde la longitud del arco y el desplazamiento vertical miden casi lo mismo, estaríamos en presencia de una aplicación del principio de los trabajos virtuales que en cierto modo ya había sido anticipado en la Edad Media por Thābit ibn Qurra y que fuera utilizado con éxito por Jordano en su deducción de la ley del plano inclinado.

Como el ascenso de *A* y el descenso de *B* ocurren en el mismo lapso de tiempo, entonces *B* se mueve más rápido que *A*. Por lo tanto, se puede asignar un significado adicional al concepto de momento incluyendo el efecto de la velocidad. El peso *B* es menor que *A* pero su mayor velocidad le incrementa el momento, es decir su efectividad:

Resulta así ser la velocidad del movimiento del peso *B*, que desciende, tantas veces superior a la del otro móvil *A*, que asciende, cuanto la pesantez de éste excede a la de aquél (...). Y con este razonamiento podemos llegar al conocimiento de que la velocidad del movimiento puede aumentar momento en el móvil según la misma proporción con la que se aumenta esa velocidad de movimiento” (EN, 2, p. 164).

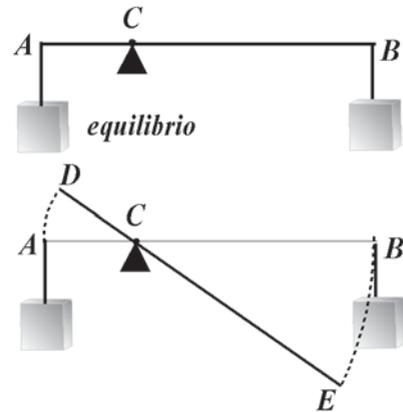


Figura 13. Galileo y los desplazamientos virtuales.

Si partimos de la situación con la balanza desequilibrada y agregamos al peso *A* un peso insensible, entonces el movimiento se invierte. El peso *A* al descender desde *D* hasta *A* “hace trabajo” que consiste en permitir que *B* vuelva a subir desde *E* nuevamente hasta *B*. Pero esto lo puede hacer ganándole en fuerza a *B*, ya que *A* pesa más que *B*, pero con el costo de que su movimiento es más lento que el de *B*: “Y así recíprocamente, colocado el peso *A* en *D* y el otro en el punto *E*, no estará fuera de razón que aquél pueda, cayendo lentamente hacia *A*, levantar velozmente el otro a *B*, restaurando con su pesantez lo que por la lentitud de su movimiento viene a perder” (EN, 2, p. 164).

7.1.3 EL PLANO INCLINADO

Las mecánicas es un tratado sobre las máquinas simples. En esta obra, Galileo realiza su propia demostración de la ley del plano inclinado. Luego de consideraciones muy similares a las que ya había expuesto en *Del movimiento* respecto al movimiento de los cuerpos sobre superficies inclinadas y antes de proceder a la demostración de la ley, establece: “...podemos tomar como *axioma indudable* esta conclusión: los cuerpos graves, eliminados todos los impedimentos externos y adventicios, pueden ser movidos en el plano del horizonte por cualquier *fuerza mínima*” (EN, 2, p. 180; énfasis mios). Hemos subrayado para que recordemos que anteriormente mostramos como Galileo demuestra esta afirmación utilizando la ley del plano inclinado, pero ahora la considera un axioma.

A continuación explicaremos la demostración, dentro de la cual Galileo hace referencia a la antigua y errónea de Pappo admirada por Guidobaldo, en estos términos:

La presente investigación fue también realizada por Pappo de Alejandría en el libro 8 de sus *Colecciones matemáticas*, pero a mi juicio no dio en el blanco y se ofuscó por el supuesto que hace según el cual el peso debe ser movido en el plano horizontal por una fuerza dada, lo que es falso, ya que no se necesita ninguna fuerza sensible (eliminados los impedimentos accidentales, que no son considerados por el teórico) para mover el peso dado por el horizonte; de este modo, en vano se indaga después con qué fuerza será movido sobre el plano inclinado. Mejor sería, al contrario, indagar, dada la fuerza que mueve al peso perpendicularmente⁵ (la cual sería igual a su gravedad), cuál debería ser la fuerza que lo mueve por el plano inclinado, lo que trataremos de conseguir con un enfoque diferente al de Pappo (EN, 2, p. 181).

⁵ Recordemos que Jordano utiliza el concepto de oblicuidad como “la desviación respecto de la vertical” y en base a dicho concepto plantea el de gravedad según la posición.

Galileo comienza su demostración con el trazado de una circunferencia cuyo diámetro horizontal es AC y su centro es B . En los extremos de este diámetro, hay dos pesos iguales como si A y C fueran lo extremos de una balanza o palanca y B entonces sería el fulcro o punto de apoyo. En estas condiciones, ambos pesos tienen igual momento y, por lo tanto, la palanca está equilibrada. Pero se nos invita a suponer que el brazo BC se puede inclinar como si el punto B fuera una articulación. Si el brazo BC pasa a ocupar ahora la posición BF el peso en su extremo F tiene ahora menor momento ya que la distancia BK es menor que la distancia BC .

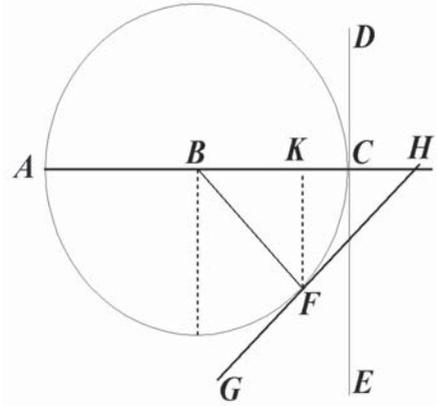


Figura 14. Momento: palanca y plano inclinado.

Si trazamos una recta GFH perpendicular en F a BF , es decir una recta tangente a la circunferencia en F , el peso en F se comporta como si estuviera colgado de la línea KB que es menor que AB . Los pesos en A y en F son iguales pero el momento del peso ubicado en F es menor que el momento de peso ubicado en A en la misma proporción en que BK es menor que AB .

Si suponemos una inclinación mayor del brazo BF incrementando el ángulo KBF , la recta tangente tendrá una inclinación menor respecto a la horizontal y, por lo tanto, el momento del peso en el extremo F será aún menor que antes. Si el peso ubicado inicialmente en C lo desplazamos hacia abajo pero manteniendo siempre la misma distancia respecto a B (es decir el radio de la circunferencia) su momento va disminuyendo a medida que se va acercando al punto más bajo pasando por distintas posiciones F . Entonces, se puede pensar que el peso ya no está vinculado por medio del brazo articulado en B , sino que desliza apoyado sobre una rampa circular y a medida que desciende su momento disminuye.

A partir de la definición de momento, de la analogía con la balanza y de una ingeniosa construcción geométrica, Galileo concluye su razonamiento:

Pero cuando el móvil está en F , es como si estuviera en el plano inclinado según la línea tangente GFH ya que la inclinación de la circunferencia en el punto F no difiere de la inclinación de la tangente GF (...). Por consiguiente, si sobre el plano HG el momento del móvil disminuye respecto de su ímpetu total, el que tiene en la perpendicular DCE , según la proporción de la línea KB a la línea BC (o BF), siendo por semejanza entre los triángulos KBF y KFH , igual a la proporción entre las líneas KF y FH que las dichas KB y BF , concluiremos que el momento entero

que tiene el móvil en la perpendicular al horizonte tiene con el correspondiente al plano HC la misma proporción que la línea HF con la línea FK , es decir, que la longitud del plano inclinado a la perpendicular que desde éste cae sobre la horizontal (EN, 2, p. 182-3).

Podemos apreciar que la definición de momento dada al inicio de *Las mecánicas* es lo suficientemente amplia como para incluir al momento de una fuerza con respecto a un punto, es decir, fuerza por distancia, como así también a la tendencia a ir hacia abajo según la posición similar al concepto utilizado por Jordano. De esta manera el argumento de Galileo se puede resumir, observando la figura 15, de la siguiente manera:

Cuando el móvil está en C , el momento:

- Es $P \times R$ (donde R es el radio de la circunferencia, $R = BC = BF$, y P es el peso), si lo interpretamos como momento del peso, como fuerza, respecto al punto B , o
- es todo el peso P , si pensamos que, en la vertical, el momento es la gravedad total.

Cuando el móvil está en el punto F , el momento:

- Es $P \times r$, donde ahora r es la distancia BK menor que el radio R de la circunferencia, o
- es una parte del peso P igual a $P \times h/L$ donde h es la altura KF del plano inclinado y L es su longitud HF .

La demostración de Galileo concluye con una clara enunciación de la ley del plano inclinado:

Y puesto que (...) la fuerza, para mover el peso, sólo necesita superar insensiblemente a la que lo sostiene, deducimos esta proposición universal: en el plano inclinado, la fuerza tiene la misma proporción con el peso que la perpendicular al horizonte por el extremo del plano con la longitud de este plano” (EN, 2, p. 183).

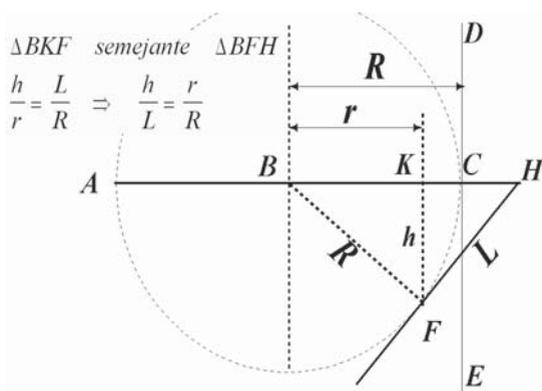


Figura 15. Momento y plano inclinado.

No debemos olvidarnos que este tratado versa sobre las máquinas simples y, por lo tanto, “finalmente, no debe silenciarse la consideración que desde el principio se ha dicho, que es necesario mantener en todos los instrumentos mecánicos, a saber, que lo que se gana en fuerza por su medio, otro tanto se pierde en tiempo y en velocidad” (EN, 2, p. 183).

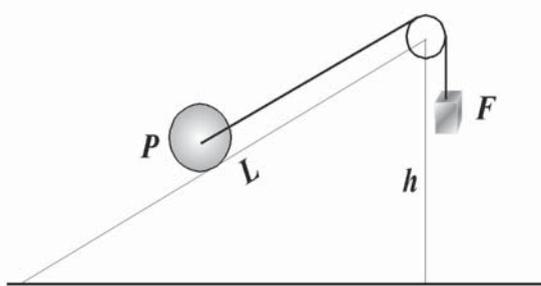


Figura 16. Plano inclinado y trabajos virtuales.

Entonces, si un cuerpo F desciende verticalmente empujando sobre el plano inclinado al móvil de peso P , ambos recorrerán la misma distancia, uno verticalmente, el otro sobre la superficie oblicua. Pero aunque el móvil P haya recorrido toda la línea de longitud L en el mismo tiempo que el otro F haya recorrido igual longitud, “no obstante el grave P no se habrá alejado del centro común de las cosas graves más que lo que le corresponde a la perpendicular” de longitud h .

Pero el grave F ha descendido toda la longitud L para poder elevar al grave P sólo la altura h . Por lo tanto, como consecuencia de la ley del plano inclinado ($F : L :: h : L$), podemos fácilmente concluir que la fuerza F es menor que P pero para poder elevar a P hasta una altura h debe recorrer una distancia L mayor que h . En nuestra terminología actual, el *trabajo* (o sea, elevar a P hasta la altura h), que realiza la fuerza F (fuerza por distancia recorrida,⁶ $F \times L$) es igual al producto del peso P por el recorrido *vertical* h del móvil P .

8 COMENTARIOS ADICIONALES Y CONCLUSIONES

8.1 ENSEÑANZA, APRENDIZAJE E HISTORIA DE LA FÍSICA

En la actualidad, cualquier persona con una formación básica en física, comprende y acepta que las leyes de la estática no son más que una consecuencia de las leyes del movimiento enunciadas por Newton. Si, en las ecuaciones dinámicas del movimiento, tanto las aceleraciones lineales como las angulares se igualan a cero, obtenemos las ecuaciones que corresponden al equilibrio de un cuerpo rígido: $\sum \vec{F} = 0$ $\sum \vec{r} \times \vec{F} = 0$. Tanto

⁶ Mientras que el momento es fuerza por distancia, pero dicha distancia se mide desde la recta de acción de la fuerza hasta el centro de momentos.

la sumatoria de todas las fuerzas como la sumatoria de todos los momentos de esas fuerzas son iguales a cero. En efecto, los programas universitarios de enseñanza de la física, en la gran mayoría de los casos, comienzan con nociones de cinemática para luego entrar en el capítulo de la dinámica, en el cual el núcleo central son las tres leyes de Newton y por deducción a partir de ellas, y definiendo nuevos conceptos (cantidad de movimiento, momento de una fuerza, trabajo, energía cinética etc.), se obtienen otras leyes de la mecánica.

Ahora bien, la *historia* detrás de estos conceptos y leyes es muy distinta a la manera como está estructurada la mecánica clásica en su enseñanza básica y mucha mayor diferencia hay aun en el caso de un curso superior de mecánica clásica racional.

Esta forma de enseñanza apunta a un aprendizaje eficaz para que el futuro profesional adquiera con una economía de recursos las herramientas fundamentales para proseguir con su aprendizaje de la física y de otras disciplinas, pero empobrece la comprensión de dichos conceptos si tenemos en cuenta que ellos son el fruto de una actividad de investigación y reflexión que se ha extendido durante siglos. Como sostiene Lindberg:

Haríamos bien en recordar que la filosofía natural fue la aventura en la que luminarias científicas tan importantes como Isaac Newton subsumían su propio trabajo (...). La investigación de la naturaleza era concebida por Newton, así como por sus predecesores antiguos y medievales, como una parte integral de una tradición filosófica más amplia de la realidad total a la que se enfrentan los humanos (Lindberg, 2002, p. 24-5).

En la breve sinopsis que constituye el presente trabajo, pudimos apreciar como las leyes del equilibrio fueron demostradas matemáticamente por Arquímedes en la Antigüedad y vimos cómo esta tradición resurgió con gran impulso durante el Renacimiento. Pero la teoría arquimediana no era considerada como parte de la ciencia física sino como una ciencia mixta, algo así como una rama de las matemáticas. Paralelamente existía la dinámica inspirada en la física aristotélica basada en conceptos clave tales como:

- (a) la “proporcionalidad” entre fuerza y velocidad,
- (b) la existencia de levedad y pesantez naturales,
- (c) los movimientos naturales y violentos,
- (d) la cosmología de los lugares naturales,
- (e) el contacto entre el motor y el móvil.

Esta física presentaba serios problemas, si se intentaba formalizar en forma matemática, como no podía ser de otra manera por el lugar que Aristóteles le asignaba

a la matemática en su filosofía. Había además otras dificultades de tipo conceptual, por ejemplo, la explicación de movimientos donde no se evidenciaba el contacto entre el motor y el móvil. El caso paradigmático es el movimiento de los proyectiles, para el cual ya en la Antigüedad (siglo VI), Filopón (Juan el Gramático de Alejandría) propuso su teoría de la fuerza impresa: “(...) la idea de que algunas fuerzas son entidades inmateriales independientes de los cuerpos, aunque susceptibles de implantarse en ellos desde fuera” (Solís & Sellés, 2005, p. 119). Cuando se arroja una piedra o una flecha, para Filopón, el lanzador le transmite al proyectil cierta fuerza motriz incorpórea, que permanece en el cuerpo arrojado sin necesidad de que éste tenga contacto con un motor. Esta idea pasó a los árabes en el siglo XII y a los latinos en el siglo XIV, y fue utilizada, entre otros, por Benedetti, discípulo de Tartaglia, y luego por Galileo en *Del movimiento* (cf. Solís & Sellés, 2005).

Según Koyré (2001), la noción galileana de fuerza impresa fue tomada de Benedetti. Pero posteriormente otros trabajos de investigación permitieron aclarar la distinción entre la *virtus impressa* (autoextinguible) y el *impetus* (protoinercial) de Buridan y Benedetti. Como hemos visto, Galileo en *Del movimiento*, utiliza el primero de estos conceptos, que casi con seguridad fue tomado de Ibn Bayya (Avempace) y que había aprendido de su profesor en Pisa, Girolamo Borro (cf. Molina, 2005).

En este trabajo hemos podido apreciar como ciertos conceptos fundamentales de la mecánica clásica, que habitualmente se consideran como consecuencias de la mecánica newtoniana, tienen una larga historia detrás. En particular, hemos visto como al estudiar el germen de conceptos tales como el momento de una fuerza y el trabajo, se manifiesta entre ellos cierto parentesco. Sin embargo, las definiciones en los libros de texto no sugieren una relación entre ellos.

El concepto de trabajo ya está claramente sugerido en el axioma de Jordano y fue utilizado para la demostración de la ley del plano inclinado. A su vez este axioma no es otra cosa que un principio formulado por Thābit ibn Qurra en su *Liber charastonis* (cf. Folkerts & Lorch, 2007). Pero en forma mucho más evidente hemos visto la génesis del concepto de trabajo en las lecciones de mecánica de Galileo (cf. Cardwell, 1967).

El concepto de momento de una fuerza está claramente definido por Galileo en dichas lecciones aunque su definición es más amplia que la actual. Lo más interesante es ver cómo utilizó ambos conceptos en su deducción de la ley del plano inclinado:

- El momento de una fuerza: un concepto aparentemente “estático” del cual podríamos decir que ya estaba implícito en la ley de la palanca desde Arquímedes, como sugirió Mach.
- El trabajo: un concepto “dinámico” ya que sólo tiene sentido hablar de trabajo si efectivamente hay desplazamiento.

- Ambos conceptos quedan vinculados por medio del principio de las velocidades virtuales. Es decir, no por el movimiento mismo, sino por la tendencia al movimiento.

8.2 EL CONTEXTO SOCIAL DE LA RESOLUCIÓN DE LA CRISIS ENTRE ESTÁTICA Y DINÁMICA

Según el historiador Paul Rose (1975) durante el siglo xv en Italia, la pasión por el redescubrimiento de la Antigüedad clásica guió la rápida formación y crecimiento de grandes bibliotecas humanistas. Estas colecciones humanistas diferían de las bibliotecas medievales tanto en tamaño como en contenido. El contenido de matemáticas griegas, en las bibliotecas de la Edad Media, generalmente se limitaba a traducciones de Euclides y algunas veces de Arquímedes. Las nuevas bibliotecas en la Italia renacentista incluían no sólo a Euclides y Arquímedes, tanto en latín como en griego, sino también textos griegos de Apolonio, Diofanto, Herón y Pappo. Sin todo este material reunido por los humanistas del quattrocento, el renacimiento de la matemática no hubiera sido posible. Pero además muchos de estos coleccionistas tuvieron un fuerte interés en las matemáticas y ellos mismos promovieron activamente las traducciones y el resurgimiento de las matemáticas griegas. De este modo, estas bibliotecas humanistas se convirtieron en importantes centros culturales y, gracias al poderoso impulso recibido por los humanistas del quattrocento, el renacimiento de la matemática fue el logro de matemáticos y no asunto de magos ni de astrólogos.

La interacción entre patronos humanistas y matemáticos en Italia precedió a la revolución científica. Este patronazgo tuvo un efecto de amplio alcance, ya que el patrón podía ocuparse de la seguridad financiera de su protegido y a la vez permitir su desarrollo fuera del ámbito de las universidades. Galileo fue un humanista antes de ser un matemático. Pasó algunos años de su juventud dedicado a los estudios humanistas como lo atestigua Viviani. Fue un exponente claro de esta nueva cultura renacentista que tuvo también, según Paul Rose (1975), una importante influencia psicológica, que contribuyó en gran medida al resurgimiento de la matemática.

Y fue Galileo quien logró resolver la crisis entre estática y dinámica, quien llevó el renacimiento de la matemática a una conclusión exitosa (cf. Rose, 1975) y contribuyó al nacimiento de una nueva física (cf. Cohen, 1977).☉

Daniel SILVIO VACCARO

Profesor de la Facultad de Ingeniería,
Universidad Austral, Buenos Aires, Argentina.

DVaccaro@austral.edu.ar

ABSTRACT

Since Newton established the bases of classical mechanics, it has been readily accepted that statics is a chapter of physics. However, from Antiquity to the Renaissance the two disciplines, statics and dynamics, had different histories that only sometimes interacted with one another. In this article, part of this process is described whereby statics was established during Antiquity in rigorous and mathematical form, whereas dynamics confronted conceptual and empirical difficulties, which began to be clarified only in the Renaissance. The laws of statics were initially established by Archimedes using a rigorous axiomatic system. It is shown that while there was a strong resurgence of the Archimedean tradition during the Renaissance, there was also a rival tradition that was, up to a point, disposed to sacrifice mathematical rigor, and instead make use of dynamical principles that have dubious foundation but that are heuristically efficacious. Galileo was a clear exponent of the new Renaissance culture interested in connecting the traditions of statics and dynamics; he considered it possible to give a rigorous and geometrical foundation to the study of movement, that enabled him to resolve the tension between statics and dynamics and to bring Renaissance mathematics to a successful realization that contributed to the birth of a new physics.

KEYWORDS • Archimedes. Aristotelian physics. Galileo. Statics. Dynamics. Antiquity. Renaissance. Momentum. Lever. Inclined plane.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARISTÓTELES. Mechanics. In: BARNES, J. (Ed.). *The complete works of Aristotle*. Princeton: Princeton University Press, 1991. v. 2, p. 1299-318. (Mech)
- _____. Mechanical problems. In: _____. *Minor works*. Cambridge: Harvard University Press, 1936. Disponible en: <<http://math.nyu.edu/~crrres/Archimedes/Lever/LeverLaw.html>>. Acceso en: 10 abr. 2008.
- _____. *Physics*. In: BARNES, J. (Ed.). *The complete works of Aristotle*. Princeton: Princeton University Press, 1991. v. 1, p. 315-446. (Física)
- ASSIS, A. K. T. *Archimedes, the center of gravity, and the first law of mechanics*. Apearon Montreal. Quebec. 2008. Disponible en: <<http://www.ifi.unicamp.br/~assis/Archimedes.pdf>>. Acceso en: 10 abr. 2008.
- BARNES, J. (Ed.). *The complete works of Aristotle*. Princeton: Princeton University Press, 1991.
- CARDWELL, D. S. L. Some factors in the early development of the concepts of power, work and energy. *The British Journal for the History of Science*, 3, 3, p. 209-24, 1967.
- COHEN, F. B. *El nacimiento de una nueva física*. Buenos Aires: Eudeba, 1977.
- COHEN, M. R. & DRABKIN, I. E. *A source book in Greek science*. Cambridge: Harvard University Press, 1958.
- FAVARO, A. (Ed.). *Edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei*. Firenze: Barbera, 1933 [1891]. 20 v. (EN)
- FOLKERTS, M. & LORCH, R. *The Arabic sources of Jordanus de Nemore*. Foundation for Science, Technology and Civilisation, 2007. Disponible en: <<http://www.fstc.co.uk/>>. Acceso en: 12 mar. 2008.
- GALILEI, G. Le mecaniche. In: FAVARO, A. (Ed.). *Edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei*. Firenze: Barbera, 1933 [1891]. v. 2, p. 155-90.
- _____. Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. In: FAVARO, A. (Ed.). *Edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei*. Firenze: Barbera, 1933 [1638]. v. 8, p. 39-313.
- _____. *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. Traducción T. Isnardi. Buenos Aires: Librería del Colegio, 1945.
- KOYRÉ, A. *Estudios galileanos*. México: Siglo Veintiuno, 2001.
- LAHANAS, M. *Griechische Mathematik: Pappos von Alexandria*. 2006. Disponible en: <<http://www.mlahanas.de/Greeks/Pappus.htm>>. Acceso en: 15 mar. 2008.

- LINDBERG, D. C. *Los inicios de la ciencia occidental*. Barcelona: Paidós, 2002.
- LLOYD, G. *De Tales a Aristóteles*. Buenos Aires: Eudeba, 1977.
- MACH, E. *Desarrollo histórico-crítico de la mecánica*. Buenos Aires: Espasa Calpe, 1949.
- MOLINA, F. T. El surgimiento de la dinámica galileana: historia e historiografía. *Scientiae Studia*, 3, 3, p. 357-94, 2005.
- NAVARRO, V. *Galileo*. Barcelona: Ediciones Península, 1991. (Textos Cardinales, 16).
- RENN, J.; DAMEROW, P. & McLAUGHLIN, P. *Aristotle, Archimedes, Euclid and the origin of mechanics. The perspective of historical epistemology*. Symposium Arquímedes. Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia. Max Planck Institute for the History of Science. 2003. Disponible en: <www.mpiwg-berlin.mpg.de/Preprints/P239.PDF>. Acceso en: 18 abr. 2008.
- ROSE, P. L. *The Italian renaissance of mathematics. Studies on humanists and mathematicians from Petrarch to Galileo*. Genève: Librairie Droz, 1975.
- SOLÍS, C. & SELLÉS, M. *Historia de la ciencia*. Madrid: Espasa Calpe, 2005.
- WINTER, T. N. *The mechanical problems in the corpus of Aristotle*. 2007. Disponible en: <<http://digitalcommons.unl.edu/classicsfacpub/68>>. Acceso en: 13 mar. 2008.

